УДК 517.925

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. И. Кашпар
старший преподаватель
Белорусско-Российский университет (Могилев, РБ)
В. Н. Лаптинский
доктор физико-математических наук, профессор
Институт технологии металлов НАНБ (Могилев, РБ)

На основе применения конструктивного метода получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для матричного уравнения второго порядка, представляющего собой обобщение классического уравнения Ляпунова; выведена оценка области локализации решения.

Ключевые слова: матричное дифференциальное уравнение, краевая задача, однозначная разрешимость.

Рассмотрим матричное уравнение

$$\frac{d^2\mathbf{X}(t)}{dt^2} = \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt}\mathbf{B}(t) + \lambda(\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{X}(t)\mathbf{B}_1(t)) +$$

$$+\lambda\left(\mathbf{A}_2(t)\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt}\mathbf{B}_2(t)\right) + \mathbf{F}(t), \tag{1}$$

где $t \in [0,\omega]$, $\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{A}_i(t)$, $\mathbf{B}_i(t)$ $(i = 1, 2)$ – матрицы класса $\mathbb{C}[0,\omega]$ соответствующих размерностей; $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

К уравнению (1) присоединим краевые условия:

$$\mathbf{X}(0,\lambda) = \mathbf{M}, \tag{2}$$

$$\mathbf{X}(\omega,\lambda) = \mathbf{N}, \tag{3}$$

где $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ – заданные вещественные матрицы.

Задача (1)–(3) представляет собой задачу Валле-Пуссена [1, с. 155] в матричной постановке. В векторном случае такая задача качественными методами сравнительно хорошо изучена (см., например, [2, с. 491]). Такие задачи встречаются в ряде проблем математической физики и прикладной математики. Весьма важную роль эти задачи играют в теплофизике [3, 4]. Отметим, что структурные свойства уравнений типа (1) и их решений изучены в работах [5–9]. Задача (1)–(3) ранее никем не изучалась.

В данной работе с помощью конструктивного метода [9, гл. 1] получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости исследуемой задачи, а также даны оценки области локализации решения.

Под конструктивными методами понимают определенные методы построения решений различных классов уравнений, исследования существования и свойств точных и приближенных решений. Основной характеристикой конструктивных методов является возможность с их помощью доводить решение задачи до конечного результата (вплоть до численных значений), а также практически проверять те теоретические предпосылки и условия, которые обеспечивают правомочность применения этих методов к конкретным классам задач [10, с. 3].

1. Редукция к эквивалентной интегральной задаче

Сначала опишем сведение задачи (1)–(3) к эквивалентной интегральной задаче. При этом вместо уравнения (1) будем рассматривать эквивалентную ему систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{Y}, \\ \dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{B}(t) + \tilde{\mathbf{H}}(t,\lambda,\mathbf{X},\mathbf{Y}), \end{cases} \tag{4}$$

где $\tilde{\mathbf{H}}(t,\lambda,\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \lambda(\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X}(t,\lambda) + \mathbf{X}(t,\lambda)\mathbf{B}_1(t)) + \lambda(\mathbf{A}_2(t)\dfrac{d\mathbf{X}(t,\lambda)}{dt} +$

$+\dfrac{d\mathbf{X}(t,\lambda)}{dt}\mathbf{B}_2(t)) + \mathbf{F}(t) \equiv \mathbf{H}(t,\lambda).$

Обозначим через $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ интегральные матрицы уравнений соответственно

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}(t), \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{E}_n, \tag{5}$$

$$\frac{d\mathbf{V}(t)}{dt} = \mathbf{V}(t)\mathbf{B}(t), \quad \mathbf{V}(0) = \mathbf{E}_m, \tag{6}$$

где $\mathbf{E}_k$ – единичная матрица порядка k.

Пусть $\mathbf{X}(t,\lambda)$, $\mathbf{Y}(t,\lambda)$ – решение задачи (2)–(4). Тогда из первого уравнения (4) с учетом (2) имеем

$$\mathbf{X}(t,\lambda) = \mathbf{M} + \int_0^t \mathbf{Y}(\tau,\lambda)d\tau. \tag{7}$$

Полагая в (7) $t = \omega$, получим на основании (3)

$$\int_0^{\omega}\mathbf{Y}(\tau,\lambda)d\tau=\mathbf{N}-\mathbf{M}. \qquad (8)$$

Далее обратимся ко второму уравнению в (4). На основании двусторонней формулы Коши с учетом (5), (6) имеем

$$\mathbf{Y}(t,\lambda)=\mathbf{U}(t)\mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{Y}(\tau,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(\tau)\mathbf{V}(t)+\mathbf{U}(t)\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(t).$$

Отсюда находим

$$\mathbf{Y}(\tau,\lambda)=\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(t)\mathbf{V}(\tau)-\mathbf{U}(\tau)\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau). \qquad (9)$$

В (8) воспользуемся соотношением (9). Тогда получим

$$\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(t)\mathbf{V}(\tau)d\tau=\mathbf{N}-\mathbf{M}+$$

$$+\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau. \qquad (10)$$

Запишем (10) в следующем виде

$$\mathbf{\Phi Z}(t,\lambda)=\mathbf{N}-\mathbf{M}+\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau, \qquad (11)$$

где $\mathbf{\Phi}$ – линейный матричный оператор, $\mathbf{\Phi Z}(t,\lambda)=\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t,\lambda)\mathbf{V}(\tau)d\tau$,

$$\mathbf{Z}(t,\lambda)=\mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(t).$$

Пусть оператор $\mathbf{\Phi}$ обратим. Тогда из (11) имеем

$$\mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(t)=\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\mathbf{N}-\mathbf{M}+\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)$$

и далее

$$\mathbf{Y}(t,\lambda)=\mathbf{U}(t)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right)\mathbf{V}(t)+$$

$$+\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(t). \qquad (12)$$

Таким образом, всякое решение задачи (2)–(4) является решением системы матричных интегральных уравнений (7), (12). Верно и обратное: всякое непрерывное решение $\mathbf{X}(t,\lambda)$, $\mathbf{Y}(t,\lambda)$ системы интегральных уравнений (7), (12) является решением задачи (2)–(4). В самом деле, выполним дифференцирование по t сначала в тождестве (7)

$$d\mathbf{X}(t,\lambda) = \mathbf{Y}(t,\lambda)dt, \tag{13}$$

а затем в тождестве (12), используя перестановочность оператора дифференцирования $\mathbf{D}$ и оператора $\mathbf{\Phi}^{-1}$

$$\frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y}(t,\lambda) + \mathbf{Y}(t,\lambda)\mathbf{B}(t) +$$

$$+\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(t) =$$

$$= \mathbf{A}(t)\mathbf{Y}(t,\lambda) + \mathbf{Y}(t,\lambda)\mathbf{B}(t) + \mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\mathbf{\Phi}\left(\mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{H}(t,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(t)\right)\right)\mathbf{V}(t) =$$

$$= \mathbf{A}(t)\mathbf{Y}(t,\lambda) + \mathbf{Y}(t,\lambda)\mathbf{B}(t) + \mathbf{H}(t,\lambda). \tag{14}$$

Теперь установим выполнение краевых условий (2), (3). Из (7) при $t = 0$ имеем $\mathbf{X}(0,\lambda) = \mathbf{M}$.

На основании (14) получим

$$\mathbf{H}(s,\lambda)ds = d\mathbf{Y}(s,\lambda) - \left[\mathbf{A}(s)\mathbf{Y}(s,\lambda) + \mathbf{Y}(s,\lambda)\mathbf{B}(s)\right]ds. \tag{15}$$

Соотношение (15) подставим в (11) и выполним затем, согласно [11, с. 52], интегрирование по частям

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(t)) = \mathbf{N} - \mathbf{M} +$$

$$+\mathbf{\Phi}\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\left[d\mathbf{Y}(s,\lambda) - \left(\mathbf{A}(s)\mathbf{Y}(s,\lambda) + \mathbf{Y}(s,\lambda)\mathbf{B}(s)\right)ds\right]\mathbf{V}^{-1}(s)\right) =$$

$$= \mathbf{N} - \mathbf{M} + \mathbf{\Phi}\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)d\mathbf{Y}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right) -$$

$$-\mathbf{\Phi}\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\left(\mathbf{A}(s)\mathbf{Y}(s,\lambda) + \mathbf{Y}(s,\lambda)\mathbf{B}(s)\right)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right) =$$

$$= \mathbf{N} - \mathbf{M} + \mathbf{\Phi}\left(\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{Y}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)\Big|_{\tau}^{t}\right) +$$

$$+\mathbf{\Phi}\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\left(\mathbf{A}(s)\mathbf{Y}(s,\lambda) + \mathbf{Y}(s,\lambda)\mathbf{B}(s)\right)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right) -$$

$$-\mathbf{\Phi}\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\left(\mathbf{A}(s)\mathbf{Y}(s,\lambda) + \mathbf{Y}(s,\lambda)\mathbf{B}(s)\right)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right) =$$

$$= \mathbf{N} - \mathbf{M} + \mathbf{\Phi}\left(\mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(t) - \mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{Y}(\tau,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(\tau)\right) =$$

$$= \mathbf{N} - \mathbf{M} + \mathbf{\Phi}\left(\mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(t)\right) - \mathbf{\Phi}\left(\mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{Y}(\tau,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(\tau)\right).$$

С учетом структуры оператора $\mathbf{\Phi}$ отсюда имеем соотношение

$$\mathbf{\Phi}\left(\mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{Y}(\tau,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(\tau)\right) = \int_0^{\omega}\mathbf{Y}(\tau,\lambda)d\tau = \mathbf{N} - \mathbf{M},$$

тем самым выполняется соотношение (8). Стало быть, условие (3) также имеет место.

Таким образом, в случае обратимости оператора $\mathbf{\Phi}$, справедлива

Лемма. *Пара функций* $\left(\mathbf{X}(t,\lambda), \mathbf{Y}(t,\lambda)\right) : (t,\lambda) \to \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ *представляет собой решение задачи (2)–(4) тогда и только тогда, когда эти функции являются решением системы интегральных уравнений (7), (12).*

Эта лемма относится к результатам типа теоремы 4.7.4 [13, с. 124] для начальной задачи и теоремы 4.8.2 для двухточечной краевой задачи нелинейного дифференциального уравнения с неразделяющимися краевыми условиями.

Замечание 1. Перестановочность операторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{\Phi}^{-1}$ следует из перестановочности операторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{\Phi}$ или, другими словами, она получается на основе дифференцирования по t функции

$$\mathbf{S}(t,\lambda) = \int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(t)\mathbf{V}(\tau)d\tau,$$

а именно:

$$\mathbf{DS}(t,\lambda) \equiv \mathbf{D\Phi Z}(t,\lambda) = \frac{d}{dt}\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t,\lambda)\mathbf{V}(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\frac{d\mathbf{Z}(t,\lambda)}{dt}\mathbf{V}(\tau)d\tau = \mathbf{\Phi}\frac{d\mathbf{Z}(t,\lambda)}{dt} = \mathbf{\Phi DZ}(t,\lambda).$$

Стало быть $\mathbf{D}\cdot\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{D}$ и $\mathbf{\Phi}^{-1}\cdot\mathbf{D} = \mathbf{D}\cdot\mathbf{\Phi}^{-1}$.

Это означает, что соотношение (14) может быть получено с помощью дифференцирования (12).

2. Условия однозначной разрешимости и априорная оценка области локализации решения

Для получения условий существования и единственности решения краевой задачи (2)–(4) воспользуемся модификацией обобщенного принципа сжимающих отображений [14, с. 94] применительно к эквивалентной интегральной задаче (7), (12) (согласно лемме). Запишем эту задачу в операторном виде

$$\mathbf{X} = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \equiv \tilde{\mathcal{L}}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \tag{16}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \equiv \tilde{\mathcal{L}}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \tag{17}$$

где через $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ обозначены соответствующие линейные интегральные операторы в (7), (12). Эти операторы действуют на множестве $G = \{(\mathbf{X}(t,\lambda), \mathbf{Y}(t,\lambda)) \in \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{n\times m} : \|\mathbf{X}\|_C < \infty, \ \|\mathbf{Y}\|_C < \infty\}$, где $(t,\lambda) \in [0,\omega]\times\mathbb{R}$, $\|\mathbf{Z}\|_C = \max_{0\le t\le\omega}\|\mathbf{Z}(t,\lambda)\|$.

Введем следующие обозначения:

$$\alpha = \max_t\|\mathbf{A}(t)\|, \ \beta = \max_t\|\mathbf{B}(t)\|, \ \alpha_i = \max_t\|\mathbf{A}_i(t)\|, \ \beta_i = \max_t\|\mathbf{B}_i(t)\| \ (i = 1,2; \quad t\in[0,\omega]),$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{UV}} = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_1(\mathbf{0},\mathbf{0}), \quad \tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{UV}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_2(\mathbf{0},\mathbf{0}), \quad \gamma = \|\mathbf{\Phi}^{-1}\|, \quad \varepsilon = |\lambda|,$$

$$\lambda_U = \max_{0\le s\le\tau\le\omega}\|\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)\|, \quad \lambda_V = \max_{0\le s\le\tau\le\omega}\|\mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{V}(\tau)\|, \quad a_1 = \frac{\omega^3}{3}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_1+\beta_1),$$

$$b_1 = \gamma\frac{\omega^3}{3}\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_2+\beta_2), \quad a_2 = \frac{\omega^2}{2}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_1+\beta_1), \quad b_2 = \frac{\omega^2}{2}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_2+\beta_2).$$

Теорема 1. *Пусть выполнено условие*

$$\varepsilon(a_1 + b_2) < 1. \qquad (18)$$

Тогда система уравнений (16), (17) однозначно разрешима на множестве G, при этом справедлива оценка

$$\mathbf{Z} \le (\mathbf{E} - \varepsilon\mathbf{K})^{-1}\mathbf{H}_0, \qquad (19)$$

где $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{X}\|_C \\ \|\mathbf{Y}\|_C \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix} \|\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{UV}}\|_c \\ \|\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{UV}}\|_c \end{pmatrix}.$

Доказательство: С помощью несложных выкладок можно установить, что $(\tilde{\mathcal{L}}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \ \tilde{\mathcal{L}}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y})) \in G$, если $(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in G$.

Далее изучим вопрос сжимаемости операторов $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ в смысле [14, с. 94]. Из (16) имеем для любых $(\tilde{\mathbf{X}},\tilde{\mathbf{Y}}) \in G$, $(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \ \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) \in G$:

$$\mathcal{L}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \ \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \ \tilde{\mathbf{Y}}) = \int_0^t \mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^\varphi \mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,\mathrm{s})\Delta\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(\mathrm{s},\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi, \qquad (20)$$

где $\mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,\mathrm{s}) = \mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s), \quad \mathbf{K}_{\mathbf{V}}(\mathrm{s},\tau) = \mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{V}(\tau)$,

$$\Delta\mathbf{H}(s,\lambda) = \lambda\Big[\mathbf{A}_1(s)\big(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}(s,\lambda) - \tilde{\mathbf{X}}(s,\lambda)\big) + \big(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}(s,\lambda) - \tilde{\mathbf{X}}(s,\lambda)\big)\mathbf{B}_1(s) +$$

$$+\mathbf{A}_2(s)\big(\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}(s,\lambda) - \tilde{\mathbf{Y}}(s,\lambda)\big) + \big(\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}(s,\lambda) - \tilde{\mathbf{Y}}(s,\lambda)\big)\mathbf{B}_2(s)\Big].$$

Выполнив оценки по норме в (20), получим последовательно

$$\|\mathcal{L}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \ \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}})\| \le \int_0^t\left\|\mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^\varphi \mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,\mathrm{s})\Delta\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(\mathrm{s},\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)\right\|d\varphi \le$$

$$\leq \int_0^t \|\mathbf{U}(\varphi)\| \left\| \boldsymbol{\Phi}^{-1} \left(\int_0^{\omega} \left(\int_{\tau}^{\varphi} \mathbf{K}_{\mathrm{U}}(\tau, \mathrm{s}) \Delta \mathbf{H}(s, \lambda) \mathbf{K}_{\mathrm{V}}(\mathrm{s}, \tau) ds \right) d\tau \right) \right\| \|\mathbf{V}(\varphi)\| \, d\varphi \leq$$

$$\leq \int_0^t \|\mathbf{U}(\varphi)\| \|\mathbf{V}(\varphi)\| \|\boldsymbol{\Phi}^{-1}\| \left\| \int_0^{\omega} \left(\int_{\tau}^{\varphi} \mathbf{K}_{\mathrm{U}}(\tau, \mathrm{s}) \Delta \mathbf{H}(s, \lambda) \mathbf{K}_{\mathrm{V}}(\mathrm{s}, \tau) ds \right) d\tau \right\| d\varphi \leq$$

$$\leq \gamma \lambda_U \lambda_V \int_0^t \left(\int_0^{\omega} \left\| \int_{\tau}^{\varphi} \mathbf{K}_{\mathrm{U}}(\tau, \mathrm{s}) \Delta \mathbf{H}(s, \lambda) \mathbf{K}_{\mathrm{V}}(\mathrm{s}, \tau) ds \right\| d\tau \right) d\varphi \leq$$

$$\leq \gamma \lambda_U \lambda_V \int_0^t \int_0^{\omega} \left| \int_{\tau}^{\varphi} \| \mathbf{K}_U(\tau, \mathrm{s}) \Delta \mathbf{H}(s, \lambda) \mathbf{K}_{\mathrm{V}}(\mathrm{s}, \tau) \| ds \right| d\tau d\varphi \leq$$

$$\leq \gamma \lambda_U \lambda_V \int_0^t \int_0^{\omega} \left| \int_{\tau}^{\varphi} \| \mathbf{K}_{\mathrm{U}}(\tau, \mathrm{s}) \| \|\Delta \mathbf{H}(s, \lambda)\| \|\mathbf{K}_{\mathrm{V}}(\mathrm{s}, \tau)\| ds \right| d\tau d\varphi \leq$$

$$\leq \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 \int_0^{\omega} \int_0^{\omega} \left| \int_{\tau}^{\varphi} \|\Delta \mathbf{H}(s, \lambda)\| ds \right| d\tau d\varphi. \tag{21}$$

Поскольку

$$\|\Delta \mathbf{H}(s, \lambda)\| = |\lambda| \left\| \mathbf{A}_1(s) \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{X}}(s, \lambda) \right) + \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{X}}(s, \lambda) \right) \mathbf{B}_1(s) + \right.$$
$$\left. + \mathbf{A}_2(s) \left(\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{Y}}(s, \lambda) \right) + \left(\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{Y}}(s, \lambda) \right) \mathbf{B}_2(s) \right\| \leq \varepsilon \left(\left\| \mathbf{A}_1(s) \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{X}}(s, \lambda) \right) \right\| + \right.$$
$$+ \left\| \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{X}}(s, \lambda) \right) \mathbf{B}_1(s) \right\| + \left\| \mathbf{A}_2(s) \left(\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{Y}}(s, \lambda) \right) \right\| + \left. \left\| \left(\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{Y}}(s, \lambda) \right) \mathbf{B}_2(s) \right\| \right) \leq$$
$$\leq \varepsilon \left(\left(\|\mathbf{A}_1(s)\| + \|\mathbf{B}_1(s)\| \right) \| \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{X}}(s, \lambda) \| + \left(\|\mathbf{A}_2(s)\| + \|\mathbf{B}_2(s)\| \right) \| \tilde{\mathbf{Y}}(s, \lambda) - \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}(s, \lambda) \| \right) \leq$$
$$\leq \varepsilon \left((\alpha_1 + \beta_1) \| \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{X}}(s, \lambda) \| + (\alpha_2 + \beta_2) \| \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{Y}}(s, \lambda) \| \right) \leq$$
$$\leq \varepsilon (\alpha_1 + \beta_1) \| \tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}} \|_C + \varepsilon (\alpha_2 + \beta_2) \| \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\mathbf{Y}} \|_C, \tag{22}$$

то, продолжая оценки в (21), получим

$$\| \mathcal{L}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) \| \leq \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 \int_0^{\omega} d\varphi \int_0^{\omega} d\tau \int_{\tau}^{\varphi} \left(\varepsilon (\alpha_1 + \beta_1) \| \tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}} \|_C + \varepsilon (\alpha_2 + \beta_2) \| \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\mathbf{Y}} \|_C \right) ds \leq$$

$$\leq \varepsilon \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 \left((\alpha_1 + \beta_1) \| \tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}} \|_C + (\alpha_2 + \beta_2) \| \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\mathbf{Y}} \|_C \right) \int_0^{\omega} d\varphi \int_0^{\omega} |\varphi - \tau| d\tau \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 \left((\alpha_1 + \beta_1) \| \tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}} \|_C + (\alpha_2 + \beta_2) \| \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\mathbf{Y}} \|_C \right) \int_0^{\omega} \left(\varphi^2 + (\omega - \varphi)^2 \right) d\varphi \leq$$

$$\le \frac{\varepsilon\omega^3}{3}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2\left((\alpha_1+\beta_1)\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\|_C+(\alpha_2+\beta_2)\|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{Y}}\|_C\right)\le \varepsilon a_1\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\|_C+\varepsilon b_1\|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{Y}}\|_C.$$

Отсюда следует оценка

$$\|\mathcal{L}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}},\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}})-\mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}},\tilde{\mathbf{Y}})\|_C\le \varepsilon a_1\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\|_C+\varepsilon b_1\|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{Y}}\|_C. \tag{23}$$

Аналогичные оценки выполним на основе (17). Из (17) имеем

$$\mathcal{L}_2(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}},\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}})-\mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{X}},\tilde{\mathbf{Y}})=\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^{\omega}\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{K}_{\mathrm{U}}(\tau,s)\Delta\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{K}_{\mathrm{V}}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(t). \tag{24}$$

Производя оценки по норме в (24), получим с использованием (22)

$$\|\mathcal{L}_2(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}},\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}})-\mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{X}},\tilde{\mathbf{Y}})\|\le\|\mathbf{U}(t)\|\left\|\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^{\omega}\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{K}_{\mathrm{U}}(\tau,s)\Delta\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{K}_{\mathrm{V}}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\right\|\|\mathbf{V}(t)\|\le$$

$$\le\lambda_U\lambda_V\|\mathbf{\Phi}^{-1}\|\left\|\int_0^{\omega}\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{K}_{\mathrm{U}}(\tau,s)\Delta\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{K}_{\mathrm{V}}(s,\tau)ds\right)d\tau\right\|\le$$

$$\le\gamma\lambda_U\lambda_V\int_0^{\omega}\left\|\int_{\tau}^{t}\mathbf{K}_{\mathrm{U}}(\tau,s)\Delta\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{K}_{\mathrm{V}}(s,\tau)ds\right\|d\tau\le\gamma\lambda_U\lambda_V\int_0^{\omega}\left|\int_{\tau}^{t}\|\mathbf{K}_{\mathrm{U}}(\tau,s)\Delta\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{K}_{\mathrm{V}}(s,\tau)\|ds\right|d\tau\le$$

$$\le\gamma\lambda_U\lambda_V\int_0^{\omega}\left|\int_{\tau}^{t}\|\mathbf{K}_{\mathrm{U}}(\tau,s)\|\|\Delta\mathbf{H}(s,\lambda)\|\|\mathbf{K}_{\mathrm{V}}(s,\tau)\|ds\right|d\tau\le$$

$$\le\varepsilon\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2\left((\alpha_1+\beta_1)\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\|_C+(\alpha_2+\beta_2)\|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{Y}}\|_C\right)\int_0^{\omega}|t-\tau|d\tau\le$$

$$\le\frac{\varepsilon\omega^2}{2}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2\left((\alpha_1+\beta_1)\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\|_C+(\alpha_2+\beta_2)\|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{Y}}\|_C\right)\le$$

$$\le\varepsilon a_2\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\|_C+\varepsilon b_2\|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{Y}}\|_C. \tag{25}$$

Из (25) следует оценка

$$\|\mathcal{L}_2(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}},\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}})-\mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{X}},\tilde{\mathbf{Y}})\|_C\le\varepsilon a_2\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\|_C+\varepsilon b_2\|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{Y}}\|_C. \tag{26}$$

Оценки (23), (26) запишем в матричном виде

$$\tilde{\mathbf{Z}}\le\varepsilon\mathbf{K}\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}, \tag{27}$$

где $\tilde{\mathbf{Z}}=\begin{pmatrix}\|\mathcal{L}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}},\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}})-\mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}},\tilde{\mathbf{Y}})\|\\ \|\mathcal{L}_2(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}},\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}})-\mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{X}},\tilde{\mathbf{Y}})\|\end{pmatrix}$, $\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}=\begin{pmatrix}\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\|_C\\ \|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{Y}}\|_C\end{pmatrix}$, $\mathbf{K}=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}$.

Используя условие (18), можно установить с помощью [15, с. 370], что характеристические числа положительной матрицы $\varepsilon\mathbf{K}$ расположены внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат, при этом матрица

$\mathbf{E}-\varepsilon\mathbf{K}$ положительно обратима. Стало быть на множестве G имеют место соотношения (23), (26), являющиеся условием модификации обобщенного принципа [14, с. 94] сжимающих отображений применительно к системе интегральных уравнений (7), (12) (или (16), (17)). На основании этого заключаем, что решение $\mathbf{X}=\mathbf{X}(t,\lambda)$, $\mathbf{Y}=\mathbf{Y}(t,\lambda)$ этой системы на множестве G существует и единственно.

Далее получим априорную оценку области возможного расположения решения $\mathbf{X}(t,\lambda)$, $\mathbf{Y}(t,\lambda)$. Для этого выполним оценки по норме в тождествах (16), (17) с использованием оценок (23), (26). Тогда получим

$$\|\mathbf{X}\|_C \le \|\tilde{\mathbf{P}}_{\mathrm{UV}}\|_C + \varepsilon a_1\|\mathbf{X}\|_C + \varepsilon b_1\|\mathbf{Y}\|_C,$$

$$\|\mathbf{Y}\|_C \le \|\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathrm{UV}}\|_C + \varepsilon a_2\|\mathbf{X}\|_C + \varepsilon b_2\|\mathbf{Y}\|_C$$

или в матричной форме по аналогии с (27):

$$\mathbf{Z} \le \varepsilon\mathbf{K}\mathbf{Z} + \mathbf{H}_0. \tag{28}$$

Запишем (28) в следующем виде:

$$(\mathbf{E}-\varepsilon\mathbf{K})\mathbf{Z} \le \mathbf{H}_0.$$

Отсюда на основании обратимости матрицы $\mathbf{E}-\varepsilon\mathbf{K}$ получим оценку (19). Эта теорема полностью доказана.

Теорема 2. *Пусть оператор* $\mathbf{\Phi}$ *обратим и выполнено условие (18), тогда задача (2)–(4) однозначно разрешима в области D.*

Доказательство: Поскольку оператор $\mathbf{\Phi}$ обратим, то, согласно лемме, задача (2)–(4) эквивалентна интегральной задаче (7), (12) (в операторном виде (16), (17)), которая однозначно разрешима на указанном множестве, согласно теореме 1.

Тем самым, задача (2)–(4) однозначно разрешима в области $D=\{t\in[0,\omega], |\lambda|<\lambda_0, \|\mathbf{X}\|<\infty, \|\mathbf{Y}\|<\infty\}$, где $\lambda_0 = 1/(a_1+b_2)$.

Замечание 2. Анализ условия (18) и оценки (19) показывает, что краевая задача для соответствующего однородного уравнения с нулевыми граничными условиями имеет только тривиальное решение.

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{A}(t)\equiv 0$, $\mathbf{B}(t)\equiv 0$, то есть задачу

$$\frac{d^2\mathbf{X}(t)}{dt^2} = \lambda(\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X}(t)+\mathbf{X}(t)\mathbf{B}_1(t)) + \lambda(\mathbf{A}_2(t)\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt}\mathbf{B}_2(t)) + \mathbf{F}(t), \tag{29}$$

$$\mathbf{X}(0,\lambda)=\mathbf{M},\ \mathbf{X}(\omega,\lambda)=\mathbf{N}. \tag{30}$$

В этом случае вместо эквивалентной системы интегральных уравнений (7), (12) будем иметь уравнения:

$$\mathbf{X}(t,\lambda) = \mathbf{M} + \frac{t}{\omega}(\mathbf{N}-\mathbf{M}) + \lambda\int_0^\omega G(t,\tau)\tilde{\mathbf{H}}_0(\tau,\lambda)d\tau, \tag{31}$$

$$\mathbf{Y}(t,\lambda) = \frac{1}{\omega}(\mathbf{N}-\mathbf{M}) + \lambda\int_0^{\omega} G_t'(t,\tau)\tilde{\mathbf{H}}_0(\tau,\lambda)d\tau , \qquad (32)$$

где $G(t,\tau) = \begin{cases} \tau(\frac{t}{\omega}-1), & 0 \le \tau \le t \le \omega, \\ t(\frac{\tau}{\omega}-1), & 0 \le t \le \tau \le \omega; \end{cases}$, $G_t'(t,\tau) = \dfrac{\partial G(t,\tau)}{\partial t}$,

$$\tilde{\mathbf{H}}_0(\tau,\lambda) = \mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau,\lambda) + \mathbf{X}(\tau,\lambda)\mathbf{B}_1(t) + \mathbf{A}_2(\tau)\frac{d\mathbf{X}(\tau,\lambda)}{d\tau} + \frac{d\mathbf{X}(\tau,\lambda)}{d\tau}\mathbf{B}_2(\tau).$$

Установим условие однозначной разрешимости задачи (29), (30). Для этого выполним оценки типа (23), (26) применительно к системе уравнений (31), (32). На основе (31) имеем

$$\|\mathcal{L}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}},\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}},\tilde{\mathbf{Y}})\| \le \varepsilon \int_0^{\omega}\|G(t,\tau)\|\|\tilde{\mathbf{H}}_0(\tau,\lambda)\|d\tau \le \varepsilon \max_t \int_0^{\omega}\|G(t,\tau)\|d\tau \times$$

$$\times\left[(\alpha_1+\beta_1)\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\|_C + (\alpha_2+\beta_2)\|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{Y}}\|_C\right]. \qquad (33)$$

Поскольку [2, с. 496]

$$\int_0^{\omega}\|G(t,\tau)\|d\tau \le \frac{\omega^2}{8}, \quad 0 \le t \le \omega,$$

то окончательно имеем из (33)

$$\|\mathcal{L}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}},\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}},\tilde{\mathbf{Y}})\|_C \le \frac{\varepsilon\omega^2}{8}\left[(\alpha_1+\beta_1)\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\|_C + (\alpha_2+\beta_2)\|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{Y}}\|_C\right]. \qquad (34)$$

Аналогичные оценки выполним на основе (32)

$$\|\mathcal{L}_2(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}},\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - \mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{X}},\tilde{\mathbf{Y}})\| \le \varepsilon \int_0^{\omega}\|G_t'(t,\tau)\|\|\tilde{\mathbf{H}}_0(\tau,\lambda)\|d\tau \le \varepsilon \max_t \int_0^{\omega}\|G_t'(t,\tau)\|\|\tilde{\mathbf{H}}_0(\tau,\lambda)\|d\tau \le$$

$$\le \frac{\varepsilon\omega}{2}\left[(\alpha_1+\beta_1)\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\|_C + (\alpha_2+\beta_2)\|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{Y}}\|_C\right].$$

Отсюда следует оценка

$$\|\mathcal{L}_2(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}},\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - \mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{X}},\tilde{\mathbf{Y}})\|_C \le \frac{\varepsilon\omega}{2}\left[(\alpha_1+\beta_1)\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\|_C + (\alpha_2+\beta_2)\|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{Y}}\|_C\right]. \qquad (35)$$

Из оценок (34), (35) имеем следующие выражения для элементов матрицы **K** в данном случае:

$$a_1 = \frac{\omega^2}{8}(\alpha_1+\beta_1), \quad a_2 = \frac{\omega^2}{8}(\alpha_2+\beta_2),$$

$$b_1 = \frac{\omega}{2}(\alpha_1 + \beta_1), \quad b_2 = \frac{\omega}{2}(\alpha_2 + \beta_2).$$

Следствие. *Пусть выполнено условие*

$$\frac{\varepsilon\omega}{2}\left[\frac{\omega}{4}(\alpha_1 + \beta_1) + \alpha_2 + \beta_2\right] < 1. \qquad (36)$$

Тогда задача (29), (30) однозначно разрешима.

Теперь рассмотрим линейную векторную задачу типа [2, с. 431]:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \mathbf{A}_1(t)x + \mathbf{A}_2(t)\frac{dx}{dt} + \mathbf{f}(t), \qquad (37)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(\omega) = x_\omega. \qquad (38)$$

Применительно к (37), (38) условие (36) примет вид [2, с. 497]

$$\frac{\omega}{2}\left(\frac{1}{4}\alpha_1\omega + \alpha_2\right) < 1. \qquad (39)$$

Замечание 3. Реализация изложенного метода применительно к задаче (37), (38) возможна в двух вариантах: 1) на основе введения параметра λ при $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$; 2) на основе представления матрицы $\mathbf{A}_2$ в виде $\mathbf{A}_2 = \tilde{\mathbf{A}}_2 + \lambda\tilde{\tilde{\mathbf{A}}}_2$ и введения λ при $\mathbf{A}_1$. Очевидно, задача (1)–(3) изучена с помощью второго варианта.

В связи с этим возникает задача эффективной декомпозиции (расщепления) матрицы $\mathbf{A}_2$, чтобы обеспечить достаточно быструю сходимость приближенных решений. Здесь можно использовать приемы, изложенные в [9, гл. 1, 5].

Таким образом, условие (36) представляет собой коэффициентное условие однозначной разрешимости задачи (29), (30), которое соответствует условию однозначной разрешимости известной граничной задачи для нелинейного уравнения (в обозначениях [2, с. 496]):

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = x_0, \quad x(p) = x_p,$$

с правой частью $f(t, x, y)$ класса $\mathbb{C}([0,\omega]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей условию Липшица относительно x, y $(y = x' = dx/dt)$. В связи с этим теорема 1 представляет собой развитие известного результата [2, с. 497] применительно к матричной задаче (1)–(3). Условие (18) является сравнительно жестким в силу матричной специфики задачи.

Результаты работы заключаются в следующем:

– дан способ редукции рассмотренной задачи Валле-Пуссена к эквивалентной системе интегральных уравнений;

– получены конструктивные достаточные условия существования и единственности решения задачи;

– выведена оценка области локализации решения;

– установлена связь полученных результатов с соответствующими результатами для классической векторной задачи.

Полученные результаты могут быть использованы при решении соответствующих задач естественных наук и техники, например, некоторых задач физики, теплофизики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Сансоне, Дж.*** Обыкновенные дифференциальные уравнения / Дж. Сансоне. – Т. 1. – М. : ИЛ, 1953. – 348 с.
2. ***Хартман, Ф.*** Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М. : Мир, 1970. – 720 с.
3. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В. С. Авдуевский [и др.]. – М. : Машиностроение, 1975. – 624 с.
4. Теория тепломассообмена : учебник для вузов / С. И. Исаев, И. А. Кожинов, В. И. Кофанов [и др.] ; под ред. А. И. Леонтьева. – М. : Высшая школа, 1979. – 495 с.
5. ***Murty, K. N.*** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journal of mathematical analysis and applications. – 1992. – Vol. 167. – P. 505–515.
6. ***Murty, K. N.*** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems associated with an nth order nonlinear system of differential equations – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, G.V.R.L. Sarma // Mathem. Probl. in Engineering – 2000. – Vol. 6. – P. 395–410.
7. ***Деревенский, В. П*** Квазилинейные матричные дифференциальные уравнения // Изв. вузов. Математика. – 1988. – № 12 – С. 11–17.
8. ***Деревенский, В. П.*** Матричные двусторонние линейные дифференциальные уравнения // Матем. заметки. – 1994. – Т. 55, вып. 1. – С. 35–42.
9. ***Деревенский, В. П.*** Матричные линейные дифференциальные уравнения высших порядков // Дифференц. уравнения – 1993. – Т. 29, № 4 – С. 711–714.
10. ***Лаптинский, В. Н.*** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
11. ***Самойленко, А. М.*** Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто. – Киев : Наукова думка, 1992. – 279 с.
12. ***Демидович, Б. П.*** Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.
13. ***Бибиков, Ю. Н.*** Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибиков. – М. : Высш. шк., 1991. – 304 с.
14. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.] – М. : Наука, 1969. – 456 с.
15. ***Гантмахер, Ф. Р.*** Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 576 с.

Поступила в редакцию 10.05.2016 г.
Контакты: e-mail: alex.kashpar@tut.by (Кашпар Александр Иванович, Лаптинский Валерий Николаевич)

Kashpar A. I., Laptinskiy V. N. THE STUDY OF SOLVABILITY OF DE LA VALLEE POUSSIN BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE LYAPUNOV LINEAR MATRIX EQUATION OF SECOND ORDER.

By applying the constructive method sufficient coefficient conditions of one-valued solvability of a two-point boundary value problem for the second order matrix equation which represents a generalization of the Lyapunov classical equation have been obtained; the assessment of the localization area of the solution has been deduced as well.

Key words: matrix differential equation, boundary value problem, one-valued solvability.