МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 512.548

О l-АРНОЙ ОПЕРАЦИИ $[\,]_{l,T,J}$

А. М. Гальмак
доктор физико-математических наук, доцент
Могилевский государственный университет продовольствия

В статье доказываются анонсированные автором ранее результаты об l-арной операции $[\,]_{l,T,J}$, которая определяется для любого целого $l \geq 2$, любого непустого множества J и любой полугруппы A на декартовом произведении $T \times A^J$, где T – подмножество симметрической группы $\mathbf{S}_J$ всех биекций множества J на себя, A^J – множество всех функций с областью определения J и со значениями в полугруппе A.

Ключевые слова: l-арная операция, абелева l-арная операция, группоид.

1. Введение

Данная статья является продолжением статьи [1], в которой впервые было дано определение l-арной операции $[\,]_{l,T,J}$. Частными случаями этой l-арной операции являются изучавшиеся ранее автором l-арные операции $[\,]_{l,\sigma,k}$ [2], $[\,]_{l,\sigma,J}$ [3] и $[\,]_{l,T,k}$ [4]. В свою очередь, частными случаями l-арной операции $[\,]_{l,\sigma,k}$ являются две полиадические операции Э. Поста, которые он определил [5] на упорядоченных наборах подстановок и упорядоченных наборах матриц соответственно. В указанной выше статье [1], ввиду ограниченности ее объема, для некоторых результатов были приведены только их формулировки без доказательств. В данной статье приводятся соответствующие доказательства.

Мы предполагаем известными определения l-арной полугруппы, l-арной группы, абелевой l-арной операции и косого элемента l-арной группы.

2. Операция $[\,]_{l,\mathbf{S}_J,J}$

Пусть A – группоид, J – произвольное непустое множество, σ – подстановка из $\mathbf{S}_J$. Определим на A^J бинарную операцию $\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y}$, полагая

$$(\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(\sigma(j)),\ j \in J.$$

Далее для любого целого $l \geq 2$, любого непустого множества J и любого группоида A определим на множестве

$$\mathbf{S}_J \times A^J = \{(\sigma, \mathbf{a}) \mid \sigma \in \mathbf{S}_J,\ \mathbf{a} \in A^J\}$$

l-арную операцию $[\,]_{l,\mathbf{S}_J,J}$ следующим образом:

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l, \mathbf{S}_J, J} = (\sigma, \mathbf{y}), \tag{2.1}$$

где

$$\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_l, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma_1}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma_2}{\circ} (\dots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma_{l-2}}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma_{l-1}}{\circ} \mathbf{x}_l)) \dots)). \tag{2.3}$$

Умножение подстановок в правой части (2.2) осуществляется по правилу $\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_l(j) = \sigma_l(\dots\sigma_2(\sigma_1(j))\dots)$.

Теорема 2.1. [1]. *Функция* $\mathbf{y}$, *определяемая равенством* (2.3), *принимает в каждой точке* $j \in J$ *значение*

$$\mathbf{y}(j) = \mathbf{x}_1(j)(\mathbf{x}_2(\sigma_1(j))(\dots (\mathbf{x}_{l-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(j))) \dots)).$$

Операция $[\,]_{l, \mathbf{S}_k, k}$. Если в определении операции $[\,]_{l, \mathbf{S}_k, k}$ положить $J = \{1, 2, \dots, k\}$, где $k \geq 2$, то на множестве $\mathbf{S}_k \times A^k$ определена l-арная операция $[\,]_{l, \mathbf{S}_k, k}$ по правилу:

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l, \mathbf{S}_k, k} = (\sigma, \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k))$$

для любых

$$(\sigma_i, \mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik})) \in \mathbf{S}_k \times A^k, i = 1, \dots, l,$$

где $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_l$, а все компоненты y_j определяются, согласно теореме 2.1, формулой

$$y_j = x_{1j}(x_{2\sigma_1(j)}(\dots (x_{(l-1)\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(j)} x_{l\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(j)}) \dots)), j = 1, 2, \dots, k.$$

Заметим, что для полугруппы A операция $[\,]_{l, \mathbf{S}_k, k}$ определена в [4].

Операция $[\,]_{l, \mathbf{S}_\mathrm{N}, \mathrm{N}}$. Если в определении операции $[\,]_{l, \mathbf{S}_J, J}$ положить $J = \mathrm{N}$, то на множестве $\mathbf{S}_\mathrm{N} \times A^\mathrm{N}$ определена l-арная операция $[\,]_{l, \mathbf{S}_\mathrm{N}, \mathrm{N}}$ по правилу:

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l, \mathbf{S}_\mathrm{N}, \mathrm{N}} = (\sigma, \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots))$$

для любых

$$(\sigma_i, \mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}, \dots)) \in \mathbf{S}_\mathrm{N} \times A^\mathrm{N}, i = 1, \dots, l,$$

где $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_l$, а все компоненты y_j определяются, согласно теореме 2.1, формулой

$$y_j = x_{1j}(x_{2\sigma_1(j)}(\dots (x_{(l-1)\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(j)} x_{l\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(j)}) \dots)), j \in \mathrm{N}.$$

Операция $[\,]_{l, \mathbf{S}_\mathrm{Z}, \mathrm{Z}}$. Если в определении операции $[\,]_{l, \mathbf{S}_J, J}$ положить $J = \mathrm{Z}$, то на множестве $\mathbf{S}_\mathrm{Z} \times A^\mathrm{Z}$ определена l-арная операция $[\,]_{l, \mathbf{S}_\mathrm{Z}, \mathrm{Z}}$ по правилу:

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l, \mathbf{S}_\mathrm{Z}, \mathrm{Z}} = (\sigma, \mathbf{y} = (\dots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots))$$

для любых

$$(\sigma_i, \mathbf{x}_i = (\dots, x_{i(-2)}, x_{i(-1)}, x_{i0}, x_{i1}, x_{i2}, \dots)) \in \mathbf{S}_\mathrm{Z} \times A^\mathrm{Z}, i = 1, \dots, l,$$

где $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_l$, а все компоненты y_j определяются, согласно теореме 2.1, формулой

$$y_j = x_{1j}(x_{2\sigma_1(j)}(\ldots (x_{(l-1)\sigma_1 \ldots \sigma_{l-2}(j)} x_{l\sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}(j)}) \ldots)), j \in \mathrm{Z}.$$

Предложение 2.1. [1]. *Если A – полугруппа, то для любого $m \geq 2$, всех i и l таких, что $1 \leq i + 1 \leq i + l \leq m$ и любых*

$$\mathbf{u}_1 = (\sigma_1, \mathbf{x}_1), \ldots, \mathbf{u}_m = (\sigma_m, \mathbf{x}_m) \in \mathbf{S}_J \times A^J$$

верно равенство

$$[\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_m]_{m, \mathbf{S}_J, J} = [\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_i[\mathbf{u}_{i+1} \ldots \mathbf{u}_{i+l}]_{l, \mathbf{S}_J, J} \mathbf{u}_{i+l+1} \ldots \mathbf{u}_m]_{m-l+1, \mathbf{S}_J, J}.$$

Доказательство. Положим

$$[\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_m]_{m, \mathbf{S}_J, J} = (\alpha, \mathbf{b}) = \mathbf{p}, \ [\mathbf{u}_{i+1} \ldots \mathbf{u}_{i+l}]_{l, \mathbf{S}_J, J} = (\beta, \mathbf{c}) = \mathbf{q},$$

$$[\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_i[\mathbf{u}_{i+1} \ldots \mathbf{u}_{i+l}]_{l, \mathbf{S}_J, J} \mathbf{u}_{i+l+1} \ldots \mathbf{u}_m]_{m-l+1, \mathbf{S}_J, J} = (\gamma, \mathbf{d}) = \mathbf{r}.$$

Так как

$$\alpha = \sigma_1, \ldots, \sigma_m, \ \beta = \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{i+l},$$

$$\gamma = \sigma_1 \ldots \sigma_i \beta \sigma_{i+l+1} \ldots \sigma_m = \sigma_1 \ldots \sigma_i(\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{i+l})\sigma_{i+l+1} \ldots \sigma_m = \sigma_1 \ldots \sigma_m,$$

то

$$\alpha = \gamma. \tag{2.4}$$

Ясно, что

$$\mathbf{b}(j) = \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma_1(j))\mathbf{x}_3(\sigma_1\sigma_2(j)) \ldots \mathbf{x}_m(\sigma_1 \ldots \sigma_{m-1}(j)), \tag{2.5}$$

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}_{i+1}(t)\mathbf{x}_{i+2}(\sigma_{i+1}(t))\mathbf{x}_{i+3}(\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}(t)) \ldots \mathbf{x}_{i+l}(\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{i+l-1}(t)) \tag{2.6}$$

для любых $j, t \in J$.

Полагая в (2.6) $t = \sigma_1 \ldots \sigma_i(j)$ и учитывая равенство $\beta = \sigma_{i+1} \ldots \sigma_{i+l}$, получим

$$\mathbf{d}(j) = \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma_1(j))\mathbf{x}_3(\sigma_1\sigma_2(j)) \ldots \mathbf{x}_i(\sigma_1 \ldots \sigma_{i-1}(j))\mathbf{c}(\sigma_1 \ldots \sigma_i(j))$$

$$\mathbf{x}_{i+l+1}(\sigma_1 \ldots \sigma_i\beta(j)) \ldots \mathbf{x}_m(\sigma_1 \ldots \sigma_i\beta\sigma_{i+l+1} \ldots \sigma_{m-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma_1(j))\mathbf{x}_3(\sigma_1\sigma_2(j)) \ldots \mathbf{x}_i(\sigma_1 \ldots \sigma_{i-1}(j))\mathbf{x}_{i+1}(\sigma_1 \ldots \sigma_i(j))$$

$$\mathbf{x}_{i+2}(\sigma_{i+1}(\sigma_1 \ldots \sigma_i(j))) \ldots \mathbf{x}_{i+l}(\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{i+l-1}(\sigma_1 \ldots \sigma_i(j)))$$

$$\mathbf{x}_{i+l+1}(\sigma_1 \ldots \sigma_i\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{i+l}(j)) \ldots \mathbf{x}_m(\sigma_1 \ldots \sigma_i\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{i+l}\sigma_{i+l+1} \ldots \sigma_{m-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma_1(j))\mathbf{x}_3(\sigma_1\sigma_2(j)) \ldots \mathbf{x}_i(\sigma_1 \ldots \sigma_{i-1}(j))\mathbf{x}_{i+1}(\sigma_1 \ldots \sigma_i(j))$$

$$\mathbf{x}_{i+2}(\sigma_1 \ldots \sigma_i\sigma_{i+1}(j)) \ldots \mathbf{x}_{i+l}(\sigma_1 \ldots \sigma_i\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{i+l-1}(j))$$

$$\mathbf{x}_{i+l+1}(\sigma_1 \ldots \sigma_{i+l}(j)) \ldots \mathbf{x}_m(\sigma_1 \ldots \sigma_{m-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma_1(j))\mathbf{x}_3(\sigma_1\sigma_2(j)) \ldots \mathbf{x}_m(\sigma_1 \ldots \sigma_{m-1}(j)),$$

то есть

$$\mathbf{d}(j) = \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma_1(j))\mathbf{x}_3(\sigma_1\sigma_2(j)) \ldots \mathbf{x}_m(\sigma_1 \ldots \sigma_{m-1}(j)). \tag{2.7}$$

для любого $j \in J$.

Из (2.4), (2.5) и (2.7) вытекает $\mathbf{p} = \mathbf{r}$. Следовательно, равенство из формулировки предложения верно. Предложение доказано.

Доказательство следующей теоремы, опирающееся на предложение 2.1, приведено в [1].

Теорема 2.2. [1]. *Если A – полугруппа, то для любого $l \geq 2$ операция* $[\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J}$ *ассоциативна, то есть универсальная алгебра* $< \mathbf{S}_J \times A^J, [\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J} >$ *является l-арной полугруппой с l-арной операцией* (2.1), *где*

$$\mathbf{y}(j) = \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma_1(j)) \ldots \mathbf{x}_{l-1}(\sigma_1 \ldots \sigma_{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}(j)), j \in J.$$

3. ОПЕРАЦИЯ $[\ ]_{l,T,J}$

Определим на множестве $\mathbf{S}_J$ l-арную операцию $(\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_l)_l = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_l$, которая, как несложно заметить, является ассоциативной. Другими словами, $< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$ – l-арная полугруппа. Так как $\mathbf{S}_J$ – группа, то $< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$ – l-арная группа.

Предложение 3.1. [1]. *Если подмножество $T \subseteq \mathbf{S}_J$ замкнуто относительно l-арной операции $(\ )_l$, то множество $T \times A^J$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J}$, то есть $< T \times A^J, [\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J} >$ – l-арный подгруппоид l-арного группоида $< \mathbf{S}_J \times A^J, [\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J} >$. Если же A – полугруппа, то $< T \times A^J, [\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J} >$ – l-арная подполугруппа l-арной полугруппы $< \mathbf{S}_J \times A^J, [\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J} >$.*

Доказательство. Если $(\sigma_i, \mathbf{x}_i) \in T \times A^J$, $i = 1, \ldots, l$, то из (2.1) – (2.3) и замкнутости T относительно l-арной операции $(\ )_l$ вытекает

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \ldots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J} \in T \times A^J.$$

Если A – полугруппа, то ассоциативность операции $[\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J}$ вытекает из теоремы 2.2. Предложение доказано.

Замечание 3.1. Если T – подполугруппа группы $\mathbf{S}_J$, то множество T замкнуто относительно l-арной операции $(\ )_l$, то есть $< T, (\ )_l >$ – l-арная подполугруппа l-арной группы $< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$.

Из предложения 3.1, ввиду замечания 3.1, вытекает

Следствие 3.1. *Если T – подполугруппа группы $\mathbf{S}_J$, то множество $T \times A^J$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J}$, то есть $< T \times A^J, [\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J} >$ – l-арный подгруппоид l-арного группоида $< \mathbf{S}_J \times A^J, [\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J} >$. Если же A – полугруппа, то $< T \times A^J, [\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J} >$ – l-арная подполугруппа l-арной полугруппы $< \mathbf{S}_J \times A^J, [\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J} >$.*

Для группоида A, целого $l \geq 2$ и подмножества $T \subseteq \mathbf{S}_J$ определим на $\mathbf{S}_J \times A^J$ частичную l-арную операцию $[\ ]_{l,T,J}$ следующим образом: для любых l элементов

$$(\sigma_i, \mathbf{x}_i) \in \mathbf{S}_J \times A^J, i = 1, \ldots, l$$

положим

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \ldots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l,T,J} = [(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \ldots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l,\mathbf{S}_J,J},$$

если $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l \in T$; если же, по крайней мере, одна из подстановок $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l$ не принадлежит T, то элемент $[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \ldots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l,T,J}$ считается неопределенным.

Ясно, что при $T = \mathbf{S}_J$ операция $[\ ]_{l,T,J}$ определена на всем множестве $\mathbf{S}_J \times A^J$ и совпадает с операцией $[\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J}$.

Замечание 3.2. Если $\sigma_1, \ldots, \sigma_l \in T$, то, согласно определению операции $[\ ]_{l,T,J}$,

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \ldots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l,T,J} = (\sigma, \mathbf{y}),$$

где σ и $\mathbf{y}$ определяются с помощью (2.2) и (2.3) соответственно.

Замечание 3.3. Если подмножество $T \subseteq \mathbf{S}_J$ замкнуто относительно l-арной операции $(\ )_l$, то, согласно определению операции $[\ ]_{l,T,J}$, она определена для любых l элементов множества $T \times A^J$, а ее результат принадлежит этому же множеству. Поэтому в этом случае операции $[\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J}$ и $[\ ]_{l,T,J}$ определены на всем указанном множестве и совпадают на нем.

Замечание 3.3, предложение 3.1 и следствие 3.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.1. [1]. *Если A – группоид (полугруппа), подмножество $T \subseteq \mathbf{S}_J$ замкнуто относительно l-арной операции $(\ )_l$, в частности, T – подполугруппа группы $\mathbf{S}_J$, то $< T \times A^J, [\ ]_{l,T,J} >$ – l-арный группоид (l-арная полугруппа).*

Замечание 3.4. l-Арный группоид (l-арную полугруппу) $< T \times A^J, [\ ]_{l,T,J} >$ из теоремы 3.1 можно рассматривать как l-арный подгруппоид l-арного группоида (l-арную подполугруппу l-арной полугруппы) $< T \times A^J, [\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J} >$ так как, согласно замечанию 3.3, операции $[\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J}$ и $[\ ]_{l,T,J}$ на множестве $T \times A^J$ совпадают.

Если для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_J$ выполняется условие $\sigma^l = \sigma$, то $< \{\sigma\}, (\ )_l >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$. Поэтому из теоремы 3.1 при $T = \{\sigma\}$ вытекает

Теорема 3.2. [1]. *Если A – группоид (полугруппа), подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< \{\sigma\} \times A^J, [\ ]_{l,\{\sigma\},J} >$ – l-арный группоид (l-арная полугруппа).*

Следующая лемма позволяет отождествить l-арную операцию $[\ ]_{l,\{\sigma\},J}$ и l-арную операцию $[\ ]_{l,\sigma,J}$ из [3].

Лемма 3.1. *Если A – группоид, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то отображение φ: $(\sigma, \mathbf{a}) \to \mathbf{a}$ является изоморфизмом l-арного группоида $< \{\sigma\} \times A^J, [\ ]_{l,\{\sigma\},J} >$ на l-арный группоид $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$.*

4. НЕАБЕЛЕВОСТЬ $< \mathbf{S}_J \times A^J, [\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J} >$

Теорема 4.1. [1]. *Пусть l-арная подполугруппа $< T, (\ )_l >$ l-арной группы $< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$ содержит нетождественную подстановку, группоид A содержит* *единицу и элемент, отличный от этой единицы. Тогда l-арный группоид $< T \times A^J, [\ ]_{l, T, J} >$ не является абелевым.*

Доказательство. Пусть подстановка σ из T не является тождественной, то есть существует $j \in J$ с условием $\sigma(j) \neq j$. Пусть также 1 – единица группоида A, a – его элемент, отличный от 1. Определим функции $\mathbf{e}$, $\mathbf{a} \in A^J$ следующим образом:

$$\mathbf{e}(t) = 1,\ t \in J;\ \mathbf{a}(j) = a,\ \mathbf{a}(s) = 1,\ s \in J,\ s \neq j.$$

Для элементов $(\sigma, \mathbf{e})$, $(\sigma, \mathbf{a}) \in T \times A^J$ положим

$$[(\sigma, \mathbf{a})\underbrace{(\sigma, \mathbf{e}), \ldots, (\sigma, \mathbf{e})}_{l-1}]_{l, T, J} = (\sigma^l, \mathbf{y}) \in T \times A^J,$$

$$[(\sigma, \mathbf{e})(\sigma, \mathbf{a})\underbrace{(\sigma, \mathbf{e}), \ldots, (\sigma, \mathbf{e})}_{l-2}]_{l, T, J} = (\sigma^l, \mathbf{z}) \in T \times A^J.$$

Тогда, согласно определению операции $[\ ]_{l, T, J}$,

$$\mathbf{y}(j) = \mathbf{a}(j)\underbrace{1 \ldots 1}_{l-1} = \mathbf{a}(j) = a,$$

то есть $\mathbf{y}(j) = a$. Согласно тому же определению,

$$\mathbf{z}(j) = 1\mathbf{a}(\sigma(j))\underbrace{1 \ldots 1}_{l-2} = \mathbf{a}(\sigma(j)),$$

откуда, ввиду $\sigma(j) \neq j$, следует $\mathbf{z}(j) = 1 \neq a = \mathbf{y}(j)$, то есть $\mathbf{y}(j) \neq \mathbf{z}(j)$, откуда вытекает

$$[(\sigma, \mathbf{a})\underbrace{(\sigma, \mathbf{e}), \ldots, (\sigma, \mathbf{e})}_{l-1}]_{l, T, J} \neq [(\sigma, \mathbf{e})(\sigma, \mathbf{a})\underbrace{(\sigma, \mathbf{e}), \ldots, (\sigma, \mathbf{e})}_{l-2}]_{l, T, J}$$

Следовательно, l-арный группоид $< T \times A^J, [\ ]_{l, T, J} >$ неабелев. Теорема доказана.

Замечание 4.1. В доказательстве предыдущей теоремы при нахождении элемента $\mathbf{z}(j)$, для сокращения записей, в длинных произведениях элементов из A не были расставлены скобки, указывающие порядок выполнения операции. Считаем, что элементы перемножаются последовательно справа налево.

Замечание 4.2. Если $T = \{\sigma\}$, где σ – тождественная подстановка, то l-арный группоид $< T \times A^J, [\ ]_{l, T, J} >$ может быть абелевым. Для этого достаточно абелевости группоида A.

5. l-АРНАЯ ГРУППА $< T \times A^J, [\ ]_{l, T, J} >$

Теорема 5.1. [1]. *Пусть $< T, (\ )_l >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$, A – группа. Тогда $< T \times A^J, [\ ]_{l, T, J} >$ – l-арная группа. В частности, $< \mathbf{S}_J \times A^J, [\ ]_{l, \mathbf{S}_J, J} >$ – l-арная группа.*

Доказательство. Согласно теореме 3.1, $< T \times A^J, [\ ]_{l, T, J} >$ – l-арная полугруппа. Осталось доказать разрешимость в $T \times A^J$ уравнений

$$[(\delta, \mathbf{x})(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \ldots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, T, J} = (\sigma, \mathbf{b}), \tag{5.1}$$

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1) \ldots (\sigma_{l-1}, \mathbf{a}_{l-1})(\gamma, \mathbf{y})]_{l, T, J} = (\sigma, \mathbf{b}), \tag{5.2}$$

где

$$(\sigma, \mathbf{b}), (\sigma_i, \mathbf{a}_i) \in T \times A^J, i = 1, \dots, l.$$

В l-арной группе $< T, (\ )_l >$ существуют такие $\rho, \tau \in T$, что

$$(\rho\sigma_2 \dots \sigma_l)_l = \sigma, (\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}\tau)_l = \sigma. \tag{5.3}$$

Для любого $j \in J$ положим

$$\mathbf{u}(j) = \mathbf{b}(j)(\mathbf{a}_l(\rho\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{a}_3(\rho\sigma_2(j)))^{-1}(\mathbf{a}_2(\rho(j)))^{-1} \tag{5.4}$$

и покажем, что $(\rho, \mathbf{u}) \in T \times A^J$ является решением уравнения (5.1). Для этого положим

$$[(\rho, \mathbf{u})(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, T, J} = (\mu, \mathbf{d}). \tag{5.5}$$

Согласно замечанию 3.3, операции $[\ ]_{l, \mathbf{S}_J, J}$ и $[\ ]_{l, T, J}$ на множестве $T \times A^J$ совпадают. Поэтому

$$[(\rho, \mathbf{u})(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, T, J} = [(\rho, \mathbf{u})(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, \mathbf{S}_J, J},$$

то есть

$$[(\rho, \mathbf{u})(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, \mathbf{S}_J, J} = (\mu, \mathbf{d}).$$

Из этого равенства, согласно определению операции $[\ ]_{l, \mathbf{S}_J, J}$ и, ввиду первого равенства из (5.3), а также равенства (5.4), имеем

$$\mu = \rho\sigma_2 \dots \sigma_l = (\rho\sigma_2 \dots \sigma_l)_l = \sigma,$$

$$\mathbf{d}(j) = \mathbf{u}(j)\mathbf{a}_2(\rho(j))\mathbf{a}_3(\rho\sigma_2(j)) \dots \mathbf{a}_l(\rho\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{b}(j)(\mathbf{a}_l(\rho\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{a}_3(\rho\sigma_2(j)))^{-1}(\mathbf{a}_2(\rho(j)))^{-1}$$

$$\mathbf{a}_2(\rho(j))\mathbf{a}_3(\rho\sigma_2(j)) \dots \mathbf{a}_l(\rho\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)) = \mathbf{b}(j), j \in J.$$

Следовательно,

$$(\mu, \mathbf{d}) = (\sigma, \mathbf{b}),$$

откуда и из (5.5) вытекает

$$[(\rho, \mathbf{u})(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, T, J} = (\sigma, \mathbf{b}),$$

то есть уравнение (5.1) разрешимо в $T \times A^J$.

Для любого $j \in J$ определим функцию $\mathbf{v} \in A^J$ так, что

$$\mathbf{v}(\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(j)) = (\mathbf{a}_{l-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{a}_2(\sigma_1(j)))^{-1}(\mathbf{a}_1(j))^{-1}\mathbf{b}(j) \tag{5.6}$$

и покажем, что $(\tau, \mathbf{v}) \in T \times A^J$ является решением уравнения (5.2). Для этого положим

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1) \dots (\sigma_{l-1}, \mathbf{a}_{l-1})(\tau, \mathbf{v})]_{l, T, J} = (\eta, \mathbf{c}). \tag{5.7}$$

Снова, используя совпадение операций $[\ ]_{l, \mathbf{S}_J, J}$ и $[\ ]_{l, T, J}$ на множестве $T \times A^J$, получим

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1) \dots (\sigma_{l-1}, \mathbf{a}_{l-1})(\tau, \mathbf{v})]_{l, \mathbf{S}_J, J} = (\eta, \mathbf{c}).$$

Из этого равенства, согласно определению операции $[\ ]_{l,\, \mathbf{S}_J,\, J}$ и, ввиду второго равенства из (5.3), а также равенства (5.6), имеем

$$\eta = \sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}\tau = (\sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}\tau)_l = \sigma,$$

$$\mathbf{c}(j) = \mathbf{a}_1(j)\mathbf{a}_2(\sigma_1(j)) \ldots \mathbf{a}_{l-1}(\sigma_1 \ldots \sigma_{l-2}(j))\mathbf{v}(\sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}(j)) =$$
$$= \mathbf{a}_1(j)\mathbf{a}_2(\sigma_1(j)) \ldots \mathbf{a}_{l-1}(\sigma_1 \ldots \sigma_{l-2}(j))$$
$$(\mathbf{a}_{l-1}(\sigma_1 \ldots \sigma_{l-2}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}_2(\sigma_1(j)))^{-1}(\mathbf{a}_1(j))^{-1}\mathbf{b}(j) = \mathbf{b}(j),\ j \in J.$$

Следовательно,

$$(\eta, \mathbf{c}) = (\sigma, \mathbf{b}),$$

откуда и из (5.7) вытекает

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1) \ldots (\sigma_{l-1}, \mathbf{a}_{l-1})(\tau, \mathbf{v})]_{l,\, T,\, J} = (\sigma, \mathbf{b}),$$

то есть уравнение (5.2) также разрешимо в $T \times A^J$. Таким образом, доказано, что $< T \times A^J, [\ ]_{l,\, T,\, J} >$ – l-арная группа.

Полагая $T = \mathbf{S}_J$, получим утверждение теоремы для множества $\mathbf{S}_J \times A^J$. Теорема доказана.

Замечание 5.1. Ввиду замечания 3.3, l-арную группу $< T \times A^J, [\ ]_{l,\, T,\, J} >$ из теоремы 5.1 можно рассматривать как l-арную подгруппу l-арной группы $< \mathbf{S}_J \times A^J, [\ ]_{l,\, \mathbf{S}_J,\, J} >$. В дальнейшем мы не будем оговаривать эту ситуацию для различных конкретных множеств T.

Следствие 5.1 [4]. *Пусть $< T, (\ )_l >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< \mathbf{S}_k, (\ )_l >$, A – группа. Тогда $< T \times A^k, [\ ]_{l,\, T,\, k} >$ – l-арная группа. В частности, $< \mathbf{S}_k \times A^k, [\ ]_{l,\, \mathbf{S}_k,\, k} >$ – l-арная группа.*

Следствие 5.2. *Пусть $< T, (\ )_l >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< \mathbf{S}_{\mathrm{N}}, (\ )_l >$, A – группа. Тогда $< T \times A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\, T,\, \mathrm{N}} >$ – l-арная группа. В частности, $< \mathbf{S}_{\mathrm{N}} \times A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\, \mathbf{S}_{\mathrm{N}},\, \mathrm{N}} >$ – l-арная группа.*

Следствие 5.3. *Пусть $< T, (\ )_l >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< \mathbf{S}_{\mathrm{Z}}, (\ )_l >$, A – группа. Тогда $< T \times A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\, T,\, \mathrm{Z}} >$ – l-арная группа. В частности, $< \mathbf{S}_{\mathrm{Z}} \times A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\, \mathbf{S}_{\mathrm{Z}},\, \mathrm{Z}} >$ – l-арная группа.*

6. КОСЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Теорема 6.1. *Пусть $< T, (\ )_l >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$, A – группа. Тогда для любого элемента $(\sigma, \mathbf{a})$ l-арной группы $< T \times A^J, [\ ]_{l,\, T,\, J} >$ элемент*

$$(\sigma^{2-l}, \mathbf{u}) = (\bar{\sigma}, \mathbf{u}), \tag{6.1}$$

где функция $\mathbf{u} \in A^J$ определяется равенством

$$\mathbf{u}(\sigma^{l-1}(j)) = (\mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1},\ j \in J, \tag{6.2}$$

является косым, то есть $\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\sigma^{2-l}, \mathbf{u}) = (\bar{\sigma}, \mathbf{u})$. *Если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\sigma, \mathbf{u})$, *а равенство* (6.2) *принимает вид*

$$\mathbf{u}(s) = (\mathbf{a}(\sigma^{-1}(s)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma^{2-l}(s)))^{-1}, s \in J. \quad (6.3)$$

Доказательство. Прежде всего, отметим, что подстановка σ^{2-l} является решением уравнения

$$(\rho \underbrace{\sigma \ldots \sigma}_{l-1})_l = \sigma$$

в l-арной группе $< \mathbf{S}_J, (\,)_l >$. Следовательно, σ^{2-l} – косой элемент для σ в $< \mathbf{S}_J, (\,)_l >$, то есть $\bar{\sigma} = \sigma^{2-l}$. А так как $< T, (\,)_l >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< \mathbf{S}_J, (\,)_l >$, $\sigma \in T$, то, согласно критерию Дёрнте, $\sigma^{2-l} = \bar{\sigma} \in T$.

Согласно теореме 5.1, $< T \times A^J, [\,]_{l, T, J} >$ – l-арная группа. Применяя определение операции $[\,]_{l, T, J}$, будем иметь

$$[\underbrace{(\sigma, \mathbf{a}) \ldots (\sigma, \mathbf{a})}_{l-1} (\sigma^{2-l}, \mathbf{u})]_{l, T, J} = (\sigma^{l-1}\sigma^{2-l} = \sigma, \mathbf{v}),$$

где

$$\mathbf{v}(j) = \mathbf{a}(j)\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{u}(\sigma^{l-1}(j)) =$$
$$= \mathbf{a}(j)\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j))(\mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1} = \mathbf{a}(j), j \in J,$$

то есть $\mathbf{v} = \mathbf{a}$, откуда

$$[\underbrace{(\sigma, \mathbf{a}) \ldots (\sigma, \mathbf{a})}_{l-1} (\sigma^{2-l}, \mathbf{u})]_{l, T, J} = (\sigma, \mathbf{a}).$$

Следовательно, элемент (6.1) является косым для элемента $(\sigma, \mathbf{a})$ в l-арной группе $< T \times A^J, [\,]_{l, T, J} >$.

Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\bar{\sigma} = \sigma$, а с помощью замены $s = \sigma^{l-1}$ равенство (6.2) может быть переписано в виде (6.3). Теорема доказана.

В случае $J = \{1, 2, \ldots, k\}$ из теоремы 6.1 вытекает

Следствие 6.1. *Пусть* $< T, (\,)_l >$ – *l-арная подгруппа l-арной группы* $< \mathbf{S}_k, (\,)_l >$, *A – группа. Тогда для любого элемента* $(\sigma, (a_1, \ldots, a_k))$ *l-арной группы* $< T \times A^k, [\,]_{l, T, k} >$ *элемент*

$$(\sigma^{2-l}, (u_1, \ldots, u_k)) = (\bar{\sigma}, (u_1, \ldots, u_k)),$$

где

$$u_{\sigma^{l-1}(j)} = a^{-1}_{\sigma^{l-2}(j)} \ldots a^{-1}_{\sigma(j)}, j \in \{1, 2, \ldots, k\},$$

является косым, то есть $\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\bar{\sigma}, (u_1, \ldots, u_k))$. *Если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\sigma, (u_1, \ldots, u_k))$,

$$u_s = a^{-1}_{\sigma^{-1}(s)} \ldots a^{-1}_{\sigma^{2-l}(s)}, s \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

В случае $J = \mathrm{N}$ из теоремы 6.1 вытекает

Следствие 6.2. *Пусть* $< T, (\ )_l >$ – *l-арная подгруппа l-арной группы* $< \mathbf{S}_{\mathrm{N}}, (\ )_l >$, *A – группа. Тогда для любого элемента* $(\sigma, (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots))$ *l-арной группы* $< T \times A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l, T, \mathrm{N}} >$ *элемент*

$$(\sigma^{2-l}, (u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots) = (\overline{\sigma}, (u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots),$$

где

$$u_{\sigma^{l-1}(j)} = a^{-1}_{\sigma^{l-2}(j)} \ldots a^{-1}_{\sigma(j)}, j \in \mathrm{N},$$

является косым, то есть $\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\overline{\sigma}, (u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots))$. *Если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то*

$$\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\sigma, (u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots)),$$

$$u_s = a^{-1}_{\sigma^{-1}(s)} \ldots a^{-1}_{\sigma^{2-l}(s)}, s \in \mathrm{N}.$$

В случае $J = \mathrm{Z}$ из теоремы 6.1 вытекает

Следствие 6.3. *Пусть* $< T, (\ )_l >$ – *l-арная подгруппа l-арной группы* $< \mathbf{S}_{\mathrm{Z}}, (\ )_l >$, *A – группа. Тогда для любого элемента* $(\sigma, (\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots))$ *l-арной группы* $< T \times A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l, T, \mathrm{Z}} >$ *элемент*

$$(\sigma^{2-l}, (\ldots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \ldots)) = (\overline{\sigma}, (\ldots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \ldots)),$$

где

$$u_{\sigma^{l-1}(j)} = a^{-1}_{\sigma^{l-2}(j)} \ldots a^{-1}_{\sigma(j)}, j \in \mathrm{Z},$$

является косым, то есть $\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\overline{\sigma}, (\ldots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \ldots))$. *Если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то*

$$\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\sigma, (\ldots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \ldots)),$$

$$u_s = a^{-1}_{\sigma^{-1}(s)} \ldots a^{-1}_{\sigma^{2-l}(s)}, s \in \mathrm{Z}.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Гальмак, А. М.*** Об операции $[\ ]_{l, T, J}$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В, Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2014. – № 1. – С. 5–13.
2. ***Гальмак, А. М.*** Многоместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
3. ***Гальмак, А. М.*** Полиадические операции на множествах функций / А. М. Гальмак, Ю. И. Кулаженко. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2013. – 192 с.
4. ***Гальмак, А. М.*** Обобщенные полиадические операции / А. М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – Гомель. – 2013. – № 2. – С. 50–57.
5. ***Post, E. L.*** Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

Поступила в редакцию 02.10.2015 г.
Контакты: halm54@mail.ru (Гальмак Александр Михайлович)

Gal'mak A.M. ON *l*-ARY OPERATION $[\ ]_{l, T, J}$.

The article proves the results announced by the author earlier on l-ary operation $[\ ]_{l, T, J}$ *that is determined for any integer* $l \geq 2$, *any nonempty set J and any semigroup A on the Cartesian product* $T \times A^J$, *where T is a subset of the symmetrical group* $\mathbf{S}_J$ *of all bijections of set J on J,* A^J *is a set of all functions with domain J and with values in semigroup A.*

Key words: abelian n-ary operation, n-ary operation, groupoid.