

УДК 539.144

ЗАДАЧА О ЧАСТИЦЕ В СФЕРИЧЕСКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ЯМЕ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ОЦЕНКАМ ЭНЕРГИЙ ВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ Λ -ГИПЕРЯДЕР

С. М. Чернов

кандидат физико-математических наук, доцент,

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Проведены численные расчеты энергетических уровней возбужденных состояний гиперядер. Анализ проводился в рамках двухчастичной модели с потенциалами в виде сферической прямоугольной ямы.

Ключевые слова: гиперядра, энергия основного и возбужденных состояний, сферическая прямоугольная потенциальная яма.

Введение

В настоящее время среди открытых гиперядер (связанных состояний Λ -гиперона и нуклонов) обнаружена группа гиперядер, которые могут находиться не только в основном, но и в возбужденных состояниях [1]. При этом следует различать два типа возбуждения гиперядра. Во-первых, в гиперядре, представляющим собой в первом приближении связанную систему нуклонного остова и Λ -гиперона, ядерный остов находится в основном состоянии, а гиперон – на орбитах $1p$, $1d$ и т. д. (в представлении ядерных оболочек). Для характеристики одночастичных состояний Λ -гиперона из-за малости спин-орбитального взаимодействия достаточно указать лишь его орбитальный момент, в то время как нуклонные состояния характеризуются орбитальным и полным моментами. Важно отметить, что качество и наглядность этих данных выше, чем в обычных ядрах, особенно в области тяжелых элементов [1]. Во-вторых, наблюдаются возбужденные состояния Λ -гиперядер другой природы – когда гиперон находится в нижайшем ($1s$) состоянии, а возбуждено ядро-остов. Этот тип возбуждения в настоящей работе мы рассматривать не будем.

Таким образом, основное внимание будет уделяться анализу одночастичных состояний гиперядер в рамках модели Λ + нуклонный остов. При этом ограничимся рассмотрением систем со стабильными ядрами, для которых надежно определяются размеры, например, из опытов по электронному рассеянию. Задача состоит в определении массовых чисел гиперядер, которые способны иметь возбужденные состояния, а также положение соответствующих энергетических уровней. Эта проблема будет рассматриваться на основе однородной модели [2] с потенциалами $V_{\Lambda 0}(r)$ в виде прямоугольной сферической ямы для орбитальных моментов $l \leq 4$. Решение аналогичной задачи имеется во

всех руководствах по квантовой механике, но, как правило, лишь для случая $l=0$ [3] (см. также [4]). Поэтому в основной части вначале приводятся решения этой задачи для любых $l \neq 0$, и затем полученные результаты применяются для анализа возбужденных состояний некоторых гиперядер. В заключении проведено сравнение численных расчетов с имеющимися экспериментальными данными.

Основная часть

1. Частица в сферической прямоугольной яме

Пусть частица массы μ (в дальнейшем – приведенная масса гиперядра) движется с энергией $E = -B$ внутри сферической прямоугольной ямы ширины r_0 и глубины $-V_0$. Радиальная часть волновой функции частицы $f_l(r) = rR_l(r)$ (где $l = 0, 1, 2, \dots$ – орбитальное квантовое число) является решением радиального уравнения Шредингера [3]

$$\frac{d^2 f_l(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] f_l(r) = 0, \quad (1)$$

с граничным условием: $f_l(0) = 0$. Кроме того, функция $f_l(r)$ должна быть однозначной и непрерывной вместе со своей первой производной во всем пространстве, включая граничную точку $r = r_0$. Для получения дисперсионного уравнения, связывающего энергию частицы с параметрами поля, найдем решение уравнения (1) внутри и вне ямы и сошьем оба решения при $r = r_0$.

1) $\boxed{0 \leq r \leq r_0}$

Внутри ямы уравнение (1) принимает вид уравнения Риккати – Бесселя

$$f_l''(r) + \left(\beta^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) f_l(r) = 0, \quad (2)$$

где введено обозначение

$$\beta^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_0 - B). \quad (3)$$

Регулярные решения уравнения (2) связаны с функциями Бесселя полуцелого порядка:

$$f_l(r) = j_l(\beta r) = \sqrt{\frac{\pi r}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(\beta r),$$

которые простым образом выражаются через тригонометрические и степенные функции:

$$j_0(x) = \sin x; \quad j_1(x) = \frac{1}{x} \sin x - \cos x;$$

$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \sin x - \frac{3}{x} \cos x; \quad j_3(x) = \frac{3}{x} \left(\frac{5}{x^2} - 2 \right) \sin x + \left(1 - \frac{15}{x^2} \right) \cos x.$$

$$j_4 = \left(1 - \frac{45}{x^2} + \frac{105}{x^4}\right) \sin x + \frac{5}{x} \left(2 - \frac{21}{x^2}\right) \cos x. \quad (4)$$

Полезно указать рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют функции Бесселя:

$$\begin{aligned} j_{l+1}(x) &= \frac{2l+1}{x} j_l(x) - j_{l-1}(x), & (l=1,2,3,\dots) \\ \frac{dj_l(x)}{dx} &= j_{l-1}(x) - \frac{l}{x} j_l(x) \end{aligned} \quad (5)$$

2) $r > r_0$

Вне ямы уравнение (1) имеет вид

$$f_2''(r) - \left(\gamma^2 + \frac{l(l+1)}{r^2}\right) f_2(r) = 0, \quad (6)$$

где обозначено

$$\gamma^2 = \frac{2\mu B}{\hbar^2}. \quad (7)$$

Будем искать решения уравнения (6) с правильной асимптотикой ($\exp(-\gamma r)$) в виде:

$$f_2(r) = \exp(-\gamma r) \varphi(r), \quad (8)$$

где $\varphi(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi''(r) - 2\gamma\varphi'(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \varphi(r) = 0. \quad (9)$$

Представим решения уравнения (9) в виде обобщенного ряда

$$\varphi(r) = r^\delta \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n, \quad (10)$$

подстановка которого в уравнение (9) приводит к условию:

$$\begin{aligned} &\alpha_0 [\delta(\delta-1) - l(l+1)] r^{\delta-2} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha_k [(\delta+k-1)(\delta+k) - l(l+1)] - 2\gamma(\delta+k-1)\alpha_{k-1} \right\} r^{\delta+k-2} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Последнее соотношение справедливо для всех r лишь в том случае, если положить

$$\delta = -l, \quad (12)$$

$$\alpha_k = \alpha_{k-1} \frac{2\gamma(k-l-1)}{k(k-2l-1)}. \quad (13)$$

В частности, для различных значений $l \leq 4$ имеем:

$$l=1 \Rightarrow \alpha_k = \alpha_{k-1} \frac{2\gamma(k-2)}{k(k-3)};$$

$$\alpha_1 = \gamma\alpha_0; \quad \alpha_k = 0 (k \geq 2). \quad (14a)$$

$$l=2 \Rightarrow \alpha_k = \alpha_{k-1} \frac{2\gamma(k-3)}{k(k-5)};$$

$$\alpha_1 = \alpha_0\gamma; \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}\gamma^2\alpha_0; \quad \alpha_k = 0 (k \geq 3). \quad (14б)$$

$$l=3 \Rightarrow \alpha_k = \alpha_{k-1} \frac{2\gamma(k-4)}{k(k-7)};$$

$$\alpha_1 = \alpha_0\gamma; \alpha_2 = \frac{2}{5}\gamma^2\alpha_0; \alpha_3 = \frac{1}{15}\gamma^3\alpha_0; \alpha_k = 0 (k \geq 4). \quad (14в)$$

$$l=4 \Rightarrow \alpha_k = \alpha_{k-1} \frac{2\gamma(k-5)}{k(k-9)};$$

$$\alpha_1 = \alpha_0\gamma; \alpha_2 = \frac{3}{7}\gamma^2\alpha_0; \alpha_3 = \frac{2}{21}\gamma^3\alpha_0; \alpha_4 = \frac{1}{105}\gamma^4\alpha_0; \alpha_k = 0 (k \geq 5). \quad (14г)$$

Таким образом, полные решения $f_i^{(l)}(r)$ имеют вид:

s-состояние (l=0)	
$f_1^{(0)}(r) = A \sin(\beta r)$	$f_2^{(0)}(r) = B e^{-\gamma r}$
p-состояние (l=1)	
$f_1^{(1)}(r) = A \left(\frac{1}{\beta r} \sin \beta r - \cos \beta r \right)$	$f_2^{(1)}(r) = B e^{-\gamma r} \left(1 + \frac{1}{\gamma r} \right)$
d-состояние (l=2)	
$f_1^{(2)}(r) = A \left(\left(\frac{3}{(\beta r)^2} - 1 \right) \sin \beta r - \frac{3}{(\beta r)} \cos \beta r \right)$	$f_2^{(2)}(r) = B e^{-\gamma r} \left(1 + \frac{3}{\gamma r} + \frac{3}{(\gamma r)^2} \right)$
f-состояние (l=3)	
$f_1^{(3)}(r) = A \left[\left(\frac{15}{(\beta r)^3} - \frac{6}{\beta r} \right) \sin \beta r + \left(1 - \frac{15}{(\beta r)^2} \right) \cos \beta r \right]$	$f_2^{(3)}(r) = B e^{-\gamma r} \left(1 + \frac{6}{\gamma r} + \frac{15}{(\gamma r)^2} + \frac{15}{(\gamma r)^3} \right)$
g-состояние (l=4)	
$f_1^{(4)}(r) = A \left[\left(1 - \frac{45}{(\beta r)^2} + \frac{105}{(\beta r)^4} \right) \sin(\beta r) + \right.$ $\left. + \frac{5}{\beta r} \left(2 - \frac{21}{(\beta r)^2} \right) \cos(\beta r) \right]$	$f_2^{(4)}(r) = B e^{-\gamma r} \left[1 + \frac{10}{\gamma r} + \right.$ $\left. + \frac{45}{(\gamma r)^2} + \frac{105}{(\gamma r)^3} + \frac{105}{(\gamma r)^4} \right]$

Сшивая решения в точке $r = r_0$: $f_1'(r_0)/f_1(r_0) = f_2'(r_0)/f_2(r_0)$, получим соответствующие дисперсионные уравнения $F_l(x, y) = 0$ ($l = 0, 1, 2, 3, 4$), которые имеют вид:

$$F_0(x, y) = y + x \cdot \operatorname{ctgx} = 0, \quad (15a)$$

$$F_1(x, y) = \frac{(1 + y + y^2)}{(y + 1)} - \frac{[x \cos x + (x^2 - 1) \sin x]}{(x \cos x - \sin x)} = 0, \quad (15б)$$

$$F_2(x, y) = \frac{(y^3 + 3y^2 + 6y + 6)}{(y^2 + 3y + 3)} - \frac{[3(x^2 - 2) \sin x + x(6 - x^2) \cos x]}{[(x^2 - 3) \sin x + 3x \cos x]} = 0, \quad (15в)$$

$$F_3(x, y) = \frac{(y^4 + 6y^3 + 21y^2 + 45y + 45)}{(y^3 + 6y^2 + 15y + 15)} - \frac{[(x^4 - 21x^2 + 45) \sin x + x(6x^2 - 45) \cos x]}{[(15 - 6x^2) \sin x + x(x^2 - 15) \cos x]} = 0. \quad (15г)$$

$$F_4(x, y) = \frac{(y^5 + 10y^4 + 55y^3 + 195y^2 + 420y + 420)}{(y^4 + 10y^3 + 45y^2 + 105y + 105)} + \frac{[x(x^4 - 55x^2 + 420) \cos x + 5(-2x^4 + 39x^2 - 84) \sin x]}{[(x^4 - 45x^2 + 105) \sin x + 5x(2x^2 - 21) \cos x]} \quad (15д)$$

Здесь введены обозначения:

$$x = \beta r_0; \quad y = \gamma r_0. \quad (16)$$

Заметим, что переменные x и y связаны уравнением окружности

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (17)$$

радиус которой не зависит от энергии частиц E , а определяется лишь параметрами потенциала

$$R^2 = \frac{2\mu V_0 r_0^2}{\hbar^2}. \quad (18)$$

На рисунке 1, в качестве примера, представлено графическое решение системы уравнений (15а) и (17) при $R = 6$ для частицы с орбитальным моментом $l = 0$.

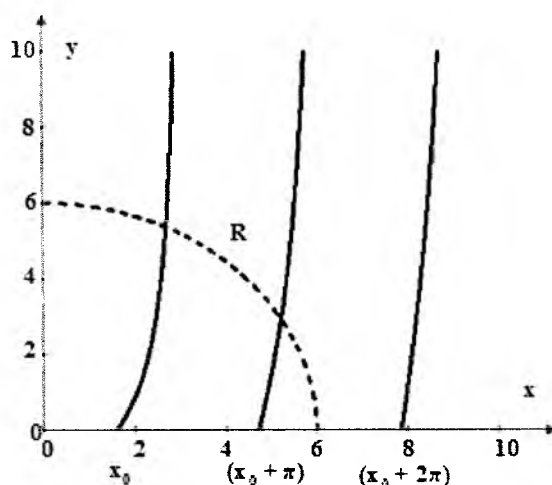


Рисунок 1. Графическое решение системы уравнений (15а) и (17) для случая $R = 6$ и частицы с орбитальным моментом $l = 0$

Кривые $y(x)$ пересекают ось x в точках $x^l = x_0 + \pi k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Аналогичная ситуация имеет место и для других случаев $l > 0$, однако, положение минимальной координаты x_0 смещается с ростом l в сторону больших значений. В частности, для s, p, d, f, g состояний минимальный корень уравнения $F_l(x_0^l, 0) = 0$ равен:

$$x_0^s = 1,571; \quad x_0^p = 3,142; \quad x_0^d = 4,493; \quad x_0^f = 5,763; \quad x_0^g = 6,988. \quad (19)$$

Отсюда видно, что в яме появляется единственный уровень энергии с заданным значением l , если параметры потенциала, определяющие значение R (18), такие, которые удовлетворяют условию $x_0^l \leq R \leq x_0^l + \pi$. При $R > x_0^l + \pi$ частица может иметь два и более дискретных энергетических уровней, как это видно на рисунке 1. Если R задано, то число возбуждаемых уровней в яме N можно определить по формуле

$$N = \left\{ 1 + \frac{R - x_0^l}{\pi} \right\}, \quad (20)$$

где символ $\{t\}$ означает целую часть числа t . В примере, представленном на рисунке 1, число $N = \{2,41\} = 2$.

Для иллюстрации приведем графики потенциалов и волновых функций гиперядра иттрия (${}^{89}_{\Lambda}Y$) в модели прямоугольной ямы с параметрами $V_0 = 27,5$ МэВ и $r_0 = 5,5$ Фм (рис. 2).

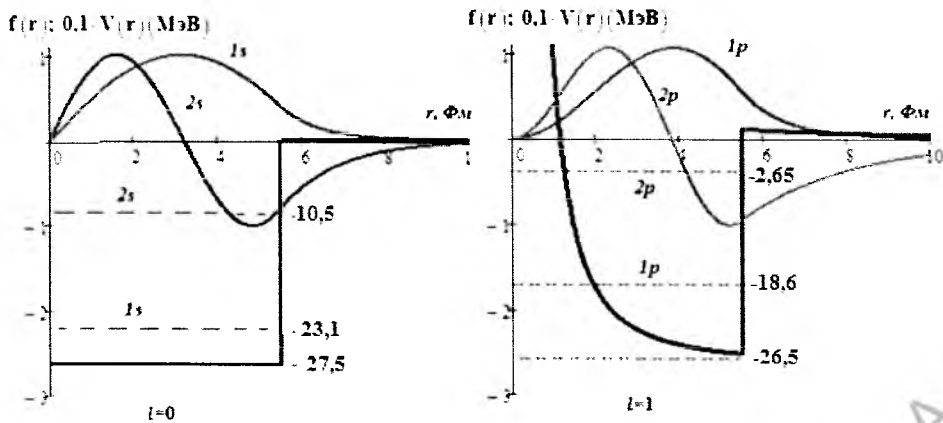


Рисунок 2. Графики потенциалов $V_{\Lambda 0}(r)$ и волновых функций гиперядра иттрия (${}_{\Lambda}^{89}\text{Y}$) в модели прямоугольной ямы с параметрами $V_0 = 27,5$ МэВ и $r_0 = 5,5$ Фм для $l = 0, 1$

Зная волновые функции гиперядра $f^{(l)}(r)$, можно оценить его “размеры” для различных значений l , если под размерами понимать среднеквадратичный радиус R_l

$$\langle R_l^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty f_l^2 r^4 dr}{\int_0^\infty f_l^2 r^2 dr}$$

В частности, для гиперядра иттрия имеем:

$$R_s = 4,11 \text{ Фм}, R_p = 5,08 \text{ Фм}, R_d = 5,34 \text{ Фм}, R_f = 5,45 \text{ Фм}.$$

2. Выбор модели гиперядра и основные предположения

В настоящей работе будем рассматривать гиперядра в двухчастичной модели: Λ^+ недеформированный нуклонный остов с массовым числом A . При этом нуклонный остов рассматривается как сплошная среда, в которой ядерная материя распределена равномерно с плотностью $\rho_0 = 3A/4\pi r_0^3$ внутри шара радиуса r_0 , который определяется из опытов по рассеянию быстрых электронов на ядрах (*однородная модель*). Обоснование однородной модели применительно к гиперядрам дано в работе [2]. В электронных экспериментах определяется среднеквадратичный радиус ядра $\langle R^2 \rangle^{1/2}$, численные значения которых для стабильных ядер приведены в банке ядерных данных [5]. При этом параметр r_0 связан со среднеквадратичным радиусом ядра условием $r_0 = \sqrt{5/3} \langle R^2 \rangle^{1/2}$.

Так как радиус действия ΛN -сил меньше размеров нуклонного остова почти на порядок, то для упрощения задачи положим $R_{\Lambda N} = 0$. В этом случае потенциал будет описываться единственным параметром – объемным интегралом $\Omega_{\Lambda N}$, а потенциал взаимодействия Λ -гиперона с нуклонным остовом в од-

нородной модели $V(r) = \Omega_{\Lambda N} \rho(r)$ примет вид прямоугольной ямы ширины r_0 и глубины $-V_0$:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & 0 \leq r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0 \end{cases}, \quad (21)$$

где

$$V_0 = \frac{3A\Omega_{\Lambda N}}{4\pi r_0^3}. \quad (22)$$

Следует отметить, что учет конечности радиуса действия ΛN -сил, а также выбор более реалистической формы функции $\rho(r)$ не приводит к улучшению результатов для энергий связи гиперядер по сравнению с однородной моделью [6]. Практически во всех работах [2, 6, 7], где используется феноменологический подход, не удается адекватно описать энергии связи всех гиперядер на основании единого ΛN -потенциала. Поэтому в настоящей работе для каждого гиперядра будем подбирать свой объемный интеграл, который способен правильно описать экспериментальные значения, по крайней мере, энергии основного состояния гиперядер $-B_\Lambda$. В этом подходе частично устраняются дефекты двухчастичного подхода, когда игнорируются эффекты деформации нуклонного остова и его кластеризации [7], а также пренебрежение другими компонентами ΛN -потенциала. Следует, наконец, отметить, что энергия возбуждения слабее зависит от деталей ΛN -потенциала, чем энергия отрыва Λ -частицы B_Λ [8].

Дальнейший численный анализ можно представить в виде следующих двух задач. Во-первых, для каждого исследуемого гиперядра, находящегося в основном состоянии, определяются параметры потенциала взаимодействия Λ -гиперона с нуклонным остовом $(\Omega_{\Lambda N}, V_0, R)$. Во-вторых, находится число и положение возбужденных уровней энергии гиперядер в однородной модели.

3. Расчет параметров потенциала взаимодействия Λ -остов

Решение этой задачи состоит из следующих этапов:

1) По таблицам ядерных данных [1, 5] для каждого гиперядра определяется радиус действия потенциала (размер нуклонного остова) (r_0), энергия связи (B_Λ) и приведенная масса (μ).

2) Вычисляется параметр $y = y_0$ (16).

3) Определяется значение координаты x как решение дисперсионного уравнения для основного состояния $F_0(x, y_0) = 0$ (15а).

4) Исходя из условий (18) и (22), находим искомые параметры $V_0, R, \Omega_{\Lambda N}$.

Основные результаты, полученные при решении этой задачи, сведены в таблице 1.

Таблица 1 – Параметры потенциалов взаимодействия Λ -частицы с нуклонным остовом

Гипер-ядро	$V_{\Lambda}^{\text{экср}},$ МэВ	$\langle R^2 \rangle^{1/2},$ Фм	$r_0,$ Фм	$\mu,$ МэВ	$R,$ Фм	$V_0,$ МэВ	$\Omega_{\Lambda N},$ МэВ·Фм ³
${}^5_{\Lambda}\text{He}$	3,12	1,6753	2,1628	858,666	2,117	21,72	230,1
${}^7_{\Lambda}\text{Li}$	5,58	2,5432	3,2833	930,375	2,795	15,16	374,7
${}^8_{\Lambda}\text{Li}$	6,80	2,4173	3,1207	952,960	2,879	17,38	316,1
${}^9_{\Lambda}\text{Li}$	8,50	2,3270	3,0041	970,727	3,004	20,05	284,7
${}^{10}_{\Lambda}\text{Be}$	9,11	2,5180	3,2507	984,773	3,208	19,26	307,9
${}^{11}_{\Lambda}\text{B}$	10,24	2,4277	3,1341	996,455	3,260	21,14	272,6
${}^{12}_{\Lambda}\text{B}$	11,37	2,4060	3,1061	1006,189	3,353	22,55	257,3
${}^{13}_{\Lambda}\text{C}$	11,69	2,4702	3,1890	1014,406	3,443	22,37	253,3
${}^{14}_{\Lambda}\text{C}$	12,17	2,4614	3,1777	1021,563	3,485	22,92	237,0
${}^{15}_{\Lambda}\text{N}$	13,59	2,5582	3,3026	1027,754	3,703	23,82	256,7
${}^{40}_{\Lambda}\text{Ca}$	18,70	3,4595	4,4662	1082,406	5,254	24,89	238,2
${}^{89}_{\Lambda}\text{Y}$	23,10	4,2449	5,4801	1100,682	6,832	27,49	215,4
${}^{139}_{\Lambda}\text{La}$	24,50	4,8464	6,2567	1106,074	7,888	27,98	208,0
${}^{208}_{\Lambda}\text{Pb}$	26,30	5,4943	7,0931	1109,323	9,131	29,09	210,1

Интересно отметить, что оценки объемного интеграла из анализа энергий связи гиперядер ${}^5_{\Lambda}\text{He}$ и ${}^{13}_{\Lambda}\text{C}$ в супергауссовой модели с конечным радиусом действия ΛN -сил ($R_{\Lambda N} = 0,9$ Фм) приводят к значению $\Omega_{\Lambda N} = 240,5$ МэВ·Фм³ [5], что, как следует из таблицы 1, практически совпадает с усредненным значением для этих гиперядер $\Omega_{\Lambda N} = 241,7$ МэВ·Фм³ в случае $R_{\Lambda N} = 0$. Далее, с ростом массового числа A увеличивается ширина потенциальной ямы, и нижний уровень энергии практически достигает дна ямы $V_0 = 29,1$ МэВ (${}^{208}_{\Lambda}\text{Pb}$). Этот результат находится в хорошем согласии с оценками энергии насыщения гиперона в ядерной материи $D_{\Lambda} \approx 30$ МэВ [1, 7].

4. Оценка возбужденных уровней энергии гиперядер

Зная параметры потенциала взаимодействия Λ -гиперона с нуклонным остовом, можно найти численное решение системы уравнений (15) и (17), т. е. x'_0 и y'_0 , которые предварительно можно приближенно оценить графически (см. рисунок 1). Найденные параметры, согласно условию (16), позволяют определить энергии возбужденных состояний соответствующих гиперядер.

Прежде всего укажем гиперядра, которые могут иметь возбужденные уровни с $l > 0$ (ограничимся состояниями с $l \leq 4$). На основании условий (19) и (20), а также, используя численные значения для R из таблицы 1, можно сразу ука-

Для наглядности полученные результаты можно изобразить графически (рисунок 3) в виде зависимости $B_{\Lambda}(A^{-2/3})$, которая согласуется с аналогичными результатами для экспериментальных данных, представленных в работе [1].

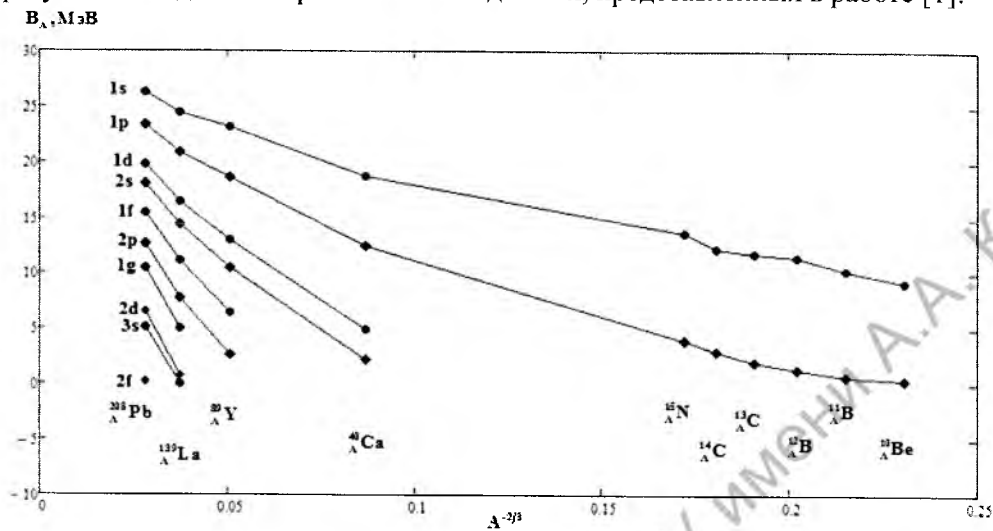


Рисунок 3. Уровни энергии гиперядер B_{Λ} с массовым числом нуклонов A

Для сравнения результатов проведенных расчетов с экспериментальными данными в таблице 3 представлены также экспериментальные результаты для $1f$ -уровней наиболее тяжелых гиперядер ${}^{89}_{\Lambda}Y$, ${}^{139}_{\Lambda}La$ и ${}^{208}_{\Lambda}Pb$, полученные в КЕК (Япония) при исследовании реакций ${}^4X(\pi^+, K^+)_{\Lambda}X$ на пучках пионов ($P_{\pi} = 1,06 \text{ GeV}/c$). Энергии этих состояний изображены для наглядности на энергетической диаграмме (рисунок 4).

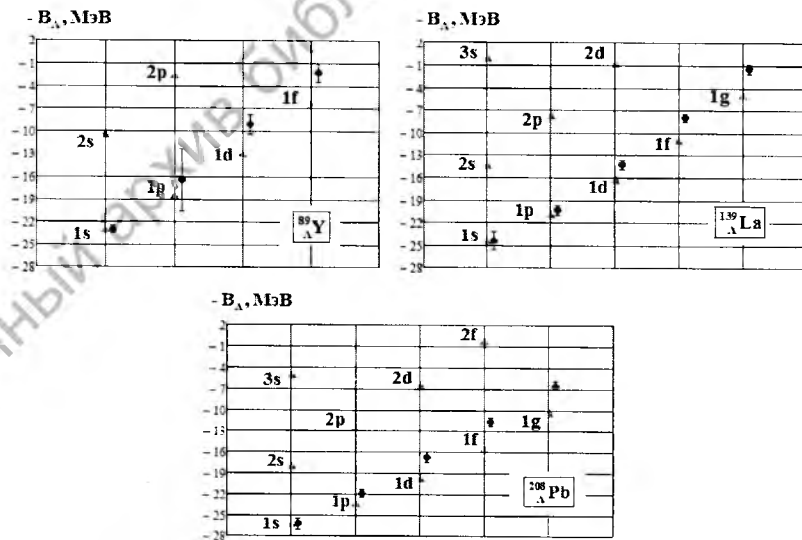


Рисунок 4. Сравнение расчетных и экспериментальных уровней энергии гиперядер ${}^{89}_{\Lambda}Y$, ${}^{139}_{\Lambda}La$ и ${}^{208}_{\Lambda}Pb$ для s, p, d, f, g состояний Λ гиперона

Из рисунка видно, что, не смотря на примитивность выбранной модели, наблюдается относительно хорошее совпадение результатов расчетов с опытными данными в пределах ошибок эксперимента. Это обстоятельство связано с тем, что здесь фактически оценивается разность положения возбужденных уровней относительно основного состояния. Но в этом случае большинство дефектов модели компенсируют друг друга. Некоторое улучшение соответствия модельных расчетов с экспериментом в области $l \geq 2$ может быть достигнуто путем добавления спин-орбитального взаимодействия Λ -гиперона [8, 9] а также учета эффектов деформации нуклонного остова в гиперядрах.

В частности, для гиперядра ${}^{208}_{\Lambda}Pb$ можно считать поисковыми параметрами r_0 и V_0 , которые можно оценить, например, по энергиям s - и g -состояний: $V_0 = 29,80 \text{ МэВ}$, $r_0 = 6,244 \text{ Фм}$. Потенциал $V_{\Lambda 0}$ с такими параметрами обеспечивает другие возбужденные состояния с точностью до 5% по энергии ($B_p = 21,9 \text{ МэВ}$; $B_d = 16,8 \text{ МэВ}$; $B_f = 11,7 \text{ МэВ}$).

Возможности модели сферической прямоугольной ямы позволяют достаточно просто оценивать не только значения энергий основного и возбужденных состояний, но также и такие тонкие эффекты, как влияние спин-орбитального взаимодействия Λ -гиперона на соответствующие уровни энергии с $l \neq 0$. В этом случае в уравнении (1) потенциал $V(r)$ следует заменить на $\tilde{V}(r)$ вида

$$\tilde{V}(r) = V(r) + V_{co}(r), \quad (23)$$

где потенциал (21) $V(r) = -V_0 \varphi(r)$, а также [8]

$$V_{co}(r) = V_{co}^0 \lambda_{\pi}^2 \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{l} \cdot \vec{s}. \quad (24)$$

Здесь $\varphi(r) = \theta(r_0 - r)$ ($\theta(x)$ – функция Хевисайда: $\theta(x > 0) = 1$; $\theta(x < 0) = 0$), $\lambda_{\pi} = \hbar/m_{\pi} c \approx \sqrt{2} \text{ Фм}$ – комптоновская длина волны π -мезона.

Учитывая, что $\delta(x) = \partial \theta(x) / \partial x$ ($\delta(x)$ – функция Дирака), а также

$$2\vec{l} \cdot \vec{s} = j(j \pm 1) - l(l+1) - s(s+1) = \alpha_j = \begin{cases} l, & j = l + 1/2; \\ -(l+1), & j = l - 1/2, \end{cases}$$

для $V_{co}(r)$ получаем:

$$V_{co}(r) = -C \frac{1}{r} \delta(r - r_0), \quad (25)$$

где параметр $C = V_{co}^0 \alpha_j$ определяется амплитудой спин-орбитального взаимодействия и значением полного момента Λ -гиперона.

В этом случае решения уравнения Шредингера (1) остаются непрерывными, в частности

$$f_2(r_0) = f_1(r_0). \quad (26)$$

Однако производная волновой функции при $r = r_0$ будет испытывать скачок из-за дельтаобразного члена (25). Оставляя главные члены в уравнении (1) вблизи точки $r = r_0$

$$f'' + \frac{2\mu C}{\hbar^2 r} \delta(r - r_0) f = 0 \quad (27)$$

и, интегрируя вдоль малого отрезка, содержащего точку $r = r_0$, находим

$$f_2'(r_0) - \frac{2\mu C}{\hbar^2 r_0} f_2(r_0) = f_1'(r_0). \quad (28)$$

Разделим почленно уравнение (28) на (26) и вводя обозначения (16), получим дисперсионные уравнения для нахождения уровней энергии гиперядер с учетом спин-орбитального взаимодействия вида:

$$F_l(x, y) - \frac{2\mu C}{\hbar^2} C = 0, \quad (29)$$

где функции $F_l = (x, y)$ определены условиями (15).

Отсюда следует, что все возбужденные уровни энергии с $l > 0$ имеют дублетную структуру, имеющее большее значение B_Λ для более высоких $j = l + 1/2$. Если принять $V_{\text{св}}^0 = 3,75 \text{ МэВ}$ [9], то величина спин-орбитального расщепления для гиперядра ${}_{\Lambda}^{208}\text{Pb}$ не превышает $\Delta E_g \approx 1,8 \text{ МэВ}$ даже для g-состояния. Аналогичные оценки, но с потенциалом типа Вудса-Саксона, приводят к близким результатам $\Delta E_g \approx 1,1 \text{ МэВ}$ [10].

Заключение

Задача о частице, движущейся в сферической прямоугольной яме, является одной из немногих задач квантовой механики, допускающей относительно простое аналитическое решение. При этом, кроме академического интереса, результаты решения этой задачи могут иметь прикладное значение при анализе реалистических проблем атомной и ядерной физики, что и демонстрируется в настоящей работе применительно к оценкам параметров возбужденных состояний гиперядер. По крайней мере, удастся определить область массовых чисел среди известных гиперядер, способных иметь возбужденные $1p$ ($A \geq 9$), $1d$ ($A \geq 39$), $1f$ ($A \geq 88$) и другие состояния, заранее предсказать общее число и положение дискретных уровней энергии. При этом можно ожидать не только качественного, но и количественного согласия с экспериментальными результатами. Не сложно распространить разработанную методику к анализу свойств гиперядер, для которых отсутствуют данные о размерах нуклонного остова в силу их крайней неустойчивости в свободном состоянии, проводя разумную интерполяцию для соседних элементов. Важно отметить, что проведенный анализ практически является слабо чувствительным к выбору модели гиперядер.

Современное состояние экспериментальных и теоретических исследований по спектроскопии Λ -гиперядер описано в обзоре [8].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ланской, Д. Е. Физика гиперядер / Д. Е. Ланской. – Web-версия учебного пособия, 2002.
2. Чернов, С. М. Оценка параметров гиперядер в простых моделях / С. М. Чернов // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В. Природазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – № 1. – 2016. – С. 66–73.

3. **Чернов, С. М.** Квантовая механика : курс лекций / С. М. Чернов. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2013. – 196 с.
4. **Флюгге, З.** Задачи по квантовой механике / З. Флюгге. – Москва : Мир, 1974. – Т. 1. – 342 с.
4. Физика ядра и банки ядерных данных / В. В. Варламов [и др.]. – Москва : НИИЯФ МГУ, 2010. – 245 с.
5. **Чернов, С. М.** Оценка параметров гиперядер в супергауссовой модели и рассеяния / С. М. Чернов // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – № 2. – 2016. – С. 53–61.
6. **Калачей, С. А.** Энергии связи гиперядер и взаимодействие Λ N и $\Lambda\Lambda$: дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.04.02 / С. А. Калачей. – Москва, 2005. – 119 л.
7. **Кочетов, А. Б.** Возбужденные состояния гиперядер p-оболочки / А. Б. Кочетов, Б. А. Хрылин // Письма в ЖЭТФ. – Т. 18, вып. 2. – 1973. – С. 136–138.
8. **Hashimoto, O.** Spectroscopy of Λ hypernuclei / O. Hashimoto, H. Tamura // Progress in Particle and Nuclear Physics. – V. 57. – 2006. – Pp. 564–653.
9. **Thakkar, K.** P-wave Λ -hyperon binding energies of medium heavy hypernuclei / K. Thakkar, A. Majethiya, P. C. Vinodkumar // Proceedings of the DAE Symp. on Nucl. Phys. – V. 56. – 2011. – Pp. 750–751.
10. **Motoba, T.** Hypernuclear production by the reaction / T. Motoba, H. Bando, R. Wunsch, J. Zofka // Phys. Rev. – C38. – 1988. – Pp. 1322–1334.

Поступила в редакцию 30.11.2016 г.

Контакты: stanislavchernof2011@yanlex.by (Чернов Станислав Михайлович)

Chernov S.M. SPHERICAL SQUARE WELL PROBLEM AND ITS APPLICATION TO ESTIMATION OF EXCITED-STATE ENERGIES OF Λ -HYPERNUCLEI.

Energy levels of excited states of Λ -hypernuclei are analyzed numerically in the framework of a two-particle model with potentials in the form of a spherical square well.

Keywords: hypernuclei, energy of ground and excited states, spherical square well.