

УДК 519.852.3, 330.131.52, 631.153.46

О ПРИЛОЖЕНИИ АНАЛИЗА ОБОЛОЧКИ ДАННЫХ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ

А. А. ЕФРЕМОВ

ассистент кафедры математических методов в экономике БГЭУ

Для изучения ССR-модели предложен переход к эквивалентной форме записи задачи линейного программирования. При оценке относительной эффективности функционирования объектов заданного множества существенно используется построение выпуклой оболочки системы данных. Возможность практического применения предложенного в рамках данной статьи подхода проиллюстрирована на примере решения конкретной экономической задачи.

Ключевые слова: относительная эффективность, ССR-модель, выпуклая оболочка, парето-оптимальность.

Введение

Линейное программирование как раздел математики переживало пик популярности в середине XX в., когда на его основе был разработан симплексный метод и различные его модификации. Этот подход позволял получать решение простейших оптимизационных задач. Однако со временем возникла необходимость в использовании более сложных с точки зрения математики форм зависимости между переменными в прикладных задачах, и линейное программирование отошло на второй план. Вместе с тем, в настоящее время оно остается востребованным для решения определенного класса оптимизационных задач и успешно применяется на практике. Одним из примеров такого приложения является задача о нахождении сравнительной эффективности данного объекта в рамках заданного конечного множества объектов.

С точки зрения концепции системного подхода всякая открытая система функционирует следующим образом: имеется множество входных потоков (обычно они представлены различными видами ресурсов), которые в соответствии с определенным набором правил (алгоритмом) преобразуются в выходные потоки. Для оценки эффективности функционирования системы рассматривается соотношение между совокупностью выходных и входных потоков.

Обозначим через $x = (x_1, \dots, x_n)$ вектор входа (ресурсы, используемые объектом P для достижения своих целей), а через $y = (y_1, \dots, y_m)$ – вектор выхода (результатирующие показатели деятельности объекта P). Пусть θ_0 есть мера относительной эффективности рассматриваемого объекта P_0 . В отличие от абсолютной эффективности относительная определяется на основе сравнения дан-

ного объекта с другими аналогичными из заранее заданного конечного множества однородных объектов. Под однородными объектами здесь понимаются объекты, которые имеют схожие цели функционирования и характеризуются единообразием используемых ресурсов и выходных параметров. Один из способов сопоставления эффективности функционирования аналогичных объектов был предложен в 1978 г. в рамках модели Чарнса-Купера-Родса (Charnes-Cooper-Rhodes) [1], или ССR-модели, хотя эти ученые отталкивались от статьи М. Фаррелла, опубликованной еще в 1957 г. [2].

Основная часть

Смысл математической постановки задачи состоит в том, что эффективность рассматривается с традиционной для современной науки точки зрения как отношение полученного эффекта к затратам на его достижение. Оптимизационная задача для множества, состоящего из N объектов, в соответствии с ССR-моделью будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \theta_0 = \frac{u_1 y_{10} + \dots + u_m y_{m0}}{v_1 x_{10} + \dots + v_n x_{n0}} \rightarrow \max, \\ \frac{u_1 y_{1k} + \dots + u_m y_{mk}}{v_1 x_{1k} + \dots + v_n x_{nk}} \leq 1, \quad k = \overline{1, N-1}, \\ u_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ v_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $u = (u_1, \dots, u_m)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ – векторы весовых коэффициентов, которые выступают в роли переменных задачи.

Для решения задачи оценки относительной эффективности функционирования объектов во второй половине XX в. была предложена методология анализа оболочки данных (Data Envelopment Analysis). Остановимся более подробно на этом подходе. Основная его идея в некотором смысле перекликается с симплекс-методом и заключается в построении выпуклой оболочки некоторого массива исходных данных. Необходимость привлечения анализа оболочки данных связана с тем, что при формулировке задачи в виде (1) максимально возможное значение относительной эффективности равно 1, и это значение соответствует объекту, который наиболее рациональным образом использует имеющиеся в его распоряжении ресурсы. Все такие объекты расположены в n -мерном пространстве на границе выпуклой оболочки.

Выпуклой оболочкой множества N называется наименьшее выпуклое множество, содержащее N . Напомним, что выпуклым называется множество, в котором все точки отрезка, ограниченного любыми двумя точками данного множества, также принадлежат данному множеству.

Создаваемая выпуклая оболочка наблюдаемых значений должна обладать следующим свойством:

Если $z' \in \Omega$ и $z'' \in \Omega$, то $\tilde{z} = \lambda z' + (1 - \lambda)z'' \in \Omega$, где $\lambda \in [0; 1]$.

На основании этого свойства можно получить следующее утверждение:

если $z_1, \dots, z_s \in \Omega$, то $z = a_1 z_1 + \dots + a_n z_s \in \Omega$, причем $\sum_{j=1}^s a_j = 1, a_j \geq 0, j = \overline{1, s}$.

Будем говорить, что $x' > x''$, если $x'_i \geq x''_i, i = \overline{1, n}$ и при этом существует хотя бы один индекс k такой, что $x'_k > x''_k$.

Введем отношение частичного порядка $z' \succ z''$, которое означает выполнение одного из следующих условий:

1) $x' < x''$ и $y' = y''$ (тот же результат достигается при использовании меньшего объема ресурсов);

2) $x' = x''$ и $y' > y''$ (при использовании того же самого объема ресурсов достигается больший результат).

Пусть критерий оптимальности, выбранный исходя из практического содержания задачи, представляет собой функцию $\phi(z)$. Тогда, если $z^* \in \Omega^*$ – оптимальный план, то это означает, что не существует $z_0 \in \Omega$ такого, что $\phi(z^*) < \phi(z_0)$, то есть, что имеет место отношение $z_0 \prec z^*$.

Если состояние некоторой системы таково, что значение каждого частного показателя, характеризующего систему, не может быть улучшено без ухудшения других, то такое состояние называется оптимальным по Парето (при этом $\theta_0 = 1$). Если же $\theta_0 < 1$, то состояние системы (объекта) является неоптимальным по Парето. Последнее интерпретируется как наличие резервов повышения эффективности [3]. То есть, если объект оказался внутри выпуклой оболочки, то для определения его относительной эффективности нужно определить направления такого его перемещения в n -мерном пространстве, при котором он гарантированно и за минимальное количество шагов окажется на границе выпуклой оболочки. Именно направление перемещения на каждом шаге (т. е. по каждому ресурсу и по каждому результативному показателю) определяют, в конечном счете, переменные u и v задачи (1).

Для получения численного решения задачи (1) удобно из дробно-линейной формы записи преобразовать в стандартную линейную:

$$\begin{cases} \theta_0 = \mu_1 y_{10} + \dots + \mu_m y_{m0} \rightarrow \max, \\ v_1 x_{10} + \dots + v_n x_{n0} = 1, \\ \mu_1 y_{1k} + \dots + \mu_m y_{mk} \leq v_1 x_{10} + \dots + v_j x_{jk} \quad (k = 1, \dots, N-1), \\ \mu_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ v_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (2)$$

Докажем, что формы записи задачи (1) и (2) эквивалентны.

Так как значения весовых коэффициентов v_j не могут одновременно равняться нулю, то при условии положительности всех элементов матрицы $X = \|x_{jk}\|$ знаменатель ограничений задачи (1) положителен для любого $j = 1, \dots, n$. Поэтому можно домножить обе части каждого из этих ограничений на знаменатель. Заметив, что значение целевой функции дробно-линейной за-

дачи (1) не изменится при умножении числителя и знаменателя на одно и то же ненулевое число, введем новое ограничение в виде равенства $v_1x_{10} + \dots + v_nx_{n0} = 1$.

Пусть оптимальное решение задачи (2) имеет вид $(v = v^*, \mu = \mu^*)$, при этом значение целевой функции равно θ^* . Тогда решение $(v = v^*, \mu = \mu^*)$ является оптимальным и для задачи (1), поскольку описанные выше преобразования являются обратимыми. Значит, у задач (1) и (2) одинаковое оптимальное значение целевых функций θ^* . Более того, легко показать, что единицы, в которых измеряются значения обеих целевых функций, совпадают [4].

Для последующего решения задачи (2) удобнее использовать сокращенную запись в векторной форме:

$$\begin{cases} \mu y_0 \rightarrow \max, \\ vx_0 = 1, \\ \mu Y \leq vX, \\ \mu \geq 0, v \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $Y = \|y_{ik}\|, i = \overline{1, m}, k = \overline{1, N-1}$.

В таком виде задачу можно легко решить, например, с помощью инструмента “Поиск решения” Ms Excel, но гораздо эффективнее в качестве инструментального средства решения задачи использовать версию специализированного программного продукта DEAP, разработанную Т. Коэлли в 1996 г.

Далее остановимся более подробно на анализе объектов, которые являются в рамках данного множества неэффективными по Парето.

Рассмотрим задачу, которая является двойственной к задаче (3). Она имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \theta \rightarrow \min, \\ \theta x_0 - X\lambda \geq 0, \\ Y\lambda \geq y_0, \\ \lambda \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

В таблице 1 представлено соответствие между элементами прямой и двойственной задач [5].

Таблица 1 – Соответствие между элементами прямой и двойственной задач

Прямая задача		Двойственная задача	
ограничения	переменные	ограничения	переменные
$vx_0 = 1$	$v \geq 0$	$\theta x_0 - X\lambda \geq 0$	θ
$-vX + \mu Y \leq 0$	$\mu \geq 0$	$Y\lambda \geq y_0$	$\lambda \geq 0$

Введем следующие переменные:

$$s^- = \theta x_0 - X\lambda \geq 0, s^+ = Y\lambda - y_0.$$

Они имеют реальный экономический смысл: первая переменная выражает превышение расхода каждого ресурса данным неэффективным по Парето объектом над оптимальным уровнем, а вторая выражает разницу между оптимальным значением результирующего показателя данного объекта и его фактическим значением. Таким образом, эти переменные отвечают за резервы снижения расхода ресурсов и резервы роста результирующих показателей.

Чтобы оценить величину указанных резервов, необходимо сначала найти решение двойственной задачи, а затем, уже с использованием полученного решения, приступить к следующей задаче линейного программирования:

$$\begin{cases} \omega = es^- + es^+ \rightarrow \max, \\ s^- = \theta x_0 - X\lambda \geq 0, \\ s^+ = Y\lambda - y_0, \\ \lambda \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь e – единичный вектор, обладающий тем свойством, что $es^- = \sum_{i=1}^m s_i^-$, $es^+ = \sum_{j=1}^n s_j^+$. Значение целевой функции ω интерпретируется как оценка сум-

марных резервов повышения абсолютной эффективности (возможной экономии ресурсов и потенциального прироста выходных показателей). В этой связи в научной литературе обычно принято выделять два типа анализа оболочки данных: ориентированный на ресурсы (input-oriented DEA), ориентированный на выпуск (output-oriented DEA). Первый позволяет как можно больше сократить количество потребляемых ресурсов, сохраняя выпуск на прежнем уровне; целью второго является максимизация выходных показателей при сохранении потребления ресурсов на прежнем уровне.

Таким образом, решение задачи (5) позволяет максимизировать резервы повышения эффективности при сохранении самой эффективности на уже найденном на предыдущем шаге уровне.

Рассмотрим пример практического применения методологии анализа оболочки данных для решения задачи нахождения относительной эффективности эксплуатации машинно-тракторного парка (МТП) сельскохозяйственных предприятий. В таблице 2 представлен перечень входных и выходных параметров системы функционирования МТП.

Таблица 2 – Исходные данные для оценки относительной эффективности использования МТП в полеводстве

Входные параметры (ресурсы)	Выходные параметры (эффект)
X1 – Стоимость топлива (дизельного и бензина) и ГСМ, затраченных на выполнение комплекса механизированных работ в полеводстве, млн руб.	Y – Валовой сбор зерна, скорректированный на балльность сельскохозяйственных угодий, т/балл
X2 – Стоимость активной части основных средств, непосредственно задействованных на выполнении комплекса работ, млн. руб.	
X3 – Стоимость техники, полученной по договорам лизинга за предыдущий год, млн руб.	
X4 – Средства, потраченные на ремонт и техническое обслуживание МТП, млн руб.	
X5 – Фонд оплаты труда механизаторов и водителей, занятых на выполнении комплекса работ механизированных работ в полеводстве, млн руб.	

Исходные данные по 11 сельскохозяйственным предприятиям Могилевского района представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Значения показателей предприятий выборки, используемые для DEA

№	Y	X1	X2	X3	X4	X5
1	116,4095	3899,4	59734	2446	2463	1205
2	590,5202	10676,2	198030	0	5955	5758
3	235,5159	6772,5	86897	510	12008	3902
4	274,825	3850,3	48839	457	5343	2122
5	117,2167	2537,1	33657	7992	2729	1616
6	257,5133	7844,6	41625	548	5026	3357
7	241,4626	5336,2	26285	2731	788	850
8	153,0973	5508,4	58672	0	1944	1652
9	145,747	4306,5	66939	1208	2415	3002
10	556,603	21038	368228	0	6450	7030
11	279,92	5931,6	41854	2423	4437	4682

Результаты решения оптимизационных задач (3) и (5) для каждого из 11 предприятий представлены в таблице 4. В данном случае был проведен анализ, ориентированный на ресурсы.

Таблица 4 – Результаты анализа DEA

№	Сравнительная эффективность	Резервы снижения расходов на				
		топливо и ГСМ	машины	лизинг техники	ремонт и ТО	оплату труда
1	0,539	0	15611	558	21	0
2	1	0	0	0	0	0
3	0,585	426	0	0	2966	346
4	1	0	0	0	0	0
5	0,708	0	0	5422	0	228
6	1	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0
8	0,902	2205	1707	0	207	0
9	0,616	0	0	469	0	598
10	0,942	9765	160406	0	466	1199
11	0,898	0	0	24	1384	2783

В таблице 5 представлены краткие выводы по анализу оболочки данных по группе предприятий Могилевского района. Акцент сделан на наиболее вероятных причинах неэффективности предприятий, оказавшихся внутри выпуклой оболочки, образованной предприятиями-лидерами.

Таблица 5 – Экономическая интерпретация результатов

№ предприятия	Краткий вывод об относительной эффективности функционирования МТП
1	Неэффективное по причине наличия значительных излишков производственных мощностей
2	Эффективное по Парето
3	Неэффективное по причине больших затрат на ремонт и перерасхода фонда оплаты труда механизаторов
4	Эффективное по Парето
5	Малоэффективное по причине больших затрат на лизинг техники
6	Эффективное по Парето
7	Эффективное по Парето
8	Среднеэффективное. Проблема в перерасходе топлива и ГСМ
9	Неэффективное по причине значительных трат на лизинг и перерасхода фонда оплаты труда механизаторов
10	Среднеэффективное. Проблема в наличии излишков производственных мощностей
11	Среднеэффективное. Проблема в перерасходе ФЗП механизаторов и больших затратах на ремонт

Заклучение

Следует отметить, что в настоящее время проблема эффективного использования ресурсов является одной из наиболее актуальных, в том числе, на микроуровне [6]. К набору самых современных методов оценки критериев эффективности можно отнести анализ оболочки данных. Этот подход позволяет не только рассчитать относительную эффективность, например, эксплуатации машинно-тракторного парка сельскохозяйственного предприятия, но и дать количественную оценку резервов экономии по каждому виду ресурсов.

Таким образом, предприятия №№ 2, 4, 6, 7 являются лидерами среди сельскохозяйственных организаций Могилевского района по направлению эффективного использования МТП. Они могут быть выбраны в качестве ориентира для других хозяйств анализируемой группы, которые могут перенять их полезный опыт эксплуатации системы машин. Руководству предприятий, которые в таблице 5 обозначены как неэффективные, следует обратить внимание на выявленные в ходе анализа проблемные аспекты и принять меры по оптимизации затрат ресурсов.

Полученные с помощью DEA результаты могут быть положены в основу разработки конкретных управленческих решений, направленных на повышение эффективности работы предприятия [7], в частности, за счет существенного снижения себестоимости машинно-тракторных работ в полеводстве.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Charnes, A.* Measuring the efficiency of decision making units with some new production functions and estimation methods / A. Charnes, W. V. Cooper, E. Rhodes // Defense Technical Information Center [Electronic resource]. – Mode of access: <http://www.dtic.mil/cgi-bin/GetTRDoc?Location=U2&doc=GetTRDoc.pdf&AD=ADA049149>. – Date of access: 19.11.2015.
2. *Farrell, M. J.* The measurement of productive efficiency / M. J. Farrell. // Journal of Royal Statistical Society, 1957. – № 120. – P. 253–281.
3. *Лисица, А.* Анализ оболочки данных (DEA) – современная методика определения эффективности производства / А. Лисица, Т. Бабичева // EconStor [Electronic resource]. – Mode of access: <https://www.econstor.eu/bitstream/10419/28581/1/374265275.pdf>. – Date of access: 16.11.2015.
4. *Штанге, Г.* Аграрный сектор России на подъеме?! Анализ технической эффективности аграрных предприятий / Г. Штанге, А. Лисица // EconStor [Electronic resource]. – Mode of access: <https://www.econstor.eu/bitstream/10419/28487/1/479574820.pdf>. – Date of access: 18.11.2015.
5. *Холод, Н. И.* Прогнозирование эффективности сельскохозяйственного производства / Н. И. Холод. – Минск : Ураджай, 1980. – 133 с.
6. *Ефремов, А. А.* Использование анализа оболочки данных для оценки сравнительной эффективности функционирования сельскохозяйственных организаций / А. П. Такун, А. А. Ефремов. // Материалы международной научно-практической онлайн-конференции “Антропогенная эволюция современных почв и аграрное производство в изменяющихся почвенно-климатических условиях”. – Орёл : Орловский гос. аграрный ун-т, 2015. – С. 189–191.
7. *Ефремов, А. А.* О комплексной оценке эффективности агропромышленного производства с ориентацией на выпуск. / А. А. Ефремов // Материалы IV междуна-

родной конференции “Научные разработки молодых ученых – развитию агро-промышленного комплекса”: сборник научных трудов. ФГБНУ ВНИИОК, Ставрополь, 2015.– Т. 1, вып. 8. – Ставрополь : Бюро новостей, 2015. – С. 591–593.

Поступила в редакцию 01.09.2016 г.

Контакты: andrefrem@tut.by (Ефремов Андрей Александрович)

Efremov A.A. ON THE APPLICATION OF DATA ENVELOPMENT ANALYSIS FOR CALCULATION OF RELATIVE EFFICIENCY OF OBJECT OPERATION.

To study CCR-model the transfer to the equivalent notation of the linear programming problem is proposed. While assessing relative efficiency of object operation the construction of the convex envelope of the data system is used to a large extent. The possibility of implementation of the presented in the given article approach is demonstrated on the example of solution of a concrete economic problem.

Keywords: relative efficiency, CCR-model, convex envelope, Pareto-optimality.