УДК 517.925.42

ПРИВЕДЕНИЕ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА К СПЕЦИАЛЬНОМУ ВИДУ. ЕСТЕСТВЕННЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН СИСТЕМЫ

Н. П. Морозов
кандидат физико-математических наук, доцент
МГУ имени А. А. Кулешова

В работе предложено специальное представление автономных систем на плоскости, основанное на понятии естественного гамильтониана системы. Естественный гамильтониан определяется по правым частям системы однозначно. Этим объясняется выбор названия. Выражение естественного гамильтониана через правые части системы составляет основной результат данной работы. Важным элементом в предложенном представлении системы является величина σ *, которая определяется дивергенцией векторного поля системы.*

Ключевые слова: автономная система, естественный гамильтониан, дивергенция, специальный вид.

1. Приведение системы к специальному виду. **Рассмотрим систему**

$$\dot{x} = P(x,y), \dot{y} = Q(x,y), \tag{1}$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемые функции на всей плоскости.

Теорема 1. Пусть функции $P,\ Q \in C^1_{R^2}$ и $O(0,0)$ является состоянием равновесия системы. Тогда система (1) представима единственным образом в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y) + x\overline{\sigma}(x,y), \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y) + y\overline{\sigma}(x,y) \end{cases} \tag{2}$$

где

$$H = \sin\varphi \int_0^\rho P(\tau\cos\varphi, \tau\sin\varphi)\,d\tau - \cos\varphi \int_0^\rho Q(\tau\cos\varphi, \tau\sin\varphi)d\tau, \tag{3}$$

$$\rho^2\overline{\sigma}(x,y) = \int_0^\rho \tau\sigma(\tau\cos\varphi, \tau\sin\varphi)\,d\tau, \tag{4}$$

$$\sigma(x,y) = div(P;Q), H(0,0) = 0, \overline{\sigma}(0,0) = \frac{\sigma(0,0)}{2}.$$

Доказательство. Пусть система представлена в виде (2). Покажем, что имеют место равенства (3) и (4). Положим

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) + x\overline{\sigma}(x,y) = P(x,y), -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) + y\overline{\sigma}(x,y) = Q(x,y), \tag{5}$$

Умножая первое равенство на y, а второе на x и вычитая из первого равенства второе, получим

$$y\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)+x\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)=yP(x,y)-xQ(x,y)$$

или в полярных координатах $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ имеем

$$\frac{\partial H}{\partial \rho}=\sin\varphi\,P(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)-\cos\varphi\,Q(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi).$$

Интегрируя это равенство по ρ, получим (3). Покажем теперь, что имеет место равенство (4). С этой целью продифференцируем первое из равенств (5) по x, а второе по y и сложим полученные равенства.

Будем иметь $x\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial x}+y\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial y}+2\,\overline{\sigma}=\sigma(x,y)$ или в полярных координатах $\frac{\partial(\rho^2\overline{\sigma})}{\partial\rho}=\rho\sigma(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$. Интегрируя это равенство по переменной ρ, получим (4). При этом положим

$$\overline{\sigma}(0{,}0)=\lim_{\rho\to 0}\frac{\int_0^\rho\tau\sigma(\tau\cos\varphi,\tau\sin\varphi)d\tau}{\rho^2}=\frac{\sigma(0{,}0)}{2}.$$

Пусть теперь дана система (1) и функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$. Определим H и $\overline{\sigma}$ равенствами (3) и (4), соответственно, и покажем, что при этом

$$P(x,y)=\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)+x\overline{\sigma}(x,y),\ Q(x,y)=-\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)+y\overline{\sigma}(x,y).$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial H}{\partial\rho}=\cos\varphi\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)+\sin\varphi\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)\tag{6}$$

и

$$\frac{\partial H}{\partial\varphi}=-\rho\sin\varphi\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)+\rho\cos\varphi\frac{\partial H}{\partial y}(x,y),\tag{7}$$

находим

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)=\cos\varphi\frac{\partial H}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\sin\varphi\frac{\partial H}{\partial\varphi},\ \frac{\partial H}{\partial y}(x,y)=\sin\varphi\frac{\partial H}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\cos\varphi\frac{\partial H}{\partial\varphi}.\tag{8}$$

Используя равенства (3) и (4) получим

$$\frac{\partial H}{\partial\varphi}+\rho^2\overline{\sigma}(x,y)=\cos\varphi\int_0^\rho P(\tau\cos\varphi,\tau\sin\varphi)\,d\tau+sin\,\varphi\int_0^\rho Q(\tau\cos\varphi,\tau\sin\varphi)d\tau$$

$$+\sin\varphi\int_0^\rho(-\tau\sin\varphi\frac{\partial P}{\partial x}+\tau\cos\varphi\frac{\partial P}{\partial y})d\tau-$$

$$\cos\varphi \int_0^\rho (-\tau\sin\varphi\frac{\partial Q}{\partial x} + \tau\cos\varphi\frac{\partial Q}{\partial y})\,d\tau + \int_0^\rho \tau(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y})d\tau =$$

[*умножим последнее слагаемое на* $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi$] =

$$= \cos\varphi \int_0^\rho P(\tau\cos\varphi\,,\tau\sin\varphi)\,d\tau + sin\,\varphi \int_0^\rho Q(\tau\cos\varphi\,,\tau\sin\varphi)d\tau +$$

$$\sin\varphi \int_0^\rho (-\tau\sin\varphi\frac{\partial P}{\partial x} + \tau\cos\varphi\frac{\partial P}{\partial y})d\tau -$$

$$\cos\varphi \int_0^\rho (-\tau\sin\varphi\frac{\partial Q}{\partial x} + \tau\cos\varphi\frac{\partial Q}{\partial y})\,d\tau +$$

$$+ \int_0^\rho (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\tau(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y})d\tau =$$

= [*сгруппируем слагаемые, содержащие частные производные P в одно слагаемое, а содержащие частные производные Q – в другое и представим каждое из них одним интегралом*] =

$$= \cos\varphi \int_0^\rho P(\tau\cos\varphi\,,\tau\sin\varphi)\,d\tau + sin\,\varphi \int_0^\rho Q(\tau\cos\varphi\,,\tau\sin\varphi)d\tau +$$

$$+ \int_0^\rho (\tau\cos^2\varphi\frac{\partial P}{\partial x} + \tau\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial P}{\partial y})d\tau + \int_0^\rho (\tau\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial Q}{\partial x} + \tau\sin^2\varphi\frac{\partial Q}{\partial y})\,d\tau =$$

$$= \cos\varphi \int_0^\rho P(\tau\cos\varphi\,,\tau\sin\varphi)\,d\tau + \int_0^\rho Q(\tau\cos\varphi\,,\tau\sin\varphi)d\tau +$$

$$+ \cos\varphi \int_0^\rho \tau(\cos\varphi\frac{\partial P}{\partial x} + sin\,\varphi\frac{\partial P}{\partial y})d\tau + \sin\varphi\,\tau \int_0^\rho \tau(cos\,\varphi\frac{\partial Q}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial Q}{\partial y})d\tau =$$

[*учтем, что*

$\cos\varphi\frac{\partial P}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P(\tau\cos\varphi,\tau\sin\varphi)}{\partial\tau}$ *и* $\cos\varphi\frac{\partial Q}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q(\tau\cos\varphi,\tau\sin\varphi)}{\partial\tau}$] =

$$= \cos\varphi \int_0^\rho P(\tau\cos\varphi, \tau\sin\varphi)\, d\tau + \int_0^\rho Q(\tau\cos\varphi, \tau\sin\varphi) d\tau +$$

$$\cos\varphi \int_0^\rho \tau \frac{\partial P(\tau\cos\varphi, \tau\sin\varphi)}{\partial\tau} d\tau + \sin\varphi\, \tau \int_0^\rho \tau \frac{\partial Q(\tau\cos\varphi, \tau\sin\varphi)}{\partial\tau} d\tau =$$

= [*вычисляя два последних интеграла по частям, окончательно получим*] =

$$xP(x,y) + yQ(x,y).$$

Итак,

$$\frac{\partial H}{\partial\varphi} + \rho^2\overline{\sigma}(x,y) = \rho\cos\varphi\, P(x,y) + \rho\sin\varphi\, Q(x,y).$$

Дифференцируя равенство (3) по переменной ρ, имеем

$$\frac{\partial H}{\partial\rho} = \sin\varphi\, P(x,y) - \cos\varphi\, Q(x,y).$$

Из этих двух равенств находим:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H}{\partial\varphi}\cos\varphi + \frac{\partial H}{\partial\rho}\sin\varphi + \cos\varphi\, \rho\overline{\sigma}(x,y) = P(x,y) \text{ и}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H}{\partial\varphi}\sin\varphi - \frac{\partial H}{\partial\rho}\cos\varphi + \sin\varphi\, \rho\overline{\sigma}(x,y) = Q(x,y).$$

С учетом соотношений (8) окончательно получим

$$P(x,y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) + x\overline{\sigma}(x,y),\ Q(x,y) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) + y\overline{\sigma}(x,y).$$

Поскольку H определяется по правым частям системы (1) однозначно (с точностью до постоянного слагаемого), будем называть ***H естественным гамильтонианом*** для системы (1).

Лемма 1. В результате линейных невырожденных преобразований

$$x = \alpha u + \beta v,\ y = \gamma u + \delta v,\ \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

система (2) приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{u} = \dfrac{\partial\overline{H}}{\partial v}(u,v) + x\overline{\sigma}(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v), \\ \dot{v} = -\dfrac{\partial\overline{H}}{\partial u}(u,v) + y\overline{\sigma}(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v), \end{cases}$$

где $\overline{H}(u,v) = \dfrac{1}{\Delta}H(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$, т. е. вид системы инвариантен относительно линейных невырожденных преобразований.

Доказательство.

$$\alpha\dot{u} + \beta\dot{v} = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) + x\bar{\sigma}(x,y), \tag{9}$$

$$\gamma\dot{u} + \delta\dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) + y\bar{\sigma}(x,y).$$

Учитывая, что $\frac{\partial H}{\partial u} = \alpha\frac{\partial H}{\partial x} + \gamma\frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial v} = \beta\frac{\partial H}{\partial x} + \delta\frac{\partial H}{\partial y}$, находим

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{\Delta}(\delta\frac{\partial H}{\partial u} - \gamma\frac{\partial H}{\partial v}),\ \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{\Delta}(-\beta\frac{\partial H}{\partial u} + \alpha\frac{\partial H}{\partial v}) \text{ или } \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_u \\ H_v \end{pmatrix}.$$

С учетом этого равенства (9) в матричном виде примут вид $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_u \\ H_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\bar{\sigma}(x,y)$. Отсюда находим

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta^2}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_u \\ H_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\bar{\sigma}(x,y).$$

Окончательно имеем

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{H}_u \\ \bar{H}_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\bar{\sigma}(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v). \tag{10}$$

Здесь $\bar{H}(u,v) = \frac{1}{\Delta}H(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$.

Пусть система (1) представлена в виде (2). Введем следующие обозначения

$$L = \left\{(x.y) \in \mathbb{R}^2 \left| \frac{\partial H}{\partial \rho} = \cos\varphi\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) + \sin\varphi\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = 0\right.\right\},$$

$$D_+ = \left\{(x.y) \in \mathbb{R}^2 \left| \frac{\partial H}{\partial \rho} > 0\right.\right\}, D_- = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \left| \frac{\partial H}{\partial \rho} < 0\right.\right\},$$

где ρ и φ полярные координаты точки $M(x,y)$, $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$.

***Следствие* 1.** Если состояние равновесия системы (2) $O(0,0)$ является изолированной точкой множества L, то гамильтониан $H(x,y)$ в проколотой окрестности точки $O(0,0)$ является положительно (или отрицательно) определенной функцией Ляпунова. Если при этом $\bar{\sigma}(0,0) = \frac{\sigma(0,0)}{2} < 0$, то состояние равновесия $O(0,0)$ является асимптотически устойчивым, а при $\frac{\sigma(0,0)}{2} > 0$ неустойчивым.

Действительно. Производная гамильтониана $H(x,y)$ в силу системы (2)

$$\frac{dH}{dt} = \rho\bar{\sigma}(x,y)\frac{\partial H}{\partial \rho}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi).$$

Так как $H(0, 0) = 0$, то в указанной окрестности $H\dfrac{\partial H}{\partial\rho} > 0$. Тогда при $\dfrac{\sigma(0,0)}{2} < 0$ имеем $H\dfrac{dH}{dt} < 0$ или соответственно $H\dfrac{dH}{dt} > 0$ при $\dfrac{\sigma(0,0)}{2} > 0$.

***Следствие* 2.** Пусть состояние равновесия системы (2) $O(0, 0)$ является изолированной точкой множества L и принадлежит границе области D_+. Тогда В области D_+ система (2) в обобщенных полярных координатах R, φ, где $R = \sqrt{2H}$ приводится к уравнению

$$R\frac{dR}{d\varphi} = -\rho^2\overline{\sigma}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi),$$

где ρ однозначно выражается через R, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ из равенства $R = \sqrt{2H(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)}$ (*т. е.* $\rho = f(R, \cos\varphi, \sin\varphi)$).

Действительно. Для гамильтоновой системы состояние равновесия $O(0, 0)$ является центром и в области центра гамильтониан H положительно определенная функция. Введем в этой области обобщенные полярные координаты R, φ, где $R = \sqrt{2H}$.Тогда система (2) в этих координатах принимает вид:

$$R\dot{R} = \rho\overline{\sigma}((\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\frac{\partial H}{\partial\rho}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi),$$

$$\rho^2\dot{\varphi} = -\rho\frac{\partial H}{\partial\rho}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi).$$

Так как $\dfrac{\partial H}{\partial\rho}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) > 0$ в области D_+, то равенство $R = \sqrt{2H(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)}$ однозначно разрешимо относительно ρ, т. е. $\rho = f(R, \cos\varphi, \sin\varphi)$.

Отметим еще очевидные и полезные в некторых случаях факты.

***Следствие* 3.** 1) Все состояния равновесия полной системы (2) и соответствующей ей гамильтоновой системы расположены (*в конечной части плоскости*) в множестве L.

2) Состояние равновесия $O_1(x_0, y_0)$ полной и гамильтоновой систем (*отличное от* $O(0, 0)$) совпадают тогда и только тогда, когда $\overline{\sigma}(x_0, y_0) = 0$.

2. Случай полиномиальной системы.

Случай полиномиальной системы рассмотрен автором ранее (см. [6]) с использованием иного подхода. Подмеченные там закономерности и позволили перенести полученный там результат на общий случай в данной статье. Для полиномиальной системы гамильтониан $H(x, y)$ и величина $\overline{\sigma}(x, y)$ имеют явное представление через коэффициенты многочленов исходной системы.

Пусть в системе (1) $P(x, y)$, $Q(x, y)$ многочлены наибольшей степени n и $M_0(x_0, y_0)$ произвольная точка. Представим $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в виде многочленов Тейлора по степеням $x - x_0$ и $y - y_0$:

$$P(x,y)=P(x_0,y_0)+\sum_{m=1}^{n}P_k(x,y), Q(x,y)=Q(x_0,y_0)+\sum_{m=1}^{n}Q_k(x,y), n\geq 1,$$

$$P_k(x,y)=\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k}C_k^m a_{k-mm}(x-x_0)^{k-m}(y-y_0)^m,$$

$$Q_k(x,y)=\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k}C_k^m b_{k-mm}(x-x_0)^{k-m}(y-y_0)^m,$$

где $a_{k-m\ m}=\frac{\partial^k P(x_0,y_0)}{\partial x^{k-m}\partial y^m}$, $b_{k-m\ m}=\frac{\partial^k Q(x_0,y_0)}{\partial x^{k-m}\partial y^m}$.

Заменяя $u=x-x_0\to x$, $v=y-y_0\to y$ окончательно получим

$$\dot{x}=P(x_0,y_0)+\sum_{k=1}^{n}P_k(x,y), \dot{y}=Q(x_0,y_0)+\sum_{k=1}^{n}Q_k(x,y), \qquad (11)$$

где $P_k(x,y)=\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k}C_k^m a_{k-mm}x^{k-m}y^m$, $Q_k(x,y)=\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k}C_k^m b_{k-mm}x^{k-m}y^m$.

Теорема 2. В представлении полиномиальной системы (11) в виде (2) $\bar{\sigma}(x,y)$ и естественный гамильтониан соответственно имеют вид

$$\bar{\sigma}(x,y)=\sum_{k=1}^{n-1}\bar{\sigma}_{k-1}(x,y), \bar{\sigma}_{k-1}(x,y)=\frac{k}{(k+1)!}\sum_{m=1}^{k}C_{k-1}^{m-1}\sigma_{k-m\ m-1}x^{k-m}y^{m-1},$$

$$H(x,y)=yP(x_0,y_0)-xQ(x_0,y_0)+\sum_{k=1}^{n}H_{k+1}(x,y),$$

$$H_{k+1}(x,y)=\frac{1}{(k+1)!}\left(a_{0k}y^{k+1}-b_{k0}x^{k+1}+\sum_{m=1}^{k}C_k^{m-1}\frac{\mu_{k-m\ m-1}}{m}x^{k-m+1}y^m\right),$$

где

$$\mu_{k-m\,m-1}=ma_{k-m+1\,m-1}-(k-m+1)\ b_{k-mm},$$

$$\sigma_{k-m\ m-1}=a_{k-m+1\ m-1}+b_{k-m,\ m},\ k=\overline{1,n},\ m=\overline{1,k}.$$

Доказательство. Используя равенство (3), находим:

$$H_{k+1}(x,y)=\frac{\rho^{k+1}}{(k+1)!}\Big(\sum_{m=0}^{k}C_k^m a_{k-mm}\cos^{k-m}\varphi\sin^{m+1}\varphi-$$

$$-\sum_{m=0}^{k}C_k^m b_{k-mm}\cos^{k-m+1}\varphi\sin^m\varphi\Big)=\frac{1}{(k+1)!}(a_{0k}y^{k+1}-b_{k0}x^{k+1}+$$

$$+\rho^{k+1}\sum_{m=1}^{k}C_k^{m-1}a_{k-m+1m-1}\cos^{k-m+1}\varphi\sin^m\varphi-$$

$$-\rho^{k+1}\sum_{m=1}^{k} C_k^m b_{k-mm}\cos^{k-m+1}\varphi\,\sin^m\varphi) =$$

$$=\frac{1}{(k+1)!}\left(a_{0k}y^{k+1} - b_{k0}x^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} C_k^{m-1}\frac{\mu_{k-m\,m-1}}{m}x^{k-m+1}y^m\right).$$

Из соотношения (4) имеем:

$$\sigma_{k-1}(x,y) = \left(\frac{\partial P_k(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Q_k(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k-1} C_k^m (k-m)a_{k-mm}x^{k-m-1}y^m +$$

$$+\frac{1}{k!}\sum_{m=1}^{k} C_k^m m b_{k-mm}x^{k-m}y^{m-1} = \frac{1}{k!}\sum_{m=1}^{k} C_k^{m-1}(k-m+1)a_{k-m+1m-1}x^{k-m}y^{m-1} +$$

$$+\frac{1}{k!}\sum_{m=1}^{k} C_k^m m b_{k-mm}x^{k-m}y^{m-1} = \frac{1}{(k-1)!}\sum_{m=1}^{k} C_{k-1}^{m-1}(a_{k-m+1m-1} + b_{k-mm})x^{k-m}y^{m-1} =$$

$$=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{m=1}^{k} C_{k-1}^{m-1}\,\sigma_{k-m\,m-1}\,x^{k-m}y^{m-1}\ .\ \text{Итак,}$$

$$\sigma_{k-1}(x,y) = \frac{1}{(k-1)!}\sum_{m=1}^{k} C_{k-1}^{m-1}\sigma_{k-m\,m-1}\,x^{k-m}y^{m-1}$$

$$\sigma_{k-m\,m-1} = a_{k-m+1m-1} + b_{k-mm}.$$

Умножив $\sigma_{k-1}(x,y)$ на ρ, окончательно находим

$$\overline{\sigma}_{k-1}(x,y) = \frac{k}{(k+1)!}\sum_{m=1}^{k} C_{k-1}^{m-1}\,\sigma_{k-m\,m-1}\,x^{k-m}y^{m-1}.$$

Замечание 1. В дальнейшем будем предполагать, что $M_0(x_0, y_0)$ есть состояние равновесия исходной системы. В этом случае у гамильтониана линейная часть отсутствует.

Замечание 2. Коэффициенты гамильтониана $\mu_{k-m\,m-1}$ и коэффициенты $\sigma_{k-m\,m-1}$ величины $\overline{\sigma}_{k-1}(x,y)$ выражаются линейно через одну и ту же пару $a_{k-m+1\ m-1}$, $b_{k-m,\ m}$ коэффициентов исходной системы с определителем $k+1 \neq 0$. Поэтому можем считать, что коэффициенты $\mu_{k-m\,m-1}$ и $\sigma_{k-m\,m-1}$ изменяются независимо друг от друга, если коэффициенты исходной системы $a_{k-m+1\ m-1}$, $b_{k-m,\ m}$ не зависят друг от друга.

Замечание 3. Свойство инвариантности вида системы (2) относительно линейных преобразований оказывается полезным при практическом использовании таких преобразований. Для этого достаточно, например, преобразовать гамильтониан (*или его части*) к некоторому упрощенному виду по формуле $\overline{H}(u,v)=\frac{1}{\Delta}H(\alpha u+\beta v,\gamma u+\delta v)$ и воспользоваться соотношениями (10).

Замечание 4. К линейным преобразованиям прибегают для приведения линейной части системы к некоторому каноническому виду (*например, матрицы линейного приближения к жордановой форме*) или для получения иных упрощений. Проиллюстрируем этот прием на примере полиномиальной системы.

3. Приведение квадратичной части гамильтониана к канонической форме.

Квадратичная часть гамильтониана имеет вид

$$H_2(x,y)=\frac{1}{2}\left(-b_{10}x^2+\mu_{00}xy+a_{01}y^2\right).$$

В зависимости от знака $\Delta_h=-\frac{1}{4}\mu_{00}^2-a_{01}b_{10}$, будем рассматривать три канонические формы $H_2(x,y)$ после преобразования

$$H_2(u,v)=\frac{a}{2}(u^2-sv^2),\text{ где } s=sign\Delta_h a\neq 0,\ s\in\{1;-1;0\}.$$

Лемма 2. 1) Если $\Delta_h\neq 0$ $(s=\pm 1)$, то линейным преобразованием

$$x=\alpha u+k\left(\frac{\mu_{00}}{2}\alpha+a_{01}\gamma\right)v,\ y=\gamma u+k\left(b_{10}\alpha-\frac{\mu_{00}}{2}\gamma\right)v, \tag{12}$$

H_2 приводится к канонической форме $H_2(u,v)=-\frac{1}{2k}(u^2-sv^2)$, где $k=\pm\frac{1}{\sqrt{|\Delta_h|}}$ и определитель преобразования $\Delta=-2kH_2(\alpha,\gamma)$ отличен от нуля при любых α и γ таких, что $H_2(\alpha,\gamma)\neq 0$.

2) Если $\Delta_h=0$ $(s=0)$, то линейным преобразованием

$$x=\alpha u+ap(\alpha,\gamma)\sqrt{|a_{01}|}v,\ y=\gamma u+as_2s_1p(\alpha,\gamma)\sqrt{|b_{10}|}v$$

гамильтониан $H_2(x,y)=-\frac{s_1}{2}p^2(x,y)$ приводится к виду $H_2(u,v)=\frac{a}{2}u^2$, где $s_1=sign\,b_{10}$, если $b_{10}\neq 0$, или $s_1=-sign\,a_{01}$, если $a_{01}\neq 0$; $s_2=sign\,\mu_{00}=sign\,(a_{10}-b_{01})$, $p(x,y)=s_2\sqrt{|b_{10}|}x-s_1\sqrt{|a_{01}|}y$.

Определитель преобразования $\Delta=-2aH_2(\alpha,\gamma)\neq 0$ при любых α, γ, для которых $H_2(\alpha,\gamma)\neq 0$ и $a\neq 0$.

Подробное доказательство леммы имеется в [7].

Замечание 1. Приведение квадратичной части гамильтониана к указанной канонической форме равносильно приведению матрицы линейного приближения

$$A=\begin{pmatrix}a_{10} & a_{01}\\ b_{10} & b_{01}\end{pmatrix}$$

исходной системы (1) линейным преобразованием, указанным в лемме, к виду

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{00}}{2} & s\omega \\ -\omega & \frac{\sigma_{00}}{2} \end{pmatrix}, \text{ если } s = sign\Delta_h = \pm 1,\ \omega = \sqrt{|\Delta_h|},\ k = -\frac{1}{\sqrt{|\Delta_h|}}$$

или $J = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{00}}{2} & 0 \\ a & \frac{\sigma_{00}}{2} \end{pmatrix}$ при $s = 0,\ a \neq 0$. Матрица J отличается от жордановой формы матрицы только в случае действительных корней характеристического уравнения.

Замечание 2. Если состояние равновесия гамильтоновой системы является центром ($s = 1$), то квадратичная часть гамильтониана после приведения ее к каноническому виду не изменяется при преобразованиях поворота. Поэтому эти преобразования можно использовать для внесения дополнительных изменений в систему, не меняя квадратичной части гамильтониана.

Если же состояние равновесия гамильтоновой системы является седлом ($s = -1$), то квадратичная часть гамильтониана после приведения к каноническому виду, не изменяется при преобразованиях гиперболического поворота с матрицей преобразования

$$B = \begin{pmatrix} ch\,\theta & sh\,\theta \\ sh\,\theta & ch\,\theta \end{pmatrix}.$$

Замечание 3. В случае полиномиальной системы n-й степени гамильтониан $\overline{H}(u,v)$ может быть многочленом степени k, где $2 \leq k \leq n+1$. При этом если $k < n+1$, то $\overline{\sigma}(u,v)$ имеет высшую степень $n-1$. Если же гамильтониан $\overline{H}(u,v)$ имеет высшую степень $n+1$, то $\overline{\sigma}(u,v)$ может иметь степень k, где $0 \leq k \leq n-1$.

Замечание 4. С помощью семейства линейных преобразований (12), приводящих квадратичную часть гамильтониана к канонической форме при $\Delta_h \neq 0$, в систему вносится дополнительно два произвольных параметра a и g. Это позволяет с помощью подходящего выбора этих параметров с соблюдением условия $H_2(\alpha,\gamma) \neq 0$ добиться определенных упрощений в системе после преобразования.

Обратим внимание еще на следующий смысл этих параметров. Если $u = u(t,\alpha,\gamma), v = v(t,\alpha,\gamma)$ есть решение задачи Коши $u(0,\alpha,\gamma) = 1$, $v(0,\alpha,\gamma) = 0$ для преобразованной системы, то для исходной системы (11) в соответствии с равенствами (12) имеем: $x(0) = \alpha$, $y(0) = \gamma$. Считая параметры исходной системы фиксированными (*или, например, все коэффициенты числовые*), после преобразования получим систему с двумя параметрами, причем роль параметров выполняют начальные данные решений исходной системы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Андронов, А. А.*** Качественная теория динамических систем второго порядка / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. – М. : Наука, 1966. – 568 с.
2. ***Андронов, А. А.*** Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г Майер. – М. : Наука, 1967. – 587 с.
3. ***Баутин, Н. Н.*** Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. – М. : Наука, 1978. – 496 с.
4. ***Ван, Д.*** Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости / Д. Ван, Ч. Ли, Ш.-Н. Чоу. – М. : МЦНМО, 2005. – 415 с.
5. ***Черкас, Л. А.*** Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход) / Л. А.Черкас, А. А. Гринь, В. М. Булгаков. – Гродно : ГрГУ им. Я. Купалы, 2013. – 489 с.
6. ***Морозов, Н. П.*** О приведении полиномиальных систем к специальному виду / Н. П. Морозов // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2011. – № 2(38). – С. 43–49.
7. ***Марченко, И. В.*** Об одном подходе к изучению линейных стационарных систем на плоскости / И. В. Марченко, Н. П. Морозов // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2011. – № 2(46). С. 23–31.

Поступила в редакцию 04.01.2016 г.

Контакты: morozovnp@tut.by (Морозов Николай Порфирьевич)

Morozov N.P. FINALIZING AUTONOMOUS SYSTEMS OF THE SECOND ORDER TO SPECIAL TYPE. NATURAL HUMILTONIAN OF THE SYSTEM.

Special presentation of the autonomous systems on plane based on the concept of the system natural humiltonian is provided. The natural humiltonian is unambiguously defined in accordance with the right parts of the system, hence the name. The expression of the natural humiltonian via the right parts of the system presents the major result of the research. The value $\overline{\sigma}$ serves as an important element in the suggested presentation of the system and is defined by the divergence of the system vector field.

Key words: automomous system, natural Hamiltonian, divergence, special type.