УДК 511.42

ЗНАЧЕНИЯ НЕПРИВОДИМЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОЛИНОМОВ

Н. В. Бударина
ассистент кафедры математики
Дублинский институт технологий, г. Дублин, Ирландия
В. И. Берник
доктор физико-математических наук, профессор
Белорусский государственый университет
Х. О'Доннелл
заведующий кафедрой математики
Дублинский институт технологий, г. Дублин, Ирландия

В известной лемме А.О. Гельфонда утверждается, что если в трансцендентной точке x целочисленный многочлен $P(x)$ степени n и высоты H (максимум модулей всех коэффициентов) удовлетворяет неравенству $\left|P(x)\right| < H^{-w}$, $w > 6n$, то существует его делитель $t(x)$, равный степени неприводимого многочлена, который удовлетворяет неравенству $\left|t(x)\right| < c_1(n)H^{-w+6n}$. В работе эта лемма усиливается: $w > 2{,}5n$ и $\left|t(x)\right| < c_2(n)H^{-w+2{,}5n}$.

Ключевые слова: приводимый полином, неприводимый делитель, приближения нуля значениями полиномов, лемма Гельфонда, диофантовы приближения.

Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ – целочисленный полином степени $\deg P = n$ и высоты $H(P) = \max_{0\le i\le n}\left|a_i\right|$. В любой точке $x \in \mathbb{R}$ для каждого $Q \in \mathbb{N}_{>1}$ всегда можно найти многочлен $P(x)$, $H(P) \le Q$, такой, что

$$\left|P(x)\right| < c_1(n)Q^{-n}. \quad (1)$$

Это следует из теоремы Минковского о линейных формах [1], и может быть доказано, используя принцип ящиков Дирихле. Неравенство (1) неулучшаемо. Так, например, $\left|P\left(\sqrt[n+1]{2}\right)\right| > c_2(n)H^{-n}$ для любого полинома $P(x)$, $\deg P \le n$, а при показателе степени w вместо n в (1) и $w > n$ мера Лебега множества $x \in \mathbb{R}$, для которых выполняется неравенство $\left|P(x)\right| < Q^{-w}$, $H(P) \le Q$, хотя бы для одного $P(x)$, мала, и может быть сделана меньше любого $\varepsilon > 0$ при $Q > Q_0(\varepsilon)$ [2]. Здесь и далее все величины $c_i = c_i(n)$ зависят только от n. В [3] получено точное значение для размерности Хаусдорфа множества тех $x \in \mathbb{R}$, для которых неравенство $|P(x)| < H^{-w}$, $w > n$, имеет бесконечное число решений в $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, равное $(n + 1)/(w + 1)$. В доказательстве утверждений такого типа важную роль играет приводимость и неприводимость полиномов $P(x)$ в (1) над кольцом целых чисел. В теории трансцендентных чисел и теории диофантовых приближений [4–6] вопросы приводимости и неприводимости $P(x)$ также играют большую роль. Приведем одну лемму Гельфонда.

Лемма 1. (Гельфонд [7], стр. 183). *Пусть x_1 – трансцендентное число, и многочлен $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P \le n$, удовлетворяет неравенству*

$$|P(x_1)| < Q^{-v}. \tag{2}$$

Тогда при $v > 6n$ существует делитель $d(x)$ полинома $P(x)$, $\deg d \le n$, $H(d) < c_3 Q$, представляющий степень неприводимого над кольцом целых чисел полинома, удовлетворяющий неравенству

$$|d(x_1)| < c_4(n) Q^{-v+3n}. \tag{3}$$

Лемма Гельфонда была усилена и обобщена в работе [3]. Неравенство (2) в [3] рассматривалось уже для точек x_1 из некоторого интервала $I \subset \mathbb{R}$, величина показателя степени v в (2) уменьшена до $v > 3n$, а неравенство (3) заменено на неравенство

$$|d(x_1)| < c_5(n) Q^{-v+2n}. \tag{4}$$

Недостатками обоих результатов, не позволяющими доказать ряд известных предположений [2; 6], являются слишком большие значения v, при которых они выполняются. Ниже мы предложим метод, который позволяет уменьшить v до $v > 2{,}5n - 1$. Возможно, метод позволит довести границу до $v > 2n - 2$, однако это требует весьма сложных и длинных вычислений.

Теорема 1. *Пусть $n \ge 2$. Существует делитель полинома $P(x)$, $H(P) \le Q$, в (2) полином $d(x)$, $\deg d \le n$, $H(d) < c_6 Q$, представляющий степень неприводимого многочлена, который при $v > 2{,}5n - 1$ удовлетворяет неравенству*

$$|d(x)| < c_7(n) Q^{-v+1{,}5n-1}. \tag{5}$$

Вначале приведем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 2. *Пусть полиномы $P_i(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $i = 1, 2$, не имеют общих корней и в трансцендентной точке $x_1 \in \mathbb{R}$ удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{aligned} |P_1(x_1)| &< Q^{-v_1},\ v_1 > 0,\ H(P_1) \le Q^{\lambda_1}, \deg P_1 = k,\\ |P_2(x_1)| &< Q^{-v_2},\ v_2 > 0,\ H(P_2) \le Q^{\lambda_2}, \deg P_2 = m. \end{aligned} \tag{6}$$

Тогда при любом $\delta > 0$ *и* $Q > Q_0(\delta)$

$$k\lambda_2 + m\lambda_1 + \delta \geq \min(v_1, v_2). \tag{7}$$

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы Гельфонда [7].

Лемма 3. *Пусть* $P(x) = t_1(x)t_2(x)$ *– разложение приводимого многочлена на множители. Тогда*

$$c_8 H(t_1(x))H(t_2(x)) < H(P(x)) < c_9 H(t_1(x))H(t_2(x)).$$

Лемма 3 – известная лемма о почти мультипликативности высоты многочлена. Доказательство ее можно найти в [2; 7]. Заметим, что правое неравенство доказывается просто. Трудность при доказательстве левого неравенства состоит в нахождении неулучшаемого значения c_8.

Лемма 4. *В области*

$$D = \{(\lambda_1, n_1) : 0 \leq \lambda_1 \leq 1; 1 \leq n_1 \leq n-1\}$$

справедливо неравенство

$$f(\lambda_1, n_1) = \lambda_1(n - n_1) + (1-\lambda_1)n_1 \leq n-1$$

при $n \geq 2$.

Доказательство. В области D лежит точка экстремума функции $f(\lambda_1, n_1)$. Это точка $(\lambda_1 = 1/2, n_1 = n/2)$, в которой $f(\lambda_1, n_1) = n/2$. На границе $\lambda_1 = 0$ или $\lambda_1 = 1$, и $n_1 = 1$ или $n_1 = n-1$ находим две точки максимума $(\lambda_1 = 0, n_1 = n-1)$ и $(\lambda_1 = 1, n_1 = 1)$ при $n \geq 2$, в которых $f(\lambda_1, n_1) = n-1$.

Лемма 5. *Пусть полином* $P(x) = t_1(x)t_2(x)$, *где* $t_1(x)$ *и* $t_2(x)$ *– неприводимые полиномы, или степени неприводимых полиномов. Тогда при выполнении* $|P(x)| < Q^{-v}$, $H(P) \leq Q$ *и* $v > 2n-2$ *один из полиномов* $t_i(x)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|t_i(x)| < c_{10}(n)Q^{-v+n-1}. \tag{8}$$

Доказательство леммы 5. Лемма 5 – это частный случай теоремы 1, когда количество сомножителей у $P(x)$ равно двум. В этом случае условие для v и неравенство (8) сильнее чем в теореме 1. Предположим $|t_1(x)| \leq |t_2(x)|$ и $|t_i(x)| = Q^{-v_i}$, $i = 1, 2$. Тогда при выполнении $|P(x)| < Q^{-v}$ имеем

$$v_1 \geq v_2 = v - v_1, \quad v_1 \geq v/2. \tag{9}$$

Если $v_2 > n-1$, то в (7)

$$\min(v_1, v_2) \geq v_2 > n-1. \tag{10}$$

Из леммы 3 имеем $\deg t_1 + \deg t_2 = n$, $\deg t_1 = n_1$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Перепишем левую часть неравенства (7) в новых обозначениях:

$$(1-\lambda_1)n_1 + \lambda_1(n-n_1) + \delta \ge \min(v_1, v_2) > n-1.$$

Левая часть этого неравенства по лемме 4 не превосходит $n-1+\delta$ и, значит, оно противоречиво для любого $\delta < \varepsilon$, где $\min(v_1, v_2) = n-1+\varepsilon$ и $\varepsilon > 0$. Поэтому должно выполняться неравенство $v_2 \le n-1$ и

$$\left|t_1(x)\right| < c_{11}Q^{-v+n-1}. \qquad (11)$$

Неравенство (11) и доказывает лемму 5.

Доказательство теоремы 1.

Пусть

$$P(x) = t_1(x)t_2(x)\cdots t_j(x)\cdots t_s(x), \qquad (12)$$

где $s \ge 3$, так как при $s = 2$ теорема 1 доказана. В (12) все полиномы $t_i(x)$ – степени неприводимых многочленов. Будем считать, что полиномы $t_i(x)$ упорядочены по величине $\left|t_i(x)\right|$ в точке $x = x_1$:

$$\left|t_1(x_1)\right| \le \left|t_2(x_1)\right| \le \cdots \le \left|t_j(x_1)\right| \le \cdots \le \left|t_s(x_1)\right|. \qquad (13)$$

В [5] доказано, что в таком случае в (12) существует $j < s/2$, что

$$\left|t_1(x_1)\cdots t_{j-1}(x_1)\right| > \left|t_j(x_1)\cdots t_s(x_1)\right|, \qquad (14)$$

$$\left|t_1(x_1)\cdots t_j(x_1)\right| < \left|t_{j+1}(x_1)\cdots t_s(x_1)\right|. \qquad (15)$$

Обозначим $t_1(x)\cdots t_{j-1}(x) = k_1(x)$, $t_{j+1}(x)\cdots t_s(x) = k_2(x)$. Если $\left|k_2(x_1)\right| < Q^{-n+1}$ или $\left|k_1(x_1)\right| < Q^{-n+1}$, то как в лемме 5 придем к противоречию. Поэтому $\left|k_2(x_1)\right| \ge Q^{-n+1}$, $\left|k_1(x_1)\right| \ge Q^{-n+1}$ и

$$\left|t_j(x)\right| < c_{12}(n)Q^{-v+2n-2}. \qquad (16)$$

Но показатель степени в (16) должен быть меньше $-n+1$, что приводит к неравенству $v > 3n-3$, что при больших n хуже, чем в теореме 1. Поэтому предположим, что

$$\left|k_1(x_1)\right| = Q^{-u_1},\ \left|k_2(x_1)\right| = Q^{-u_2},\ n/2 \le u_1 \le n-1,\ n/2 \le u_2 \le n-1. \qquad (17)$$

Введем обозначения

$$\begin{gathered}\deg k_1 = n_1,\ \deg(k_1k_2) = l,\ \deg k_2 = l - n_1,\\ H(k_1) = Q^{\lambda_1},\ H(k_1k_2) = Q^{\lambda},\ H(k_2) \ll Q^{\lambda-\lambda_1},\\ D_1 = \{2 \le l \le n-1, 0 \le \lambda \le 1\}.\end{gathered} \qquad (18)$$

Оценка $l \geq 2$ следует из того, что l – это степень произведения двух многочленов. Определим функцию

$$f_1(\lambda_1, n_1) = \lambda_1(l - n_1) + (\lambda - \lambda_1)n_1.$$

Ее максимальное значение равно

$$\max_{D_1} f_1(\lambda_1, n_1) = \lambda(l-1) \leq l-1.$$

Пусть $u_2 \geq u_1$. Тогда

$$\min(u_1, u_2) \geq u_1,$$

и если $u_1 > l-1$, то как в лемме 5 получаем противоречие. Поэтому далее по (17)

$$n/2 + 1 < 1 + u_1 \leq l. \tag{19}$$

Из неравенств

$$P(x) < Q^{-v},\ |k_1(x)| > c_{13}Q^{-n+1},\ |k_2(x)| > c_{14}Q^{-n+1}$$

при $v > 2,5n-1$ получаем

$$|t_j(x)| < c_{15}Q^{-v+2n-2} < c_{16}Q^{-0,5n-1}. \tag{20}$$

Сейчас рассмотрим три результанта

$$R_1 = R_1(k_1, k_2),\ R_2 = R_2(k_1, t_j),\ R_3 = R_3(k_2, t_j).$$

Каждый из них не равен нулю, и поэтому по модулю не меньше 1. Запишем для всех трех пар многочленов неравенства, аналогичные (7), (10) в обозначениях (18). Получим, учитывая (17) и (20),

$$\min(u_1, u_2) < \lambda_1(l - n_1) + (\lambda - \lambda_1)n_1 = f_1(\lambda_1, n_1), \tag{21}$$

$$\min(u_1, n/2+1) < \lambda_1(n - l) + (1 - \lambda)n_1 = f_2(\lambda_1, n_1), \tag{22}$$

$$\min(u_2, n/2+1) < (\lambda - \lambda_1)(n - l) + (1 - \lambda)(l - n_1) = f_3(\lambda_1, n_1). \tag{23}$$

Покажем, что хотя бы одно из неравенств (21)–(23) противоречиво. Из (17) и (20) следует, что левые части всех неравенств (21)–(23) не менее $n/2$. Максимальное значение функции $f_1 = f_1(\lambda_1, n_1)$ при фиксированных λ и l по лемме 4 равно $\lambda(l-1)$. Получаем

$$n/2 < \lambda(l-1). \tag{24}$$

Так как $\lambda \leq 1$, $l-1 \leq n-2$, то из (24) имеем

$$\lambda \geq \frac{n}{2(n-2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n-2},\quad l \geq \frac{n}{2} + 1. \tag{25}$$

Пусть $D_2 = \{(\lambda, l):\ 1/2 + 1/(n-2) \leq \lambda \leq 1,\ n/2 + 1 \leq l \leq n-1\}$. Убедимся, что хотя бы одно из неравенств (22), (23) при выполнении условий (25) противоречиво. Если они выполняются оба, то сложим (22) и (23). Учитывая, что левые части неравенств (22)–(23) не менее $n/2$, имеем

$$n < \lambda(n-l) + l(1-\lambda) = f_4(\lambda, l). \qquad (26)$$

Максимальное значение функции $f_4 = f_4(\lambda, l)$ в области D_2 равно $n/2 - 2/(n-2)$ при $n \geq 4$ и 1 при $n = 3$. Так как $P(x)$ разлагается на произведение трех многочленов, то $n \geq 3$ и правая часть неравенства (26) не более $n/2 - 2/(n-2)$ при $n \geq 4$ и не более 1 при $n = 3$. Неравенство (26) противоречиво, а вместе с ним противоречиво и хотя бы одно из неравенств (22), (23). Это означает, что пара чисел (u_1, u_2) не может удовлетворять (17). Пусть тогда, например, $u_1 < n/2$. Тогда из $|P(x_1)| < Q^{-v}$, $|k_1(x_1)| > c_{17}Q^{-n/2}$, $|k_2(x_1)| < c_{18}Q^{-n+1}$ получаем $|t_j(x_1)| < c_{19}Q^{-v+3n/2-1}$, а из (13) –

$$|t_1(x_1)| < c_{20}Q^{-v+3n/2-1},$$

что завершает доказательство теоремы 1.

Настоящая работа частично финансировалась фондом РФФИ (грант 14-01-90002 Бел.) и фондом БРФФИ (грант Ф14Р-034).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Касселс, Дж. В.С.*** Введение в теорию диофантовых приближений / Дж. В.С. Касселс. – Москва, 1961.
2. ***Спринджук, В. Г.*** Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск, 1967.
3. ***Берник, В. И.*** Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник. – Acta Arith. 42 (1983), no. 3, 219–253.
4. ***Baker, A.*** Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W. Schmidt, Proc. London Math. – Soc. 21 (1970), no. 3, 1–11.
5. ***Beresnevich, V.*** On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. Beresnevich, Acta Arith. 90 (1999), no. 2, 97–112.
6. ***Берник, В. И.*** Метрическая теорема о приближении нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник. – Изв. АН СССР. – Сер. матем. 44(180), no. 1, 24–45.
7. ***Гельфонд, А. О.*** Трансцендентные и алгебраические числа / А. О. Гельфонд. – Москва, 1952.

Поступила в редакцию 10.06.2015 г.

Контакты: bernik@im.bas-net.by (Берник Василий Иванович)

Budarina N.V., Bernik V.I., O'Donnell H. THE VALUES OF THE IRREDUCIBLE DIVISORS OF INTEGER POLYNOMIALS.

In this paper the authors improve Gelfond's lemma from the theory of transcendental numbers on order of approximation of zero by irreducible divisor of reducible polynomial.

Key words: reducible polynomial, irreducible divisor, approximations of zero by values of polynomials, Gelfond's lemma, diophantine approximations.