МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 512.548

m-НЕЙТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В *n*-АРНЫХ ГРУППАХ

А. М. Гальмак
доктор физико-математических наук, доцент
Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев

В статье изучаются m-нейтральные последовательности элементов n-арной группы, где n = k(m – 1) + 1, k ≥ 1. Каждую 2-нейтральную последовательность можно отождествить с единицей n-арной группы, определение которой дал В. Дёрнте, а n-нейтральные последовательности совпадают с нейтральными последовательностями, которые были определены Э. Постом.

Ключевые слова: *n*-арная группа, единица, нейтральная последовательность.

1. Введение

Одним из самых широких полиадических обобщений единицы группы являются m-нейтральные последовательности, которые при $m = n$ совпадают с нейтральными последовательностями, а при $m = 2$ отождествляются с единицей n-арной группы. Именно m-нейтральные последовательности являются основным объектом изучения в данной статье.

Согласно В. Дёрнте [1], элемент e n-арной группы $< A, [\ ] >$ называется *единицей* этой n-арной группы, если для любого $x \in A$ и любого $i = 1, 2, \ldots, n$ верно

$$[x\underbrace{e\ldots e}_{n-1}] = [ex\underbrace{e\ldots e}_{n-2}] = \ldots = [\underbrace{e\ldots e}_{n-2}xe] = [\underbrace{e\ldots e}_{n-1}x] = x.$$

Еще одним n-арным обобщением единицы группы является понятие нейтральной последовательности.

Согласно Э. Посту [2], последовательность $e_1 \ldots e_{s(n-1)}$, где $s \geq 1$, элементов n-арной группы $< A, [\ ] >$ называется *нейтральной*, если

$$[e_1 \ldots e_{s(n-1)}x] = [xe_1 \ldots e_{s(n-1)}] = x$$

для любого $x \in A$.

Замечание 1.1. Можно показать, что:

1) *для того чтобы элемент e n-арной группы* $< A, [\ ] >$ *являлся ее единицей, достаточно выполнения для любого* $x \in A$ *равенств*

$$[x\underbrace{e\ldots e}_{n-1}] = [ex\underbrace{e\ldots e}_{n-2}] = x;$$

---

2) *для того чтобы последовательность* $e_1 \ldots e_{s(n-1)}$ *являлась нейтральной в n-арной группе* $< A, [\ ] >$, *достаточно выполнения для любого* $x \in A$ *одного из следующих равенств*

$$[e_1 \ldots e_{s(n-1)}x] = x, \ [xe_1 \ldots e_{s(n-1)}] = x.$$

Последовательность β элементов n-арной группы $< A, [\ ] >$ называется [2] *обратной* к последовательности α элементов этой же n-арной группы, если последовательности $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ являются нейтральными.

Пусть $< A, [\ ] >$ n-арная группа, F_A – свободная полугруппа над алфавитом A, θ_A – отношение эквивалентности Поста [2], определенное на F_A по правилу $(\alpha, \beta) \in \theta_A$ тогда и только тогда, когда существуют последовательности γ и δ из F_A такие, что $[\gamma\alpha\delta] = [\gamma\beta\delta]$. Легко проверяется, что θ_A – конгруэнция на полугруппе F_A, а полугруппа $A^* = F_A / \theta_A$ является группой, которую называют *универсальной обертывающей группой* для n-арной группы $< A, [\ ] >$. Единицей этой n-арной группы является класс $\theta_A(\varepsilon)$, где ε – любая нейтральная последовательность, а обратным элементом для класса $\theta_A(\alpha)$ является класс $\theta_A(\beta)$, где β – любая обратная последовательность для последовательности α.

Далее для сокращения записей вместо символа θ_A будем использовать символ θ без нижнего индекса.

Для всякого $i = 1, \ldots, n - 1$ определим множество

$$A^{(i)} = \{\theta(\alpha) \in A^* \mid l(\alpha) = s(n-1) + i, s \geq 0\},$$

где $\theta(\alpha)$ – класс конгруэнции θ, содержащий последовательность α; $l(\alpha)$ – длина последовательности α.

Ясно, что $A^{(i)} = \{\theta(\alpha) \in A^* \mid l(\alpha) = i\}$. В частности, $A' = \{\theta(a) \mid a \in A\}$.

Если зафиксировать элементы $a_1, \ldots, a_{i-1} \in A$, то

$$A^{(i)} = \{\theta(aa_1 \ldots a_{i-1}) \mid a \in A\} = \{\theta(a_1 \ldots a_{i-1}a) \mid a \in A\}.$$

Для сокращения записей множество $A^{(n-1)}$ часто обозначают распространенным в литературе по n-арным группам символом A_0, то есть полагают $A^{(n-1)} = A_0$.

Замечание 1.2. Если $n = k(m - 1) + 1$, где $n \geq 3$, $m \geq 2$, то легко проверяется, что множество $A^{(m-1)}$ является $(k + 1)$-арной группой относительно $(k + 1)$-арной операции

$$[\theta(\alpha_1)\theta(\alpha_2) \ldots \theta(\alpha_{k+1})]_{k+1} = \theta(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{k+1}).$$

Если $m = 2$, то $k = n - 1$ и получаем n-арную операцию

$$[\theta(a_1)\theta(a_2) \ldots \theta(a_n)]_n = \theta(a_1a_2 \ldots a_n) = \theta([a_1a_2 \ldots a_n]), \ a_1, a_2, \ldots, a_n \in A.$$

Если $m = n$, то $k = 1$ и получаем бинарную операцию

$$[\theta(a_1a_2 \ldots a_{n-1})\theta(b_1b_2 \ldots b_{n-1})]_2 =$$
$$= \theta(a_1a_2 \ldots a_{n-1}b_1b_2 \ldots b_{n-1}) = \theta([a_1a_2 \ldots a_{n-1}b_1]b_2 \ldots b_{n-1}),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1} \in A$.

Иную необходимую информацию о n-арных группах можно найти в книгах [3, 4].

2. *m*-Нейтральные последовательности

Понятия нейтральной последовательности и единицы n-арной группы можно объединить следующим определением из [4].

Определение 2.1. Если $< A, [\ ] >$ – n-арная группа, где $n = k(m - 1) + 1$, $k \geq 1$, то последовательность $\alpha = e_1 \ldots e_{t(n-1)+m-1}$ элементов из A, где $t \geq 0$, называется *m-нейтральной*, если для любого $x \in A$ и любого $j = 1, \ldots, k + 1$ верно равенство

$$[\underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{j-1} x \underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{k-j+1}] = x.$$

Ясно, что n-нейтральные последовательности элементов n-арной группы – это в точности ее нейтральные последовательности. Понятно также, что в n-арной группе любая единица является 2-нейтральной последовательностью, а любая 2-нейтральная последовательность $e_1 \ldots e_{t(n-1)+1}$ либо является ($t = 0$) единицей, либо отождествляется ($t \geq 1$) с единицей $[e_1 \ldots e_{t(n-1)+1}]$.

Справедливость следующего критерия устанавливается простой проверкой.

Предложение 2.1. *Если* $< A, [\ ] >$ – *n-арная группа,* $n = k(m - 1) + 1$, *то последовательность* α *ее элементов является m-нейтральной тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

1) *для любого* $x \in A$ *последовательности* αx *и* $x\alpha$ *эквивалентны, что равносильно равенству* $\theta(\alpha)\theta(x) = \theta(x)\theta(\alpha)$;

2) *последовательность* $\underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{k}$ *является нейтральной.*

Теорема 2.1. *Пусть* α – *m-нейтральная последовательность n-арной группы* $< A, [\ ] >$, γ – *любая обратная для* α *последовательность,* β – *любая последовательность элементов из A. Тогда*:

1) *последовательности* $\alpha\beta$ *и* $\beta\alpha$ *эквивалентны*;

2) *последовательности* $\gamma\beta$ *и* $\beta\gamma$ *эквивалентны.*

3) *для любого* $j = 1, \ldots, k + 1$ *верны равенства*

$$\theta(\underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{j-1} \beta \underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{k-j+1}) = \theta(\beta),\ \theta(\underbrace{\gamma \ldots \gamma}_{j-1} \beta \underbrace{\gamma \ldots \gamma}_{k-j+1}) = \theta(\beta).$$

Доказательство. 1) Вытекает из утверждения 1) предложения 2.1.

2) Пусть δ – любая обратная последовательность для последовательности β. Согласно утверждению 1), $\theta(\alpha)\theta(\delta) = \theta(\delta)\theta(\alpha)$, откуда последовательно получаем

$$(\theta(\alpha)\theta(\delta))^{-1} = (\theta(\delta)\theta(\alpha))^{-1},\ (\theta(\delta))^{-1}(\theta(\alpha))^{-1} = (\theta(\alpha))^{-1}(\theta(\delta))^{-1},$$
$$\theta(\beta)\theta(\gamma) = \theta(\gamma)\theta(\beta),\ \theta(\beta\gamma) = \theta(\gamma\beta).$$

3) Пусть $\beta = x_1 \ldots x_r$, где $x_1, \ldots, x_r \in A$, $r \geq 1$. Тогда, используя 1) и определение m-нейтральной последовательности, получим

$$\theta(\underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{j-1} \beta \underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{k-j+1}) = \theta(\underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{j-1} x_1 \ldots x_r \underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{k-j+1}) =$$

$$= \theta(\underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{j-1} x_1)\theta(x_2 \ldots x_r\alpha)\theta(\underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{k-j}) = \theta(\underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{j-1} x_1)\theta(\alpha x_2 \ldots x_r)\theta(\underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{k-j}) =$$

$$= \theta(\underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{j-1} x_1 \alpha)\theta(x_2 \ldots x_r \alpha)\theta(\underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{k-j-1}) = \theta(\underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{j-1} x_1 \alpha)\theta(\alpha x_2 \ldots x_r)\theta(\underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{k-j-1}) =$$

$$= \theta(\underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{j-1} x_1 \alpha\alpha)\theta(x_2 \ldots x_r)\theta(\underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{k-j-1}) =$$

....

$$= \theta(\underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{j-1} x_1 \underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{k-j-1})\theta(x_2 \ldots x_r) = \theta(x_1)\theta(x_2 \ldots x_r) = \theta(x_1 x_2 \ldots x_r) = \theta(\beta).$$

Следовательно, верно первое равенство из 3).

Из этого равенства следует

$$\theta(\underbrace{\gamma \ldots \gamma}_{j-1})\theta(\underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{j-1} \beta \underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{k-j+1})\theta(\underbrace{\gamma \ldots \gamma}_{k-j+1}) = \theta(\underbrace{\gamma \ldots \gamma}_{j-1})\theta(\beta)\theta(\underbrace{\gamma \ldots \gamma}_{k-j+1}),$$

$$\theta(\underbrace{\gamma \ldots \gamma}_{j-1} \underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{j-1} \beta \underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{k-j+1} \underbrace{\gamma \ldots \gamma}_{k-j+1}) = \theta(\underbrace{\gamma \ldots \gamma}_{j-1} \beta \underbrace{\gamma \ldots \gamma}_{k-j+1}),$$

откуда, используя взаимную обратность последовательностей α и γ, получаем второе равенство из 3). Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Если α – m-нейтральная последовательность n-арной группы $< A, [\ ] >$, γ – любая обратная для нее последовательность, то для любого $x \in A$ и любого $j = 1, \ldots, k + 1$ верно равенство* $[\underbrace{\gamma \ldots \gamma}_{j-1} x \underbrace{\gamma \ldots \gamma}_{k-j+1}] = x$.

Теорема 2.2. *Для любых m-нейтральных последовательностей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}$ n-арной группы $< A, [\ ] >$ последовательность $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{k+1}$ также является m-нейтральной.*

Доказательство. Пусть $l(\alpha_j) = t_j(n - 1) + m - 1$ – длина последовательности α_j ($j = 1, \ldots, k + 1$). Тогда $l(\alpha) = t(n - 1) + m - 1$ – длина последовательности α, где

$$t = (t_1 + \ldots + t_{k+1} + 1)(n - 1) + m - 1.$$

Кроме того, для любого $x \in A$ и любого $j = 1, \ldots, k + 1$, используя утверждение 1) теоремы 2.1 и определение m-нейтральной последовательности, получим

$$[\underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{j-1} x \underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{k-j+1}] =$$

$$= [\underbrace{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{k+1} \ldots \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{k+1}}_{j-1} x \underbrace{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{k+1} \ldots \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{k+1}}_{k-j+1}] =$$

$$= [\underbrace{\alpha_{k+1} \ldots \alpha_{k+1}}_{j-1} \ldots [\underbrace{\alpha_2 \ldots \alpha_2}_{j-1} [\underbrace{\alpha_1 \ldots \alpha_1}_{j-1} x \underbrace{\alpha_1 \ldots \alpha_1}_{k-j+1}] \underbrace{\alpha_2 \ldots \alpha_2}_{k-j+1}] \ldots \underbrace{\alpha_{k+1} \ldots \alpha_{k+1}}_{k-j+1}] =$$

$$= [\underbrace{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+1}}_{j-1} \ldots [\underbrace{\alpha_2\ldots\alpha_2}_{j-1} x \underbrace{\alpha_2\ldots\alpha_2}_{k-j+1}] \ldots \underbrace{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+1}}_{k-j+1}] = \ldots$$

$$\ldots = [\underbrace{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+1}}_{j-1} x \underbrace{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+1}}_{k-j+1}] = x,$$

то есть $[\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{j-1} x \underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{k-j+1}] = x$. Следовательно, α – m-нейтральная последовательность. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Полагая в теореме 2.2 соответственно $m = 2$ и $m = n$, получим известные результаты:

1) *множество* $\mathbf{E}(A)$ *всех единиц n-арной группы* $< A, [\,] >$ *замкнуто относительно n-арной операции* $[\,]$, *то есть* $< \mathbf{E}(A), [\,] >$ *– n-арная подполугруппа в* $< A, [\,] >$;

2) *если* α *и* β *– нейтральные последовательности n-арной группы* $< A, [\,] >$, *то последовательность* $\alpha\beta$ *также нейтральна в* $< A, [\,] >$.

Обозначим через $\mathbf{N}(A, m)$ множество всех m-нейтральных последовательностей n-арной группы $< A, [\,] >$. Ясно, что множество $\mathbf{N}(A, 2)$ включает в себя множество $\mathbf{E}(A)$ всех единиц этой n-арной группы, то есть $\mathbf{E}(A) \subseteq \mathbf{N}(A, 2)$, а множество $\mathbf{N}(A, n)$ совпадает с множеством всех ее нейтральных последовательностей. Равенство $\mathbf{E}(A) = \mathbf{N}(A, 2)$ имеет место только в случае отсутствия единиц в n-арной группе $< A, [\,] >$. Если же множество $\mathbf{E}(A)$ не пусто, то множество $\mathbf{N}(A, 2)$ содержит не только каждую единицу e, но и любую эквивалентную ей последовательность $e_1 \ldots e_{t(n-1)+1}$ длины $t(n-1) + 1$, которая при $t \geq 1$ не принадлежит $\mathbf{E}(A)$.

В $(k + 1)$-арной группе $< A^{(m-1)}, [\,] >$ выделим подмножество

$$\mathbf{N}(A^{(m-1)}) = \{\theta(\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{N}(A, m)\}.$$

Так как для любого элемента $\theta(\alpha)$ непустого множества $\mathbf{N}(A^{(m-1)})$ в качестве последовательности α можно выбрать последовательность длины $m - 1$, то

$$\mathbf{N}(A^{(m-1)}) = \{\theta(\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{N}(A, m), l(\alpha) = m - 1\}.$$

В частности, $\mathbf{N}(A') = \{\theta(a) \mid a \in \mathbf{E}(A)\}$.

Предложение 2.2. *Пусть* $< A, [\,] >$ *– n-арная группа,*

$$U \in \mathbf{N}(A^{(m-1)}),\ V \in A^{(m-1)}.$$

Тогда для любого $j = 1, \ldots, k + 1$ *справедливы следующие равенства*

$$[\underbrace{U\ldots U}_{j-1} V \underbrace{U\ldots U}_{k-j+1}]_{k+1} = V,\ [\underbrace{U^{-1}\ldots U^{-1}}_{j-1} V \underbrace{U^{-1}\ldots U^{-1}}_{k-j+1}]_{k+1} = V,$$

где U^{-1} *– обратный для* U *в универсальной обертывающей группе* A^*.

Доказательство. Положим $U = \theta(\alpha)$, $V = \theta(\beta)$. Так как последовательность α – m-нейтральная, то, в силу утверждения 1) теоремы 2.1 $\theta(\alpha)\theta(\beta) = \theta(\beta)\theta(\alpha)$, а согласно утверждению 2) предложения 2.1, последовательность $\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{k}$ является нейтральной. Поэтому

$$[\underbrace{U\ldots U}_{j-1}V\underbrace{U\ldots U}_{k-j+1}]_{k+1}=[\underbrace{\theta(\alpha)\ldots\theta(\alpha)}_{j-1}\theta(\beta)\underbrace{\theta(\alpha)\ldots\theta(\alpha)}_{k-j+1}]_{k+1}=$$

$$=\underbrace{\theta(\alpha)\ldots\theta(\alpha)}_{j-1}\theta(\beta)\underbrace{\theta(\alpha)\ldots\theta(\alpha)}_{k-j+1}=$$

$$=\underbrace{\theta(\alpha)\ldots\theta(\alpha)}_{k}\theta(\beta)=\theta(\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{k})\theta(\beta)=\theta(\beta)=V,$$

то есть верно первое равенство из формулировки предложения.

Второе равенство из его формулировки является следствием первого. Предложение доказано.

Замечание 2.2. Предложение 2.2 может быть получено как следствие утверждения 3) теоремы 2.1 и определения m-нейтральной последовательности.

Первое равенство из предложения 2.2 позволяет сформулировать предложение, устанавливающее связь между m-нейтральными последовательностями n-арной группы $< A, [\ ] >$ и единицами $(k+1)$-арной группы $< A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1} >$.

Предложение 2.3. *Если последовательность* α *элементов* n*-арной группы* $< A, [\ ] >$ *является* m*-нейтральной, то класс* $\theta(\alpha)$ *– единица* $(k+1)$*-арной группы* $< A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1} >$ *и верно включение* $\mathbf{N}(A^{(m-1)}) \subseteq \mathbf{E}(A^{(m-1)})$.

Возникает естественный вопрос: *верно ли обратное включение*?

Следствием положительного ответа на этот вопрос было бы равенство

$$\mathbf{N}(A^{(m-1)}) = \mathbf{E}(A^{(m-1)}).$$

В следующем разделе будет приведен пример, показывающий, что существуют полиадические группы, для которых ответ на сформулированный выше вопрос является отрицательным. Следовательно, указанное равенство в таких полиадических группах невозможно.

Покажем, что при любом гомоморфизме одной n-арной группы на другую n-арную группу образ m-нейтральной последовательности является m-нейтральной последовательностью.

Предложение 2.4. *Пусть* $\alpha = e_1 \ldots e_{t(n-1)+m-1}$ *– m-нейтральная последовательность n-арной группы* $< A, [\ ] >$, φ *– гомоморфизм этой арной группы на n-арную группу* $< B, \{\ \} >$. *Тогда* $\alpha^\varphi = e_1^\varphi \ldots e_{t(n-1)+m-1}^\varphi$ *– m-нейтральная последовательность n-арной группы* $< B, \{\ \} >$.

Доказательство. Пусть y – произвольный элемент из B, x – такой элемент из A, что $x^\varphi = y$. Тогда, для любого $j = 1, \ldots, k+1$, используя m-нейтральность последовательности α, получим

$$\{\underbrace{\alpha^\varphi\ldots\alpha^\varphi}_{j-1}y\underbrace{\alpha^\varphi\ldots\alpha^\varphi}_{k-j+1}\}=$$

$$=\{\underbrace{e_1^\varphi\ldots e_{t(n-1)+m-1}^\varphi\ldots e_1^\varphi\ldots e_{t(n-1)+m-1}^\varphi}_{j-1}x^\varphi\underbrace{e_1^\varphi\ldots e_{t(n-1)+m-1}^\varphi\ldots e_1^\varphi\ldots e_{t(n-1)+m-1}^\varphi}_{k-j+1}\}=$$

$$= [\underbrace{e_1 \dots e_{t(n-1)+m-1} \dots e_1 \dots e_{t(n-1)+m-1}}_{j-1} x \underbrace{e_1 \dots e_{t(n-1)+m-1} \dots e_1 \dots e_{t(n-1)+m-1}}_{k-j+1}]^{\varphi} =$$

$$= [\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} x \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j+1}]^{\varphi} = x^{\varphi} = y,$$

то есть

$$\{\underbrace{\alpha^{\varphi} \dots \alpha^{\varphi}}_{j-1} y \underbrace{\alpha^{\varphi} \dots \alpha^{\varphi}}_{k-j+1}\} = y.$$

Следовательно, последовательность α^{φ} является m-нейтральной в n-арной группе $< B, \{ \} >$. Предложение доказано.

При $n = 2$ ($n = m$) предложение 2.4 включает в себя соответствующие результаты о единицах (нейтральных последовательностях) n-арных групп.

Предложение 2.5. *Пусть* $< A, [\ ] >$ *– n-арная группа,* $U \in \mathbf{N}(A^{(m-1)})$, $V \in A^{(m-1)}$, φ *– автоморфизм* $(k + 1)$*-арной группы* $< A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1} >$. *Тогда для любого* $j = 1, \dots, k + 1$ *справедливо равенство*

$$[\underbrace{U^{\varphi} \dots U^{\varphi}}_{j-1} V \underbrace{U^{\varphi} \dots U^{\varphi}}_{k-j+1}]_{k+1} = V$$

и верно включение $\mathbf{N}^{\varphi}(A^{(m-1)}) \subseteq \mathbf{E}(A^{((m-1)})$.

Доказательство. Так как $V^{\varphi^{-1}} \in A^{(m-1)}$, то по предложению 2.2

$$[\underbrace{U \dots U}_{j-1} V^{\varphi^{-1}} \underbrace{U \dots U}_{k-j+1}]_{k+1} = V^{\varphi^{-1}},$$

откуда последовательно получаем

$$([\underbrace{U \dots U}_{j-1} V^{\varphi^{-1}} \underbrace{U \dots U}_{k-j+1}]_{k+1})^{\varphi} = (V^{\varphi^{-1}})^{\varphi},$$

$$[\underbrace{U^{\varphi} \dots U^{\varphi}}_{j-1} (V^{\varphi^{-1}})^{\varphi} \underbrace{U^{\varphi} \dots U^{\varphi}}_{k-j+1}]_{k+1} = V,$$

$$[\underbrace{U^{\varphi} \dots U^{\varphi}}_{j-1} V \underbrace{U^{\varphi} \dots U^{\varphi}}_{k-j+1}]_{k+1} = V.$$

Последнее равенство означает, что U^{φ} – единица $(k + 1)$-арной группы $< A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1} >$. Следовательно, верно включение из формулировки предложения. Предложение доказано.

Теорема 2.3. *Пусть* α *– m-нейтральная последовательность n-арной группы* $< A, [\ ] >$ *с непустым центром,* φ *– автоморфизм* $(k + 1)$*-арной группы* $< A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1} >$, $U = \theta(\alpha)$, $U^{\varphi} = \theta(\delta)$. *Тогда* δ *– m-нейтральная последовательность n-арной группы* $< A, [\ ] >$.

Доказательство. Пусть x – произвольный элемент из A, $c_1, \ldots, c_{m-2}$ – фиксированные элементы из центра n-арной группы $< A, [\ ] >$ и положим $V = \theta(xc_1 \ldots c_{m-2})$.

Так как $U = \theta(\alpha) \in \mathbf{N}(A^{(m-1)})$, $V \in A^{(m-1)}$, то, согласно предложению 2.5, имеем

$$[\underbrace{U^{\varphi} \ldots U^{\varphi}}_{j-1} V \underbrace{U^{\varphi} \ldots U^{\varphi}}_{k-j+1}]_{k+1} = V.$$

Тогда, учитывая принадлежность элементов $c_1, \ldots, c_{m-2}$ центру n-арной группы $< A, [\ ] >$, последовательно получаем

$$[\underbrace{\theta(\delta)\ldots\theta(\delta)}_{j-1}\theta(xc_1 \ldots c_{m-2})\underbrace{\theta(\delta)\ldots\theta(\delta)}_{k-j+1}]_{k+1} = \theta(xc_1 \ldots c_{m-2}),$$

$$\theta(\underbrace{\delta\ldots\delta}_{j-1} xc_1 \ldots c_{m-2}\underbrace{\delta\ldots\delta}_{k-j+1}) = \theta(xc_1 \ldots c_{m-2}),$$

$$\theta(\underbrace{\delta\ldots\delta}_{j-1} x \underbrace{\delta\ldots\delta}_{k-j+1} c_1 \ldots c_{m-2}) = \theta(xc_1 \ldots c_{m-2}),$$

$$\theta(\underbrace{\delta\ldots\delta}_{j-1} x \underbrace{\delta\ldots\delta}_{k-j+1})\theta(c_1 \ldots c_{m-2}) = \theta(x)\theta(c_1 \ldots c_{m-2}),$$

$$\theta(\underbrace{\delta\ldots\delta}_{j-1} x \underbrace{\delta\ldots\delta}_{k-j+1}) = \theta(x),\ \theta([\underbrace{\delta\ldots\delta}_{j-1} x \underbrace{\delta\ldots\delta}_{k-j+1}]) = \theta(x),\ [\underbrace{\delta\ldots\delta}_{j-1} x \underbrace{\delta\ldots\delta}_{k-j+1}] = x.$$

Следовательно, δ – m-нейтральная последовательность n-арной группы $< A, [\ ] >$. Теорема доказана.

3. Примеры

Замечание 3.1. Пусть $< A, [\ ] >$ – n-арная группа, производная от группы A. Для того, чтобы отличать последовательность $a_1a_2 \ldots a_i$, составленную из элементов множества A, от произведения тех же элементов в группе A, будем для этого произведения использовать запись $a_1 \bullet a_2 \bullet \ldots \bullet a_i$, отождествляя жирную точку с операцией в группе A. Ясно, что последовательности $a_1a_2 \ldots a_i$ и $b_1b_2 \ldots b_{k(n-1)+i}$ эквивалентны в n-арной группе $< A, [\ ] >$ тогда и только тогда, когда соответствующие произведения совпадают:

$$a_1 \bullet a_2 \bullet \ldots \bullet a_i = b_1 \bullet b_2 \bullet \ldots \bullet b_{k(n-1)+i}.$$

Пример 3.1. Пусть $\mathbf{B}_3 = \{(12), (13), (23)\}$ – множество всех нечетных подстановок множества $\{1, 2, 3\}$, $< \mathbf{B}_3, [\ ] >$ – 7-арная группа с 7-арной операцией, производной от операции в симметрической группе $\mathbf{S}_3$.

Равенство $7 = 3(3 - 1) + 1$ показывает, что в $< \mathbf{B}_3, [\ ] >$ можно рассматривать 3-нейтральные последовательности. Кроме того, согласно замечанию 1.2, существует 4-арная группа $< \mathrm{B}_3^{(2)}, [\ ]_4 >$.

Так как любая последовательность длины 2, составленная из элементов 7-арной группы $< \mathbf{B}_3, [\ ] >$, эквивалентна одной из последовательностей

$$\lambda = (12)(12),\ \mu = (12)(13),\ \nu = (12)(23),$$

то $\mathrm{B}_3^{(2)} = \{\theta(\lambda), \theta(\mu), \theta(\nu)\}$.

Найдем множество $\mathbf{E}(B_3^{(2)})$ всех единиц 4-арной группы $< B_3^{(2)}, [\ ]_4 >$.

1) Так как последовательности $\lambda = (12)(12)$ соответствует тождественная подстановка $(12) \bullet (12)$, то легко проверяется, что класс $\theta(\lambda)$ является единицей 4-арной группы $< B_3^{(2)}, [\ ]_4 >$.

2) Так как

$$[\theta(\lambda)\theta(\mu)\theta(\mu)\theta(\mu)]_4 = [\theta((12)(12))\theta((12)(13))\theta((12)(13))\theta((12)(13))]_4 =$$
$$= \theta((12)[(12)(12)(13)(12)(13)(12)(13)]) = \theta((12)(12)) = \theta(\lambda),$$
$$[\theta(\mu)\theta(\lambda)\theta(\mu)\theta(\mu)]_4 = [\theta((12)(13))\theta((12)(12))\theta((12)(13))\theta((12)(13))]_4 =$$
$$= \theta((12)[(13)(12)(12)(12)(13)(12)(13)]) = \theta((12)(12)) = \theta(\lambda),$$

то

$$[\theta(\lambda)\theta(\mu)\theta(\mu)\theta(\mu)]_4 = [\theta(\mu)\theta(\lambda)\theta(\mu)\theta(\mu)]_4 = \theta(\lambda).$$

Аналогично, так как

$$[\theta(\nu)\theta(\mu)\theta(\mu)\theta(\mu)]_4 = [\theta((12)(23))\theta((12)(13))\theta((12)(13))\theta((12)(13))]_4 =$$
$$= \theta((12)[(23)(12)(13)(12)(13)(12)(13)]) = \theta((12)(23)) = \theta(\nu),$$
$$[\theta(\mu)\theta(\nu)\theta(\mu)\theta(\mu)]_4 = [\theta((12)(13))\theta((12)(23))\theta((12)(13))\theta((12)(13))]_4 =$$
$$= \theta((12)[(13)(12)(23)(12)(13)(12)(13)]) = \theta((12)(23)) = \theta(\nu),$$

то

$$[\theta(\nu)\theta(\mu)\theta(\mu)\theta(\mu)]_4 = [\theta(\mu)\theta(\nu)\theta(\mu)\theta(\mu)]_4 = \theta(\nu).$$

Таким образом, согласно замечанию 1.1, класс $\theta(\mu)$ является единицей 4-арной группы $< B_3^{(2)}, [\ ]_4 >$.

3) Так как

$$[\theta(\lambda)\theta(\nu)\theta(\nu)\theta(\nu)]_4 = [\theta((12)(12))\theta((12)(23))\theta((12)(23))\theta((12)(23))]_4 =$$
$$= \theta((12)[(12)(12)(23)(12)(23)(12)(23)]) = \theta((12)(12)) = \theta(\lambda),$$
$$[\theta(\nu)\theta(\lambda)\theta(\nu)\theta(\nu)]_4 = [\theta((12)(23))\theta((12)(12))\theta((12)(23))\theta((12)(23))]_4 =$$
$$= \theta((12)[(23)(12)(12)(12)(23)(12)(23)]) = \theta((12)(12)) = \theta(\lambda),$$

то

$$[\theta(\lambda)\theta(\nu)\theta(\nu)\theta(\nu)]_4 = [\theta(\nu)\theta(\lambda)\theta(\nu)\theta(\nu)]_4 = \theta(\lambda).$$

Аналогично, так как

$$[\theta(\mu)\theta(\nu)\theta(\nu)\theta(\nu)]_4 = [\theta((12)(13))\theta((12)(23))\theta((12)(23))\theta((12)(23))]_4 =$$
$$= \theta((12)[(13)(12)(23)(12)(23)(12)(23)]) = \theta((12)(13)) = \theta(\mu),$$
$$[\theta(\nu)\theta(\mu)\theta(\nu)\theta(\nu)]_4 = [\theta((12)(23))\theta((12)(13))\theta((12)(23))\theta((12)(23))]_4 =$$
$$= \theta((12)[(23)(12)(13)(12)(23)(12)(23)]) = \theta((12)(13)) = \theta(\mu),$$

то

$$[\theta(\mu)\theta(\nu)\theta(\nu)\theta(\nu)]_4 = [\theta(\nu)\theta(\mu)\theta(\nu)\theta(\nu)]_4 = \theta(\mu).$$

Таким образом, согласно замечанию 1.1, класс $\theta(\nu)$ является единицей 4-арной группы $< B_3^{(2)}, [\ ]_4 >$.

Мы показали, что в 4-арной группе $< B_3^{(2)}, [\ ]_4 >$ все элементы являются единицами, то есть $\mathbf{E}(B_3^{(2)}) = B_3^{(2)}$.

Так как

$$[(12)\mu\mu\mu] = [(12)(12)(13)(12)(13)(12)(13)] = (12),$$

$$[\mu(12)\mu\mu] = [(12)(13)(12)(12)(13)(12)(13)] = (13),$$

то $[(12)\mu\mu\mu] \neq [\mu(12)\mu\mu]$. Следовательно, последовательность μ не является 3-нейтральной.

Так как

$$[(12)\nu\nu\nu] = [(12)(12)(23)(12)(23)(12)(23)] = (12),$$

$$[\nu(12)\nu\nu] = [(12)(23)(12)(12)(23)(12)(23)] = (23),$$

то $[(12)\nu\nu\nu] \neq [\nu(12)\nu\nu]$. Следовательно, последовательность ν не является 3-нейтральной.

Ясно, что последовательность λ является 3-нейтральной.

Таким образом, $< \mathbf{N}(B_3^{(2)}) = \{\theta(\lambda)\}, [\ ]_4 >$ – одноэлементная 4-арная подгруппа 4-арной группы $< B_3^{(2)}, [\ ]_4 >$, отличная от множества $\mathbf{E}(B_3^{(2)}) = B_3^{(2)}$ всех ее единиц, то есть $\mathbf{N}(B_3^{(2)}) \neq \mathbf{E}(B_3^{(2)})$.

Покажем, что для n-арной группы $< A, [\ ] >$ равенство $\mathbf{N}(A^{(m-1)}) = \mathbf{E}(A^{(m-1)})$ все же возможно.

Пример 3.2. Пусть $< \mathbf{B}_3, [\ ] >$ – та же 7-арная группа, что и в примере 3.1.

Равенство $7 = 2(4 - 1) + 1$ показывает, что в $< \mathbf{B}_3, [\ ] >$ можно рассматривать 4-нейтральные последовательности. Кроме того, согласно замечанию 1.2, существует тернарная группа $< B_3^{(3)}, [\ ]_3 >$.

Покажем, что множества $\mathbf{E}(B_3^{(3)})$ и $\mathbf{N}(B_3^{(3)})$ – пустые, то есть совпадают.

Так как любая последовательность длины 3, составленная из элементов 7-арной группы $< \mathbf{B}_3, [\ ] >$, эквивалентна одной из последовательностей

$$\lambda = (12)(12)(12),\ \mu = (12)(12)(13),\ \nu = (12)(12)(23),$$

то $B_3^{(3)} = \{\theta(\lambda), \theta(\mu), \theta(\nu)\}$.

Найдем множество $\mathbf{E}(B_3^{(3)})$ всех единиц тернарной группы $< B_3^{(3)}, [\ ]_3 >$.

Так как

$$[\theta(\lambda)\theta(\mu)\theta(\lambda)]_3 = [\theta(12)(12)(12)\theta((12)(12)(13)\theta(12)(12)(12)]_3 =$$
$$= \theta((12)(13)(12)) = \theta((12)(12)(23)) \neq \theta(\mu),$$

то класс $\theta(\lambda)$ не является единицей в $< B_3^{(3)}, [\ ]_3 >$.

Так как

$$[\theta(\mu)\theta(\lambda)\theta(\mu)]_3 = [\theta(12)(12)(13)\theta((12)(12)(12)\theta(12)(12)(13)]_3 =$$
$$= \theta((13)(12)(13)) = \theta((12)(12)(23)) \neq \theta(\lambda),$$

то класс $\theta(\mu)$ не является единицей в $< B_3^{(3)}, [\ ]_3 >$.

Так как

$$[\theta(\nu)\theta(\lambda)\theta(\nu)]_3 = [\theta(12)(12)(23)\theta((12)(12)(12)\theta(12)(12)(23)]_3 =$$
$$= \theta((23)(12)(23)) = \theta((12)(12)(13)) \neq \theta(\lambda),$$

то класс $\theta(\nu)$ не является единицей в $< B_3^{(3)}, [\ ]_3 >$.

Таким образом, в тернарной группе $< B_3^{(3)}, [\ ]_3 >$ нет единиц.

Заметим, что при этом для любых последовательностей $\alpha, \beta \in \{\lambda, \mu, \nu\}$ справедливы равенства

$$[\theta(\beta)\theta(\alpha)\theta(\alpha)]_3 = [\theta(\alpha)\theta(\alpha)\theta(\beta)]_3 = \theta(\beta),$$

так как последовательности $\lambda\lambda$, $\mu\mu$ и $\nu\nu$ являются нейтральными в 7-арной группе $< \mathbf{B}_3, [\ ] >$.

Так как множество $\mathbf{E}(B_3^{(3)})$ всех единиц тернарной группы $< B_3^{(3)}, [\ ]_3 >$ пусто, то по предложению 2.3 тернарная группа $< B_3^{(3)}, [\ ]_3 >$ не обладает 4-нейтральными последовательностями, то есть множество $\mathbf{N}(B_3^{(3)})$) также пусто.

Покажем это непосредственно, не используя предложение 2.3. Так как

$$[\lambda(13)\lambda] = [(12)(12)(12)(13)(12)(12)(12)] = (12)(12)(23) \neq (13),$$
$$[\mu(12)\mu] = [(12)(12)(13)(12)(12)(12)(13)] = (12)(12)(23) \neq (12),$$
$$[\nu(12)\nu] = [(12)(12)(23)(12)(12)(12)(23)] = (12)(12)(13) \neq (12),$$

то последовательности λ, μ и ν не являются 4-нейтральными.

Таким образом, $\mathbf{N}(B_3^{(3)}) = \mathbf{E}(B_3^{(3)}) = \varnothing$.

Приведем еще один пример, показывающий, что равенство $\mathbf{N}(A^{(m-1)}) = \mathbf{E}(A^{(m-1)})$ возможно и для непустых множеств $\mathbf{N}(A^{(m-1)})$ и $\mathbf{E}(A^{(m-1)})$.

Пример 3.3. Пусть $\mathbf{B}_3$ – то же множество, что и в примере 3.1, $< \mathbf{B}_3, [\ ] >$ – 5-арная группа с 5-арной операцией, производной от операции в симметрической группе $\mathbf{S}_3$.

Равенство $5 = 2(3 - 1) + 1$ показывает, что в $< \mathbf{B}_3, [\ ] >$ можно рассматривать 3-нейтральные последовательности. Кроме того, согласно замечанию 1.2, существует тернарная группа $< B_3^{(2)}, [\ ]_3 >$.

Так как любая последовательность длины 2, составленная из элементов 5-арной группы $< \mathbf{B}_3, [\ ] >$, эквивалентна одной из последовательностей

$$\lambda = (12)(12),\ \mu = (12)(13),\ \nu = (12)(23),$$

то $B_3^{(2)} = \{\theta(\lambda), \theta(\mu), \theta(\nu)\}$.

Найдем множество $\mathbf{E}(B_3^{(2)})$ всех единиц тернарной группы $< B_3^{(2)}, [\ ]_3 >$.

Так как последовательности $\lambda = (12)(12)$ соответствует тождественная подстановка $(12) \bullet (12)$, то легко проверяется, что класс $\theta(\lambda)$ является единицей тернарной группы $< B_3^{(2)}, [\ ]_3 >$.

Так как

$$[\theta(\lambda)\theta(\mu)\theta(\mu)]_3 = [\theta((12)(12))\theta((12)(13))\theta((12)(13))]_3 =$$
$$= \theta((12)[(12)(12)(13)(12)(13)]) = \theta((12)(23)) \neq \theta(\lambda),$$

то класс $\theta(\mu)$ не является единицей тернарной группы $< B_3^{(2)}, [\ ]_3 >$.

Так как

$$[\theta(\lambda)\theta(\nu)\theta(\nu)]_3 = [\theta((12)(12))\theta((12)(23))\theta((12)(23))]_3 =$$
$$= \theta((12)[(12)(12)(23)(12)(23)]) = \theta((12)(13)) \neq \theta(\lambda),$$

то, класс $\theta(\nu)$ не является единицей тернарной группы $< B_3^{(2)}, [\ ]_3 >$.

Таким образом, множество $\mathbf{E}(B_3^{(2)}) = \{\theta(\lambda)\}$ является одноэлементным.

Ясно, что последовательность λ является 3-нейтральной. А так как $\theta(\lambda)$ – единственный элемент множества $\mathbf{E}(B_3^{(2)})$, то по предложению 2.3 $\mathbf{N}(B_3^{(2)}) = \{\theta(\lambda)\}$.

Покажем это непосредственно, не используя предложение 2.3. Так как

$$[(12)\mu\mu] = [(12)(12)(13)(12)(13)] = (23) \neq (12),$$
$$[(12)\nu\nu] = [(12)(12)(23)(12)(23)] = (13) \neq (12),$$

то последовательности μ и ν не являются 3-нейтральными.

Таким образом, $\mathbf{N}(\mathrm{B}_3^{(2)}) = \mathbf{E}(\mathrm{B}_3^{(2)}) = \{\theta(\lambda)\}$.

Заметим, что в каждом из трех приведенных примеров центр рассматриваемой тернарной группы пустой.

Пример 3.1 показывает, что для класса $\theta(\alpha)$, являющегося единицей $(k+1)$-арной группы $< A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1} >$, последовательность α может не быть m-нейтральной. Однако, имеет место

Предложение 3.1. *Пусть $n = k(m-1)+1$, $< A, [\ ] >$ – n-арная группа, $\theta(\alpha)$ – единица $(k+1)$-арной группы $< A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1} >$. Тогда последовательность $\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{k}$ является нейтральной.*

Доказательство. Если $\theta(\alpha)$ – единица $(k+1)$-арной группы $< A^{(m-1)}, [\ ]_{k+1} >$, x – произвольный, $x_1, \ldots, x_{t(n-1)+m-2}$ – фиксированные элементы из A, $\beta = x_1 \ldots x_{t(n-1)+m-2}x$, то

$$[\theta(\beta)\underbrace{\theta(\alpha)\ldots\theta(\alpha)}_{k}]_{k+1} = \theta(\beta),$$

откуда последовательно получаем

$$\theta(\beta\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{k}) = \theta(\beta),$$

$$\theta(x_1 \ldots x_{t(n-1)+m-2}x\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{k}) = \theta(x_1 \ldots x_{t(n-1)+m-2}x),$$

$$\theta(x_1 \ldots x_{t(n-1)+m-2})\theta(x\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{k}) = \theta(x_1 \ldots x_{t(n-1)+m-2})\theta(x),$$

$$\theta(x\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{k}) = \theta(x),\ [x\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{k}] = x.$$

Следовательно, последовательность $\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{k}$ является нейтральной в n-арной группе $< A, [\ ] >$. Предложение доказано.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Dornte, W.*** Untersuchungen uber einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dornte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
2. ***Post, E. L.*** Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. ***Русаков, С. А.*** Алгебраические n-арные системы / С. А. Русаков. – Минск : Навука і тэхніка, 1992.
4. ***Гальмак, А. М.*** n-Арные группы. Часть 1 / А. М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

Поступила в редакцию 18.11.2015 г.

Контакты: (Гальмак Александр Михайлович)

Galmak A. M. *m*-NEUTRAL SEQUENCIES IN *n*-ARY GROUPS.

The article deals with m-neutral sequences of the elements of n-ary group where $n = k(m - 1) + 1$, $k \geq 1$. Every 2-neutral sequence can be identified with the unity of n-ary group defined by W. Dornte and n-neutral sequences coincide with neutral sequences defined by E. Post.

Key words: n-ary group, identity, neutral sequence.