

УДК 539.144

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ГИПЕРЯДЕР В ПРОСТЫХ МОДЕЛЯХ

С. М. Чернов

кандидат физико-математических наук, доцент
МГУ имени А. А. Кулешова

Проведен качественный анализ Λ -гиперядер в рамках двухчастичной модели при нулевом радиусе действия ΛN -сил. Оценено значение объемного интеграла ΛN -потенциала, энергии связи гиперядер, размеры нуклонного остова и длины A_p -рассеяния.

Ключевые слова: Гиперядра, основное и возбужденные состояния, энергия связи, размеры ядер, длина рассеяния и эффективный радиус.

Введение

Гиперядра – связанные состояния барионов, из которых, по крайней мере, один является гипероном со странностью, отличной от нуля. В настоящей работе будут рассмотрены лишь гиперядра, в состав которых входит единственный Λ -гиперон.

Λ -гиперядра были открыты польскими физиками М. Данышем и Е. Пниевским в 1952 г. За последние 60 лет в гиперядерной физике достигнут значительный прогресс: экспериментально идентифицировано около 30 гиперядер, для которых удалось измерить энергии связи гиперядер (энергии отделения Λ -гиперона B_Λ) с достаточно хорошей точностью, а также дать теоретическую интерпретацию свойств ΛN -потенциалов и описать структуру многих гиперядер. Состояние физики гиперядер систематически освещается в журнале “Успехи физических наук” [1], а также в работах [2–3]. В исследованиях физики гиперядер удалось решить целый комплекс важнейших вопросов физики ядра и элементарных частиц. Назовем лишь некоторые из них, которые будут затронуты в настоящей работе.

1) Построение моделей строения гиперядер, в рамках которых можно оценить параметры ΛN -потенциала.

2) Оценка энергии связи открытых гиперядер.

3) Рассмотрение вопроса о размерах нуклонного остова в гиперядрах, включая ядра, для которых отсутствуют данные для свободного состояния.

4) Проведение сравнительного анализа результатов, полученных на основе расчетов связанных состояний, с данными по низкоэнергетическому A_p -рассеянию.

Разумеется, что описанный круг проблем решался по-разному во многих работах [1–3]. При этом, как правило, проводились громоздкие аналитические и численные расчеты с большой затратой машинного времени, и которые, кроме автора, не могут быть воспроизведены. В настоящей работе показано, что

многие указанные вопросы могут быть качественно решены в рамках достаточно простых моделей, доступных студенту университета.

1. Выбор модели гиперядра и основные предположения

При анализе энергий связи гиперядер в первом приближении ограничимся рассмотрением центрального и спиново независимого ΛN -потенциала $V_{\Lambda N}(r)$. В дальнейшем расчет энергий связи гиперядер будем проводить в модели Λ -недеформированный нуклонный остов. При этом нуклонный остов рассматривается как сплошная среда, в которой ядерная материя распределена в пространстве с плотностью $\rho(r)$, где $\rho(r)$ – усредненная по углам плотность распределения нуклонов остова.

В рамках этой модели нахождение энергий связи гиперядер сводится к решению уравнения Шредингера для Λ -частицы, движущейся в поле ядра – остова

$$V_{\Lambda O}(r) = \int V_{\Lambda N}(|\vec{r} - \vec{r}_1|) \rho(r_1) d^3 r_1. \quad (1)$$

В случае гиперядер интеграл (1) допускает существенное упрощение, которое для дальнейшего будет иметь принципиальное значение. Можно показать, что выражение (1) можно представить в виде [4]:

$$V_{\Lambda O}(r) = -\Omega_{\Lambda N} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\langle R_{\Lambda N}^{2m} \rangle}{(2m+1)!} \nabla^{2m} \rho(r), \quad (2)$$

где введены обозначения:

$$\Omega_{\Lambda N} = - \int V_{\Lambda N}(r) d^3 r; \quad \langle R_{\Lambda N}^{2m} \rangle = - \frac{1}{\Omega_{\Lambda N}} \int V_{\Lambda N}(r) r^{2m} d^3 r. \quad (3)$$

В дальнейшем ограничимся первыми двумя членами последнего разложения:

$$V_{\Lambda O}(r) \approx -\Omega_{\Lambda N} \left(1 + \frac{R_{\Lambda N}^2}{6} \nabla^2 \right) \rho(r). \quad (4)$$

Здесь объемный интеграл $\Omega_{\Lambda N}$ и среднеквадратичный радиус $R_{\Lambda N} = \sqrt{\langle R_{\Lambda N}^2 \rangle}$ являются интегральными характеристиками ΛN -потенциала и не зависят от структуры ядра-остова.

Это приближение оправдано двумя причинами. Во-первых, оценка более высоких поправок, например $\langle R_{\Lambda N}^4 \rangle$, ограничена точностью измерений энергий связи гиперядер. Во-вторых, разложение (2) фактически ведется по малому параметру δ , равному отношению радиуса действия ΛN -сил ($: 0,5 \text{ Фм}$) к размерам ядра-остова ($: 4 \text{ Фм}$), т. е. $\delta : 0,1$.

Зная экспериментальные значения B_{Λ} двух гиперядер и параметры нуклонной плотности их остовов, можно определить величины $\Omega_{\Lambda N}$ и $R_{\Lambda N}$. Для этой

цели были выбраны гиперядра ${}^5_{\Lambda}\text{He}$ и ${}^{13}_{\Lambda}\text{C}$, для которых надежно установлены как энергии связи B_{Λ} , так и плотности распределения нуклонов остова. Кроме того, ядра ${}^4\text{He}$ и ${}^{12}\text{C}$ наименее подвержены деформациям [2] и имеют нулевые спины, вследствие чего ни спиновые, ни тензорные компоненты ΔN -потенциала не могли бы давать вклада в B_{Λ} .

2. Оценка параметров ΔN потенциала в однородной модели

Предполагая тождественность распределения протонов и нейтронов в ядрах, плотность распределения ядерной материи в ядре с массовым числом A будем описывать функцией $\rho(r) = A\rho_0(r)$, где $\rho_0(r)$ нормирована на 1 нуклон:

$$\int \rho_0(r) d^3r = 4\pi \int_0^{\infty} \rho_0(r) r^2 dr = 1. \quad (5)$$

Как следует из опытов по рассеянию быстрых электронов на ядрах [5], данные экспериментов не очень чувствительны к выбору формы функции $\rho_0(r)$, а определяются, главным образом, среднеквадратичным радиусом ядра $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ ($\langle R^2 \rangle = \int \rho_0(r) r^2 d^3r$) или эквивалентным радиусом $R_0 = \sqrt{5/3} \langle R^2 \rangle^{1/2}$, равным радиусу шара, в котором нуклоны равномерно распределены по объему с плотностью $\rho = \frac{3A}{4\pi R_0^3}$ (однородная модель). Экспериментальные значения $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ и, следовательно, R_0 ядер-остовов соответствующих гиперядер указаны в таблице 1 [5].

Таблица 1 – Результаты численных расчетов параметров основного состояния гиперядер в однородной модели (экспериментальные значения $B_{\Lambda}^{\text{эксп.}}$, R_0 и μ взяты из работ [2] и [5])

Гиперядро	$B_{\Lambda}^{\text{эксп.}}$, МэВ	$B_{\Lambda}^{\text{теор.}}$, МэВ	$\langle R^2 \rangle^{1/2}$, Фм	R_0 , Фм	R_z , Фм	μ , МэВ
${}^5_{\Lambda}\text{He}$	3,12	4,32	1,6753	2,1628	2,299	858,666
${}^6_{\Lambda}\text{He}$	4,18				2,537	900,460
${}^7_{\Lambda}\text{Li}$	5,58	2,13	2,5432	3,2833	2,670	930,375
${}^7_{\Lambda}\text{Be}$	5,16				2,739	952,968
${}^8_{\Lambda}\text{He}$	7,16				2,753	953,209
${}^8_{\Lambda}\text{Li}$	6,80	4,20	2,4173	3,1207	2,787	952,960
${}^8_{\Lambda}\text{Be}$	6,84				2,783	952,968

Окончание таблицы 1

Гиперядро	$B_{\Lambda}^{\text{эксп}}$, МэВ	$B_{\Lambda}^{\text{теор}}$, МэВ	$\langle R^2 \rangle^{1/2}$, ФМ	R_0 , ФМ	R_g , ФМ	μ , МэВ
${}^9_{\Lambda}\text{Li}$	8,50	6,75	2,3270	3,0041	2,836	970,727
${}^9_{\Lambda}\text{Be}$	6,71				3,009	970,447
${}^9_{\Lambda}\text{B}$	8,29				2,854	970,743
${}^{10}_{\Lambda}\text{Be}$	9,11	6,33	2,5180	3,2507	2,962	984,773
${}^{11}_{\Lambda}\text{B}$	10,24	8,99	2,4277	3,1341	3,028	996,455
${}^{12}_{\Lambda}\text{B}$	11,37	11,07	2,4060	3,1061	3,084	1006,189
${}^{12}_{\Lambda}\text{C}$	10,76				3,130	1006,204
${}^{13}_{\Lambda}\text{C}$	11,69	11,69	2,4702	3,1890	3,189	1014,406
${}^{14}_{\Lambda}\text{C}$	12,17	13,54	2,4614	3,1777	3,273	1021,563
${}^{15}_{\Lambda}\text{N}$	13,59	13,30	2,5582	3,3026	3,283	1027,754
${}^{16}_{\Lambda}\text{O}$	12,50				3,467	1033,178
${}^{28}_{\Lambda}\text{Si}$	16,60				4,098	1068,257
${}^{32}_{\Lambda}\text{S}$	17,50				4,264	1074,142
${}^{40}_{\Lambda}\text{Ca}$	18,70	20,21	3,4595	4,4662	4,574	1082,406
${}^{51}_{\Lambda}\text{V}$	19,90				3,788	1089,028
${}^{89}_{\Lambda}\text{Y}$	22,00	27,84	4,2449	5,4801	4,952	1100,682
${}^{139}_{\Lambda}\text{La}$	23,80	30,51	4,8464	6,2567	5,963	1106,074
${}^{208}_{\Lambda}\text{Pb}$	26,50	32,23	5,4943	7,0931	6,874	1109,323

Так как радиус действия ΛN -сил меньше области действия NN -потенциала, по крайней мере, вдвое [1], то для упрощения задачи положим $R_{\Lambda N} = 0$. В этом случае ΛN -потенциал будет описываться единственным параметром – объемным интегралом $\Omega_{\Lambda N}$, а потенциал взаимодействия Λ -гиперона с нуклонным остовом в однородной модели примет вид прямоугольной ямы ширины R_0 и глубины $V_0 = \frac{3A\Omega_{\Lambda N}}{4\pi R_0^3}$:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & 0 \leq r \leq R_0 \\ 0, & r > R_0 \end{cases} \quad (6)$$

Тогда динамика движения Λ -частицы в гиперядре для s -состояния ($l = 0$) будет описываться радиальным уравнением Шредингера:

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} (B_{\Lambda} + V(r)) f(r) = 0, \quad (7)$$

где μ – приведенная масса Λ -остова, $f(r) = rR(r)$. Функция $f(r)$ удовлетворяет граничным условиям $f(0) = f(\infty) = 0$. Решая поставленную краевую задачу,

и сшивая решения на границе внутренней и внешней областей при $r = R_0$, получим дисперсионное уравнение, связывающее параметры задачи [6]:

$$\beta \cdot \operatorname{ctg} \beta R_0 + \gamma = 0, \quad (8)$$

где введены обозначения:

$$\beta^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}(V_0 - B_\Lambda); \quad \gamma^2 = \frac{2\mu B_\Lambda}{\hbar^2}. \quad (9)$$

Решая численно уравнение (8) для любого гиперядра, можно оценить значение объемного интеграла $\Omega_{\Lambda N}$ в предположении $R_{\Lambda N} = 0$. В частности, для гиперядра ${}^{13}_\Lambda C$ ($A = 12, B_\Lambda = 11,69 \text{ МэВ}, R_0 = 3,189 \text{ Фм}, \mu = 1014,406 \text{ МэВ}$) получаем $\Omega_{\Lambda N} = 253,24 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^3$. В случае использования в качестве опорного гиперядра ${}^5_\Lambda He$, получается близкое значение $\Omega_{\Lambda N} = 230,22 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^3$. Таким образом, в дальнейшем будем использовать следующие параметры ΛN -потенциала:

$$\Omega_{\Lambda N} = 253,24 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^3, \quad R_{\Lambda N} = 0. \quad (10)$$

3. Оценка энергий связи и размеров нуклонных остовов гиперядер в однородной модели

Для количественного определения указанных параметров обратимся к основному уравнению (8), в котором по известным параметрам ($\Omega_{\Lambda N}, A, \mu, R_0$) определяется $B_\Lambda^{\text{теор}}$, а также радиусы ядра-остова R_g для заданных значений $B_\Lambda^{\text{эксп}}$. Результаты численных расчетов приведены в таблице 1 и для иллюстрации изображены на рисунках 1 и 2. В таблице 1 свободные ячейки соответствуют ядрам, для которых отсутствуют экспериментальные данные о их размерах [5].

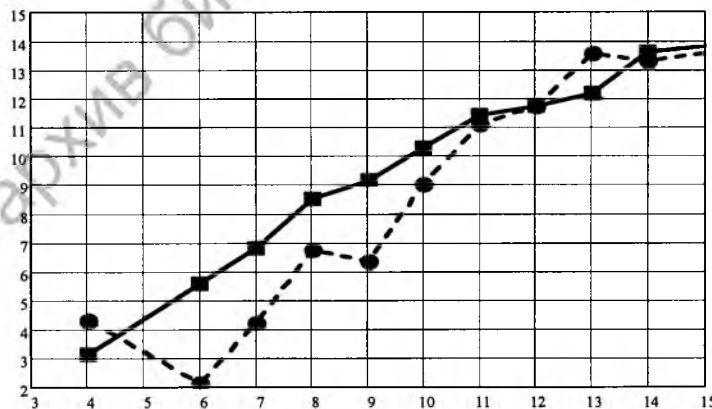


Рис. 1. Зависимость энергии связи гиперядер B_Λ (МэВ) от массового числа остова.

(Эксперимент – сплошная линия, теория – пунктирная линия)

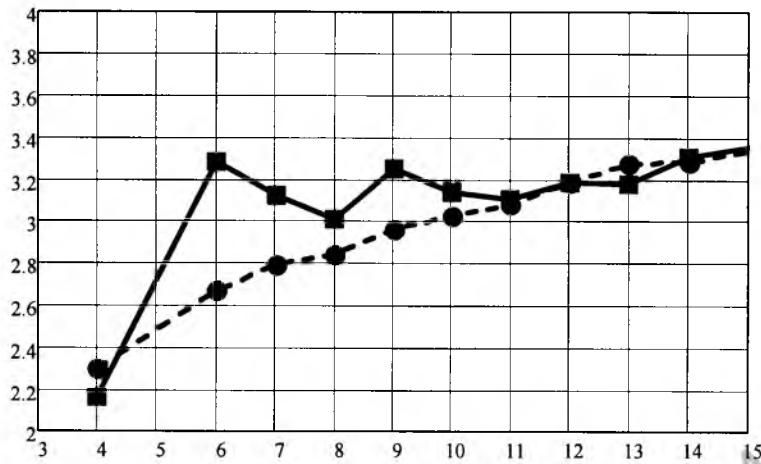


Рис. 2. Размеры нуклонного остова (Фм) из опытов по электронному рассеянию R_0 (сплошная линия) и гиперядер R_g (пунктирная линия)

Разумеется, в данной простейшей модели не следует ожидать удовлетворительного согласия теоретических оценок и экспериментальных данных по энергиям связи всех гиперядер B_Λ , а также размерам нуклонных остовов R_0 , кроме области вблизи опорного гиперядра ${}^{13}_\Lambda\text{C}$. В частности, если считать плотность бесконечной ядерной материи равной [5] $\rho_0 = 0,17 \text{ нуклон}/\text{Фм}^3$, то энергия насыщения гиперядер ($A \rightarrow \infty$) должна составлять величину порядка $D_\Lambda = \Omega_{\Lambda N} \cdot \rho_0 \approx 43 \text{ МэВ}$, что примерно на 10 МэВ превышает ожидаемый результат [1–3]. Из таблицы 1, например, видно, что указанное завышение энергии связи гиперядра ${}^{208}_\Lambda\text{Pb}$ составляет 5,7 МэВ (20%), однако, точность в определении R_0 составляет всего 3,5%. Этот результат можно объяснить, оценив зависимость вариации энергии связи гиперядра B_Λ от изменения радиуса ядра остова R_0 . Для количественного анализа этой зависимости удобно ввести *параметр дисперсии*: $D = dB_\Lambda/dR_0$, который можно оценить, применив процедуру численного дифференцирования неявно заданной функции из уравнения (8) [7]. При этом параметр дисперсии практически совпадает для различных гиперядер, например,

$$D({}^{13}_\Lambda\text{C}) = -13,4 \text{ МэВ}/\text{Фм}; \quad D({}^{208}_\Lambda\text{Pb}) = -11,4 \text{ МэВ}/\text{Фм}.$$

Таким образом, изменение энергии связи ΔB_Λ на 1 МэВ позволяет оценивать R_0 по указанной схеме с точностью $\Delta R_0 \approx 0,1 \text{ Фм}$.

Очевидно, с ростом массового числа A , в соответствии с условием (6), увеличивается как глубина, так и ширина ямы для потенциала $V_{\Lambda 0}$, так что в яме может находиться несколько дискретных уровней энергии, соответствующих возбужденным $n\pi$ состояниям гиперядер [8]. Определение таких состояний и величину их энергий можно также оценить из основного уравнения (8), сменив на-

чальные условия поиска соответствующих параметров. Результаты проведенных численных расчетов для основного ($1s$) и возбужденных состояний (ns) приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Энергии возбужденных состояний гиперядер

Гиперядро	$B_{\Lambda}(1s),$ МэВ	$B_{\Lambda}^*(2s),$ МэВ	$B_{\Lambda}^{**}(3s),$ МэВ
${}^{40}_{\Lambda}\text{Ca}$	20,21	3,27	
${}^{89}_{\Lambda}\text{Y}$	27,84	14,18	
${}^{139}_{\Lambda}\text{La}$	30,51	20,03	3,85
${}^{208}_{\Lambda}\text{Pb}$	32,23	23,81	10,29

Следует указать на возможность ошибочной интерпретации этих возбужденных состояний ($l = 0$), как состояния Λ -гиперона с не нулевыми орбитальными моментами ($l \neq 0$).

4. Низкоэнергетическое Λp -рассеяние

В низкоэнергетической области сечение рассеяния ядерных частиц обычно рассматривается в приближении эффективного радиуса путем введения длины рассеяния a и эффективного радиуса r_s [1], которые связаны с потенциалом $V_{\Lambda N}(r)$ условием [9]:

$$a = \frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^{R_0} V_{\Lambda N}(r) r^2 dr = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \Omega_{\Lambda N}; \quad (11)$$

$$r_s = \frac{4\hbar^2}{3\mu} \cdot \frac{R_{\Lambda N}^2}{\Omega_{\Lambda N}}. \quad (12)$$

Подставляя численные значения параметров Λp -потенциала (10) и приведенной массы $\mu_{\Lambda p} = 509,65 \text{ МэВ}$, получим:

$$a = -0,53 \text{ Фм}; \quad r_s = 0. \quad (13)$$

Полученная оценка (13), в целом, согласуется с экспериментальными результатами [10], не смотря на большой разброс опытных данных [1]. Как и ожидалось, отрицательное значение длины рассеяния говорит об отсутствии связанного ΛN -состояния в полном согласии с экспериментом.

Заключение

Простейшей задачей в квантовой механике является задача о движении частицы в прямоугольной яме. Эта задача может служить как предельный случай реалистических потенциалов, способной описывать некоторые общие характеристики квантовых систем. Естественно ожидать, что применение простой методики решения задачи о частицы в яме может быть полезной при каче-

ственном описании свойств гиперядер в двухчастичной модели, микроскопический анализ которых, как правило, требует проведения достаточно громоздких теоретических и численных расчетов в рамках нетривиальных, а иногда и спорных моделей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Хрылин, Б. А. Гиперядра и ΛN -взаимодействие / Б. А. Хрылин // Успехи физических наук. – 1971. – 105 т., вып. 2. – С. 185–205.
2. Калачей, С. А. Энергии связи гиперядер и взаимодействие ΛN и $\Lambda\Lambda$: дис. ... канд. физ-мат наук : 01.04.02 / С. А. Калачей. – Москва, 2005. – 119 л.
3. Ланской, Д. Е. Физика гиперядер / Д. Е. Ланской. – Web-версия учебного пособия, 2002.
4. Колесников, Н. Н. ΛN -потенциал из совместного анализа гиперядер и Λp -рассеяния / Н. Н. Колесников, С. М. Чернов // Ядерная физика. – 1976. – 23 т., вып. 5. – С. 960–969.
5. Варламов, В. В. Физика ядра и банки ядерных данных / В. В. Варламов [и др.]. – Москва : НИИЯФ МГУ, 2010. – 245 с.
6. Чернов, С. М. Квантовая механика : курс лекций / С. М. Чернов. – Могилев : МГУ им. А. А. Кулешова, 2013. – 196 с.
7. Шушкевич, Г. Ч. Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14 : учеб. пособие : в 2 ч. / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич. – Минск : Изд-во Гревцова, 2012. – Ч. 2. – 256 с.
8. Богданова, Л. Н. Возбужденные состояния гиперядер / Л. Н. Богданова, В. Е. Маркушкин // Физика элементарных частиц и атомного ядра (ЭЧАЯ). – 1984. – 15 т., вып. 4. – С. 808–869.
9. Бабиков, В. В. Метод фазовых функций в квантовой механике / В. В. Бабиков. – Москва, 1968. – 224 с.
10. Alexander, G. Study of the ΛN -System in Low-Energy Λp -Elastic Scattering / G. Alexander, U. Karshon, A. Shapira [et al.] // Phys. Rev. – 1968. – V. 173. – P. 1452–1460.

Поступила в редакцию 18.11.2015 г.

Контакты: stanislavchernof2011@yanlex.by (Чернов Станислав Михайлович)

Chernov S.M. THE ESTIMATION OF PARAMETERS OF HYPER-NUCLEI IN SIMPLE MODELS.

The qualitative analysis of Λ -hypernuclei in the framework of the two-particle model with zero-radius of ΛN -force is presented in the article. The value of the volume integral of ΛN -potential, the energy of the hypernucleus connection, the size of the nucleon frame and Λp -scattering length are assessed.

Key words: hypernuclei, ground and excited states, binding energy, nucleus size, scattering length, effective radius.