МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 512.548

ОБ АССОЦИАТИВНОСТИ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППОИДОВ

А. М. Гальмак
доктор физико-математических наук, доцент,
Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев

В статье продолжается изучение полиадической операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$. *В частности, установлено, что наличие левой единицы в полугруппе, на k-ой декартовой степени которой с помощью подстановки σ определяется l-арная операция* $[\ ]_{l,\sigma,k}$, *гарантирует тождественность для этой операции понятий ассоциативности и полуассоциативности.*

Ключевые слова: полиадическая операция, группоид, полугруппа, ассоциативность, единица.

1. Введение

При переходе от бинарных операций к полиадическим операциям возможны различные обобщения ассоциативности. В данной работе рассматриваются два вида обобщенной ассоциативности, а именно ассоциативность и полуассоциативность, применительно к l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая первоначально была определена в [1] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ на k-й декартовой степени A^k полугруппы A. Частными случаями этой l-арной операции являются две полиадические операции Э. Поста из [2]. Одну из них он определил на декартовой степени симметрической группы. Вторую операцию Э. Пост определил на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. В определении своих операций Э. Пост использовал в качестве подстановки σ цикл $(12 \ldots l-1)$.

В [1] доказано, что если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной. В частности, ассоциативными являются обе l-арные операции Э. Поста, так как $(l-1)$-я степень цикла $(12 \ldots l-1)$ является тождественной подстановкой.

В данной статье продолжается изучение полиадической операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$. В частности, установлено, что если полугруппа A обладает левой единицей, то из полуассоциативности l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ следует ее ассоциативность, то есть наличие в полугруппе A левой единицы гарантирует тождественность понятий ассоциативности и полуассоциативности для операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$.

2. Предварительные сведения

Напомним определения некоторых понятий, используемых в работе.

l-Арную операцию $[\ ]$ l-арного группоида $< A, [\ ] >$ и сам этот l-арный группоид называют *ассоциативными*, если в нем выполняется каждое из следующих $l-1$ тождеств

$$[[x_1 \ldots x_l]x_{l+1} \ldots x_{2l-1}]] = [x_1[x_2 \ldots x_{l+1}]x_{l+2} \ldots x_{2l-1}],$$
$$[[x_1 \ldots x_l]x_{l+1} \ldots x_{2l-1}]] = [x_1x_2[x_3 \ldots x_{l+2}]x_{l+3} \ldots x_{2l-1}],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[[x_1 \ldots x_l]x_{l+1} \ldots x_{2l-1}]] = [x_1 \ldots x_{l-2}[x_{l-1} \ldots x_{2l-2}]x_{2l-1}],$$
$$[[x_1 \ldots x_l]x_{l+1} \ldots x_{2l-1}]] = [x_1 \ldots x_{l-1}[x_l \ldots x_{2l-1}]].$$

Более кратко, l-арную операцию [ ] l-арного группоида < A, [ ] > называют *ассоциативной*, если в нем для любого $i = 2, \ldots, l$ выполняется тождество

$$[[x_1 \ldots x_l]x_{l+1} \ldots x_{2l-1}]] = [x_1 \ldots x_{i-1}[x_i \ldots x_{i+l-1}]x_{i+l} \ldots x_{2l-1}].$$

Если указанное тождество выполняется для $i = l$, то l-арную операцию [ ] и l-арный группоид < A, [ ] > называют *полуассоциативными*. Таким образом, l-арную операцию [ ] l-арного группоида < A, [ ] > называют полуассоциативной, если в нем выполняется тождество

$$[[x_1 \ldots x_l]x_{l+1} \ldots x_{2l-1}]] = [x_1 \ldots x_{l-1}[x_l \ldots x_{2l-1}]].$$

Ясно, что ассоциативная l-арная операция является и полуассоциативной.

Элемент e l-арного группоида < A, [ ] > называют его *единицей* (*левой единицей*), если для любого $x \in A$ верно

$$[x\underbrace{e \ldots e}_{l-1}] = [ex\underbrace{e \ldots e}_{l-2}] = \ldots = [\underbrace{e \ldots e}_{l-2}xe] = [\underbrace{e \ldots e}_{l-1}x] = x$$

$$([\underbrace{e \ldots e}_{l-1}x] = x).$$

Первыми примерами l-арных группоидов с единицами были l-арные группы В. Дёрнте [3].

Определение 2.1 [1, 4] Пусть A – полугруппа, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$. Определим на A^k l-арную операцию $[\ ]_{l,\sigma,k}$ следующим образом

$$[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = (y_1, \ldots, y_k),$$

где

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) \in A^k,\ i = 1, 2, \ldots, l,$$
$$y_j = x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{l\sigma^{l-1}(j)},\ j = 1, \ldots, k.$$

Теорема 2.1 [1, 4]. *Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ ассоциативна.*

3. Основной результат

Теорема 3.1. *Если полугруппа A обладает левой единицей, то l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда она полуассоциативна.*

Доказательство. *Необходимость*. Следует из определений ассоциативности и полуассоциативности.

Достаточность. Обозначим через e – левую единицу полугруппы A и положим

$$\mathbf{e} = (\underbrace{e, \ldots, e}_{k}),\ \mathbf{r} = [\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l}]_{l,\sigma,k} = (r_1, \ldots, r_k).$$

Для любых

$$\mathbf{x}_{l+2} = (x_{(l+2)1}, \ldots, x_{(l+2)k}) \in A^k, \ldots, \mathbf{x}_{2l-1} = (x_{(2l-1)1}, \ldots, x_{(2l-1)k}) \in A^k$$

введем обозначения

$$\mathbf{u}_i = [[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l}]_{l,\sigma,k}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{i-1}\mathbf{x}_{l+i}\ldots\mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\sigma,k},\ i = 2, \ldots, l-1,$$

$$\mathbf{v}_i = [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-1}[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{i}\mathbf{x}_{l+i}\ldots\mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\sigma,k}]_{l,\sigma,k},\ i = 2, \ldots, l-1,$$

$$\mathbf{s}_i = [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{i}\mathbf{x}_{l+i}\ldots\mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\sigma,k} = (s_{i1}, \ldots, s_{ik}),\ i = 2, \ldots, l-1.$$

Так как l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ – полуассоциативна, то $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i$, откуда, полагая

$$\mathbf{u}_i = (u_{i1}, \ldots, u_{ik}),\ \mathbf{v}_i = (v_{i1}, \ldots, v_{ik}),$$

получим

$$u_{ij} = v_{ij},\ j = 1, \ldots, k. \tag{3.1}$$

Так как

$$u_{ij} = r_j\underbrace{e\ldots e}_{i-1}\,x_{(l+i)\sigma^i(j)}\ \cdots\ x_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)},$$

где e – левая единица полугруппы A,

$$r_j = \underbrace{e\ldots e}_{l} = e,$$

то

$$u_{ij} = x_{(l+i)\sigma^i(j)}\ \cdots\ x_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)}. \tag{3.2}$$

Так как

$$v_{ij} = \underbrace{e\ldots e}_{l-1}\,s_{i\sigma^{l-1}(j)} = s_{i\sigma^{l-1}(j)},$$

где

$$s_{i\sigma^{l-1}(j)} = \underbrace{e\ldots e}_{i}\,x_{(l+i)\sigma^i(\sigma^{l-1}(j))}\ \cdots\ x_{(2l-1)\sigma^{l-1}(\sigma^{l-1}(j))} =$$

$$= x_{(l+i)\sigma^{l+i-1}(j)}\ \cdots\ x_{(2l-1)\sigma^{2l-2}(j)},$$

то

$$v_{ij} = x_{(l+i)\sigma^{l+i-1}(j)}\ \cdots\ x_{(2l-1)\sigma^{2l-2}(j)}. \tag{3.3}$$

Из (3.1) – (3.3) следует

$$x_{(l+i)\sigma^i(j)}\ \cdots\ x_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)} = x_{(l+i)\sigma^{l+i-1}(j)}\ \cdots\ x_{(2l-1)\sigma^{2l-2}(j)}. \tag{3.4}$$

Положим

$$\mathbf{y}_i = [\mathbf{x}_1\ldots\mathbf{x}_{i-1}[\mathbf{x}_i\ldots\mathbf{x}_{l+i-1}]_{l,\sigma,k}\mathbf{x}_{l+i}\ldots\mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\sigma,k} = (y_{i1}, \ldots, y_{ik}),\ i = 2, \ldots, l,$$

$$\mathbf{z}_i = [\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{l+i-1}]_{l,\sigma,k} = (z_{i1}, \ldots, z_{ik}),\ i = 2, \ldots, l.$$

В частности,

$$\mathbf{y}_l = [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{l-1}[\mathbf{x}_l \ldots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\sigma,k}]_{l,\sigma,k} = (y_{l1}, \ldots, y_{lk}),$$

$$\mathbf{z}_l = [\mathbf{x}_l \ldots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\sigma,k} = (z_{l1}, \ldots, z_{lk}).$$

Тогда

$$y_{ij} = x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}\, z_{i\sigma^{i-1}(j)}\, x_{(l+i)\sigma^{i}(j)} \ldots x_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)} =$$

$$= x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}\, x_{i\sigma^{i-1}(j)}\, x_{(i+1)\sigma(\sigma^{i-1}(j))} \ldots$$

$$\ldots x_{(l+i-1)\sigma^{l-1}(\sigma^{i-1}(j))}\, x_{(l+i)\sigma^{i}(j)} \ldots x_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)} =$$

$$= x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}\, x_{i\sigma^{i-1}(j)}\, x_{(i+1)\sigma^{i}(j)} \ldots$$

$$\ldots x_{(l+i-1)\sigma^{l+i-2}(j)}\, x_{(l+i)\sigma^{i}(j)} \ldots x_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)},$$

то есть

$$y_{ij} = x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}\, x_{i\sigma^{i-1}(j)}\, x_{(i+1)\sigma^{i}(j)} \ldots$$

$$\ldots x_{(l+i-1)\sigma^{l+i-2}(j)}\, x_{(l+i)\sigma^{i}(j)} \ldots x_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)}. \qquad (3.5)$$

В частности, полагая в (3.5) $i = l$, получим

$$y_{lj} = x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}\, x_{l\sigma^{l-1}(j)}\, x_{(l+1)\sigma^{l}(j)} \ldots x_{(2l-1)\sigma^{2l-2}(j)},$$

так как при $i = l$ последовательность

$$x_{(l+i)\sigma^{i}(j)} \ldots x_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)}$$

из (3.5) является пустой. Последнее равенство для любого $i = 2, \ldots, l-1$ можно переписать следующим образом

$$y_{lj} = x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}\, x_{l\sigma^{l-1}(j)}\, x_{(l+1)\sigma^{l}(j)} \ldots$$

$$\ldots x_{(l+i-1)\sigma^{l+i-2}(j)}\, x_{(l+i)\sigma^{l+i-1}(j)} \ldots x_{(2l-1)\sigma^{2l-2}(j)}. \qquad (3.6)$$

Из (3.4) – (3.6) следует

$$y_{ij} = y_{lj},\ i = 2, \ldots, l-1,\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Следовательно, $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_l$, то есть

$$[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}[\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{l+i-1}]_{l,\sigma,k}\mathbf{x}_{l+i} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{l-1}[\mathbf{x}_l \ldots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\sigma,k}]_{l,\sigma,k}$$

для любого $i = 2, \ldots, l-1$. Кроме того, по условию теоремы l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ – полуассоциативна, то есть

$$[[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k}\mathbf{x}_{l+1} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{l-1}[\mathbf{x}_l \ldots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\sigma,k}]_{l,\sigma,k}.$$

Таким образом, в l-арном группоиде $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ выполняются все тождества ассоциативности, то есть l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ – ассоциативна. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Легко проверяется, что если e – единица (левая единица) полугруппы A, то

$$\mathbf{e} = (\underbrace{e, \ldots, e}_{k})$$

– единица (левая единица) l-арного группоида $< A, [\ ]_{l,\sigma,k} >$.

Приведем еще одно доказательство теоремы 3.1, воспользовавшись следующей леммой из [4]. В приведённой здесь формулировке, в отличие от формулировки, приведенной в [4], не используется преобразование f_σ.

Лемма 3.1 [4]. *Пусть A – множество, состоящее более чем из одного элемента, $k \geq 2$, σ и τ – подстановки из $\mathbf{S}_k$. Если*

$$(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) = (x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\sigma(k)})$$

для любого $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in A^k$, то $\sigma = \tau$.

***Второе доказательство** достаточности.* Повторив все вычисления в доказательстве достаточности теоремы 3.1 для случая $i = l - 1$, получим

$$x_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)} = x_{(2l-1)\sigma^{2l-2}(j)}$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$. Тогда по лемме 3.1

$$\sigma^{l-1} = \sigma^{2l-1},$$

откуда $\sigma^l = \sigma$. Применив теперь теорему 2.1, получим ассоциативность l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$. Достаточность доказана.

В связи с теоремой 3.1 возникает естественный вопрос: *останется ли утверждение этой теоремы верным, если в ее формулировке полугруппу с левой единицей заменить произвольной полугруппой.*

Для отрицательного ответа на сформулированный вопрос достаточно указать полугруппу A без левой единицы, для которой l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является полуассоциативной, но не является ассоциативной. Это будет означать, что в общем случае для l-арных группоидов вида $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ понятия ассоциативности и полуассоциативности нетождественны: полуассоциативность шире ассоциативности.

Теоремы 2.1 и 3.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.2. *Пусть A – полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной;*

2) *l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является полуассоциативной;*

3) *подстановка σ^{l-1} – тождественная.*

Доказательство. 1)$\Rightarrow$2) Следует из определений ассоциативности и полуассоциативности.

2)$\Rightarrow$3) Во втором доказательстве достаточности установлено, что из полуассоциативности l-арной операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ следует равенство $\sigma^l = \sigma$, что равносильно тождественности подстановки σ^{l-1}.

3)$\Rightarrow$1) Применяется теорема 2.1. Теорема доказана.

Проиллюстрируем теорему 3.2 следующим примером, показывающим, что если подстановка σ^{l-1} не является тождественной, то l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ не является ассоциативной, даже если в полугруппе A, содержащей более одного элемента; все элементы являются левыми единицами.

Пример 3.1. Положим в определении 2.1: A – полугруппа с операцией $ab = b$ для любых a, $b \in A$, содержащая более одного элемента;

$$l = 4,\ k = 2,\ \sigma = (12) \in \mathbf{S}_2.$$

Ясно, что в полугруппе A все элементы являются левыми единицами.

Так как $(12)^4$ – тождественная подстановка, то $(12)^4 \neq (12)$, то есть условие $\sigma^l = \sigma$ не выполняется.

Определим на A^2 4-арную операцию

$$[\mathbf{xyzu}]_{3,(12),2} = [(x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)(u_1, u_2)]_{3,(12),2} =$$

$$= (x_1 y_{\sigma(1)} z_{\sigma^2(1)} u_{\sigma^3(1)}, x_2 y_{\sigma(2)} z_{\sigma^2(2)} u_{\sigma^3(2)}) = (x_1 y_2 z_1 u_2, x_2 y_1 z_2 u_1) = (u_2, u_1).$$

Пусть **x**, **y**, **z** и **u** – те же, что и выше,

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2),\ \mathbf{w} = (w_1, w_2),\ \mathbf{p} = (p_1, p_2).$$

Согласно определению 2.1, а также, учитывая тот факт, что в полугруппе A все элементы являются левыми единицами, получим

$$[[\mathbf{xyzu})\mathbf{vwp}]_{3,(12),2}]_{3,(12),2} = [(u_2, u_1)\mathbf{vwp}]_{3,(12),2} = (u_2 v_2 w_1 p_2, u_1 v_1 w_2 p_1) = (p_2, p_1),$$

$$[\mathbf{xyz}[\mathbf{uvwp}]_{3,(12),2}]_{3,(12),2} = [\mathbf{xyz}(u_1 v_2 w_1 p_2, u_2 v_1 w_2 p_1)]_{3,(12),2} =$$

$$= [\mathbf{xyz}(p_2, p_1)]_{3,(12),2} = (x_1 y_2 z_1 p_1), x_2 y_1 z_2 p_2) = (p_1, p_2).$$

Так как A содержит более одного элемента, то p_1 и p_2 можно выбрать так, что $p_1 \neq p_2$. В этом случае

$$[[\mathbf{xyzu}]_{3,(12),2}\mathbf{vwp}]_{3,(12),2} \neq [\mathbf{xyz}[\mathbf{uvwp}]_{3,(12),2}]_{3,(12),2}.$$

Из этого неравенства вытекает, что 4-арная операция $[\ ]_{3,(12),2}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

4. Следствия

Применим полученные в предыдущем разделе результаты к некоторым конкретным подстановкам.

Теорема 4.1. *Пусть A – полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$ порядка d. Тогда:*

1) *l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда*

$$l \in \{td + 1 \mid t = 1, 2, \ldots, \}; \qquad (4.1)$$

2) *l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда*

$$l \in \{td + r \mid t = 0, 1, 2, \ldots; r = 2, \ldots, d\}. \qquad (4.2)$$

Доказательство. Множество всех натуральных чисел $l \geq 2$ может быть представлено в виде объединения двух непересекающихся подмножеств, присутствующих в (4.1) и (4.2).

Так как подстановка σ имеет порядок d, то для всех l из (4.1) верно равенство $\sigma^l = \sigma$, а для всех l из (4.2) верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$.

1) Пусть l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной и предположим, что натуральное $l \geq 2$ не принадлежит множеству из (4.1). Тогда l принадлежит

множеству из (4.2), и верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$. Поэтому по теореме 3.2 l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ – неассоциативна, что противоречит ее ассоциативности.

Если теперь l принадлежит множеству из (4.1), то верно равенство $\sigma^l = \sigma$. Поэтому по теореме 2.1 l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной.

2) Пусть l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ не является ассоциативной и предположим, что натуральное $l \geq 2$ не принадлежит множеству из (4.2). Тогда l принадлежит множеству из (4.1) и верно равенство $\sigma^l = \sigma$. Поэтому по теореме 2.1 l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ – ассоциативна, что противоречит ее неассоциативности.

Если теперь l принадлежит множеству из (4.2), то верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$. Поэтому по теореме 3.2 l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ не является ассоциативной. Теорема доказана.

В качестве подстановки σ в теореме 4.1 можно взять любую подстановку из $\mathbf{S}_k$, представимую в виде произведения независимых циклов, длина каждого из которых равна d, в частности, любой цикл длины d из $\mathbf{S}_k$ ($d \leq k$). Так как любой цикл длины k из $\mathbf{S}_k$ имеет порядок k, то из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.1. *Пусть A – полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$. Тогда*:

1) *l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда*

$$l \in \{tk + 1 \mid t = 1, 2, \ldots, \}; \tag{4.3}$$

2) *l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда*

$$l \in \{tk + r \mid t = 0, 1, 2, \ldots ; r = 2, \ldots, k\}. \tag{4.4}$$

Полагая в следствии 4.1 $\sigma = (12 \ldots k)$, получим

Следствие 4.2. *Пусть A – полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента. Тогда*:

1) *l-арная операция $[\ ]_{l,(12\ldots k),k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (4.3);

2) *l-арная операция $[\ ]_{l,(12\ldots k),k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (4.4).

Если в (4.1) и (4.2) положить $d = 2$, то множество всех l в (4.1) совпадает с множество всех нечетных чисел без единицы, а множество всех l в (4.2) совпадает с множеством всех четных чисел. Если при этом учесть, что порядок любой транспозиции равен двум, то из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.3. *Пусть A – полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента, σ – транспозиция из $\mathbf{S}_k$. Тогда*:

1) *l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечетное, большее единицы*;

2) *l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – четное.*

Полагая в следствии 4.3 $\sigma = (12)$, получим

Следствие 4.4. *Пусть A – полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента. Тогда*:

1) *l-арная операция* $[\ ]_{l,(12),k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечетное, большее единицы;*

2) *l-арная операция* $[\ ]_{l,(12),k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – четное.*

Замечание 4.1. Ясно, что в теоремах 3.1, 3.2 и 4.1, а также во всех следствиях раздела 4 левую единицу можно заменить единицей. В этих же теоремах и следствиях полугруппу с левой единицей можно заменить группой.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Гальмак, А. М.*** Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
2. ***Post, E. L.*** Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. ***Dörnte, W.*** Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
4. ***Гальмак, А. М.*** Многоместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

Поступила в редакцию 18.01.2017 г.
Контакты: +375 222 47-79-35 (Гальмак Александр Михайлович)

Gal'mak A.M. ON ASSOCIATIVITY OF POLYADIC GROUPOIDS.

The article focuses on further investigations of the polyadic operation $[\ ]_{l,\sigma,k}$ *In particular it has been found out that the availability of the left identity element in semigroup A guarantees the equality of associativity and semi-associativity for this operation.*

Keywords: polyadic operation, groupoid, semigroup, associativity, identity element.