# МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 517.936

# МЕРА МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПФАФФА С m-МЕРНЫМ ВРЕМЕНЕМ, ИМЕЮЩИХ ПОПАРНО РАЗЛИЧНЫЕ НИЖНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА

***Н. А. Изобов***
доктор физико-математических наук, профессор,
академик НАН Беларуси
***А. С. Платонов***
кандидат физико-математических наук, доцент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова
***А. В. Филипцов***
кандидат физико-математических наук, доцент
Белорусский государственный университет

*Установлена реализуемость m-мерных характеристических и нижних характеристических векторов по m-мерному аналогу арифметической временной последовательности. Доказано, что почти все (в смысле n-меры Лебега) решения линейной вполне интегрируемой системы Пфаффа с m-мерным временем ($m \le n$) имеют нижние характеристические множества, совпадающие с точной верхней границей нижнего характеристического множества этой системы.*

**Ключевые слова:** линейная система Пфаффа, нижнее характеристическое множество, точная верхняя граница, мера Лебега.

Рассматриваем линейную систему Пфаффа

$$\frac{\partial x}{\partial t_i} = A_i(t)x, \quad x \in R^n, \quad t = (t_1, t_2, \ldots, t_m) \in R_+^m, \quad i = \overline{1, \mathrm{m}}, \qquad (1)$$

с ограниченными непрерывно дифференцируемыми в $R_+^m = \{t \in R^m \mid t \ge 0\}$ матрицами коэффициентов $A_i(t)$, удовлетворяющими в ней условию полной интегрируемости [1, с. 14–24; 2, с. 16–26]

$$\frac{\partial A_i(t)}{\partial t_j} + A_i(t)A_j(t) = \frac{\partial A_j(t)}{\partial t_i} + A_j(t)A_i(t), \quad i, j \in \{1, \ldots, \mathrm{m}\}, \ \ t \in R_+^m,$$

Характеристический [1, с. 83; 3] $\lambda[x]=\lambda$ и нижний характеристический [4] $p[x]=p$ векторы нетривиального решения $x: R_+^m \to R^n \setminus \{0\}$ системы (1) будем определять условиями

$$L_x(\lambda)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln\|x(t)\|-(\lambda,t)}{\|t\|}=0,\quad L_x(\lambda-\varepsilon e_i)>0\quad \forall\varepsilon>0,\quad i=1,\dots,m,$$

$$l_x(p)\equiv\underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln\|x(t)\|-(p,t)}{\|t\|}=0,\quad l_x(p+\varepsilon e_i)<0\quad \forall\varepsilon>0,\quad i=1,\dots,m,$$

где $e_i=(\underbrace{0,\dots,0,1}_{i},0,\dots,0)\in R_+^m$, – орт.

Под нижним характеристическим множеством [4] $P_x$ нетривиального решения $x: R_+^m \to R^n \setminus \{0\}$ системы (1) понимают объединение всех нижних характеристических векторов $P_x=\bigcup p[x]$ этого решения. Множество [4] $P(A)=\bigcup\limits_{x\neq 0} P_x$ называют нижним характеристическим множеством системы (1).

**Определение 1.** Множество $D\subset R^m$ будем называть ограниченным сверху (снизу), если существует такое $r\in R^m$, что $d\le r$ ($d\ge r$) для всех $d\in D$ ($d\le r \Leftrightarrow d_i\le r_i,\ i=\overline{1,\mathrm{m}},$).

Введем аналог понятий точной верхней и точной нижней границ одномерного множества для ограниченного сверху множества $D\subset R^m$:

**Определение 2.** Множество $\sup D\subset R^m$, $\inf D\subset R^m$ являющееся пересечением множеств $S\subset\overline{D}$, таких, что для всякого $d\in\overline{D}$ существует $s\in S$, $s\ge d$, ($s\le d$) будем называть *точной верхней* (*точной нижней*) *границей* ограниченного сверху (снизу) множества $D\subset R^m$.

**Определение 3.** Множество $D\subset R^m$ назовем *замкнутым сверху* (*снизу*), если оно содержит свою точную верхнюю (нижнюю) границу.

В работах [5, 6] было установлено, что почти все решения системы $\dot{x}=A(t)x$, $x\in R^n$, $t\in[0,+\infty)$, с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами, начинающиеся на произвольном $k$-мерном подпространстве $R^k$, $k\in\{1,\dots,n\}$, пространства $R^n$, имеют нижние показатели, равные точной верхней границе нижних показателей этих решений. В работе [7] установлено, что почти все (в смысле $k$-меры Лебега) решения линейной вполне интегрируемой системы Пфаффа (1) с двумерным временем $t=(t_1,t_2)\in R_+^2$, и ограниченными непрерывно дифференцируемыми коэффициентами, начинающиеся при $t=t_0$ на произвольном $k$-мерном подпространстве $R^k$, $k\in\{1,\dots,n\}$, пространства $R^n$, имеют нижние характеристические множества, совпадающие с точной верхней границей всего множества нижних характеристических векторов этих решений. В настояшей работе этот результат обобщен для $m$-мерного случая ($t \in R_+^m$).

Для ограниченного сверху множества $D$ пространства $R^m$, справедлива

Лемма 1. *Если множество $D \subset R^m$ ограничено сверху, то оно имеет и точную верхнюю грань* $\sup D$.

Доказательство. В пространстве $R^m$, всякой точке $r = (r_1, ..., r_m)$ поставим в соответствие множество $K(r) = \{p \in R^m : p \geq r\}$, которое назовем верхним прямым $m$-гранным углом с вершиной в точке $r$. Пусть $S_D \equiv \left\{r \in R^m : \overline{D} \cap K(r) = \{r\}\right\}$ есть множество вершин всех тех верхних прямых $m$-гранных углов $K(r)$, каждый из которых имеет с множеством $\overline{D}$ единственную общую точку – вершину этого угла. Очевидно, это множество $S_D$ не пусто в силу ограниченности сверху множества $D$.

Доказав, что построенное таким образом множество $S_D$ : 1) содержится во всяком множестве $S$ из определения точной верхней грани ограниченного сверху множества $D \subset R^m$; 2) само является одним из таких множеств, – мы тем самым докажем существование у $D$ точной верхней грани $\sup D = S_D$.

Предположим, что для некоторого $S \in \overline{D}$ существует $s_0 \in S_D \subset \overline{D}$, $s_0 \notin S$. Тогда, по определению множества $S$ для точки $d = s_0 \in \overline{D}$ найдется такое $s \in S$, что выполняются неравенства $s \geq s_0$ и $s \neq s_0$, из которых вытекает принадлежность точки $S \in \overline{D}$ множеству $K(s_0) \setminus \{s_0\}$, что противоречит построению $S_D$. Следовательно, наше предположение неверно и $S_D \subset S$.

Пусть $d$ – произвольная точка множества $\overline{D}$. В силу ограниченности и замкнутости одномерного множества $\left\{\|d' - d\| \in R : d' \in K(d) \cap \overline{D}\right\}$ существует по крайней мере одна точка $s_d \in \overline{D}$, удовлетворяющая условию $\|s_d - d\| = \sup\limits_{d' \in K(d) \cap \overline{D}} \left\{\|d' - d\|\right\}$. То есть верхний прямой угол $K(s_d)$ имеет с множеством $\overline{D}$ единственную общую точку, свою вершину $s_d$. Поэтому для всякого $d \in \overline{D}$ существует $s_d \in S_D$, $s_d \geq d$. Это означает, что $S_D$ является одним из множеств $S$ из определения множества $\sup D$. Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Из леммы 1 непосредственно следует, что всякое замкнутое ограниченное сверху множество $D \subset R^m$ замкнуто сверху.

Доказательство основного результата данной работы опирается на два нижеследующих утверждения.

Обобщим для характеристических и нижних характеристических векторов решений линейной системы Пфаффа (1) доказанное в работе [7] для случая $m = 2$ утверждение, аналогичное лемме Н.А. Изобова [5], согласно которому, в частности, характеристический показатель Ляпунова и нижний показатель Перрона всех нетривиальных решений линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений могут быть реализованы по некоторой арифметической временной последовательности $\{t_k\} \subset [0, +\infty)$.

Будем рассматривать систему уравнений

$$\partial x / \partial t_i = F_i(t, x), \quad x \in R^n, \quad t = (t_1, t_2, \dots, t_m) \in R_+^m, \quad i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

удовлетворяющую условиям теоремы существования и единственности решений и условию

$$\|F_i(t, x)\| \le \delta \|t\|^\eta \|x\|, \quad 0 \le \eta < 1, \quad x \in R^n, \quad t \in R_+^m, \tag{3}$$

а также последовательность $\{t(j)\}$, $\|t(j)\| \to +\infty$ при $j \to \infty$, являющуюся достаточно плотной на $R_+^m$: для любой точки $t \in R_+^m$, $\|t\| \ge T_0$, существует такая точка $t(j_t) \in \{t(j)\}$, что выполнено неравенство

$$\|t - t(j_t)\| \le \|t\|^{1-\eta-\varepsilon}, \quad 1 - \eta - \varepsilon > 0, \quad \varepsilon > 0. \tag{4}$$

В частности, таким свойством обладает последовательность, определяемая по правилу: точка $(i_1 T, ..., i_m T) \in R_+^m$, $i_1, ..., i_m \in \{0\} \cup N$, $T = const > 0$, является точкой последовательности $\{t(j)\}$ (нумерация по ребрам $m$-мерного куба с противоположными вершинами в начале координат и точке $(\mu T, ..., \mu T)$, где $\mu = \max\{i_1, ..., i_m\}$).

Лемма 2. *Любое предельное значение*

$$\omega_x(p) = \lim_{k \to \infty} \frac{\ln \|x(t'(k))\| - (p, t'(k))}{\|t'(k)\|},$$

*в котором* $p = (p_1, ..., p_m)$ *– произвольный фиксированный вектор плоскости* $R^m$, $\|t'(k)\| \to +\infty$ *при* $k \to \infty$, *для любого нетривиального решения* $x(t)$ *системы (2) реализуется по некоторой подпоследовательности* $\{t(j_k)\}$, $\|t(j_k)\| \to +\infty$ *при* $k \to \infty$, *последовательности* $\{t(j)\} \subset R_+^m$.

Доказательство. Построим такую последовательность $\{t(j_k)\} \subset \{t(j)\}$, для которой было бы выполнено равенство

$$\omega_x(p) = \lim_{k \to \infty} \frac{\ln \|x(t(j_k))\| - (p, t(j_k))}{\|t(j_k)\|}.$$

Существование такой последовательности и доказывает лемму.

В силу нетривиальности решения $x(t)$ справедлива следующая оценка

$$\left|\partial\|x\|/\partial t_i\right| = \left|\|\partial x/\partial t_i\|\cos(x,\partial x/\partial t_i)\right| \le \|\partial x/\partial t_i\| \overset{(2),(3)}{\le} \delta\|t\|^{\eta}\|x\|, \tag{5}$$

а тем самым и оценка

$$\left|\partial\ln\|x\|/\partial t_i\right| = \left|\|x\|^{-1}\partial\|x\|/\partial t_i\right| \overset{(5)}{\le} \delta\|t\|^{\eta} \le \delta(t_1+\ldots+t_m)^{\eta}.$$

Из нее при фиксированных $i=1$ и $t_2,\ldots,t_m$, проинтегрировав последнее неравенство по $t_1$, получим оценку

$$\left|\ln\frac{\|x(t_1,\ldots,t_m)\|}{\|x(0,t_2,\ldots,t_m)\|}\right| \le \delta(\eta+1)^{-1}\left[(t_1+\ldots+t_m)^{\eta+1}-(t_2+\ldots+t_m)^{\eta+1}\right].$$

Интегрируя то же неравенство по $t_2$ при фиксированных $i=2$, $t_1=0$, и $t_3,\ldots,t_m$, получим оценку

$$\left|\ln\frac{\|x(0,t_2,\ldots,t_m)\|}{\|x(0,0,t_3,\ldots,t_m)\|}\right| \le \delta(\eta+1)^{-1}\left[(t_2+\ldots+t_m)^{\eta+1}-(t_3+\ldots+t_m)^{\eta+1}\right].$$

Продолжив интегрирование до переменной $t_m$ при $t_1=\ldots=t_{m-1}=0$, получим оценку

$$\left|\ln\frac{\|x(0,\ldots,0,t_m)\|}{\|x(0,\ldots,0)\|}\right| \le \delta(\eta+1)^{-1}t_m^{\eta+1}.$$

Сложив полученные неравенства, будем иметь

$$\left|\ln\frac{\|x(t)\|}{\|x(0)\|}\right| \le \delta(\eta+1)^{-1}(t_1+\ldots+t_m)^{\eta+1}.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$\|x(t)\| \le \|x(0)\|\exp\left(\delta\frac{(t_1+\ldots+t_m)^{\eta+1}}{\eta+1}\right). \tag{6}$$

Последовательность $\{t(j_k)\}$ будем строить по последовательности $\{t'(k)\}$ следующим образом. В силу (4) для всякой точки $t'(k)$, $\|t'(k)\| \ge T_0 \ge 2^{1/(\eta+\varepsilon)}$, существует точка $t(j_k)$ такая, что

$$\|t'(k)-t(j_k)\| \le \|t'(k)\|^{1-\eta-\varepsilon}, \quad 1-\eta-\varepsilon>0, \quad k \ge k_0. \tag{7}$$

Сравним теперь значения функции $v_x(t,p) \equiv \left[\ln\|x(t)\|-(p,t)\right]/\|t\|$, $t\in R_+^m$, в точках $t'(k)$ и $t(j_k)$. Для этого предварительно сравним ее значения в некоторых произвольных точках $\tau'=(\tau_1',\ldots,\tau_m')$ и $\tau''=(\tau_1'',\ldots,\tau_m'')$ множества $R_+^m$.

Зафиксируем $t_2 = \tau_2''$, ..., $t_m = \tau_m''$ и применим к функции $v_x\left((t_1, \tau_2'', ..., \tau_m''), p\right)$ как функции параметра $t_1$ на промежутке $\Delta_1 = [\min\{\tau_1', \tau_1''\}, \max\{\tau_1', \tau_1''\}]$ теорему о среднем. Получим следующее неравенство

$$\left|v_x\left((\tau_1'', \tau_2'', ..., \tau_m''), p\right) - v_x\left((\tau_1', \tau_2', ..., \tau_m'), p\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{\partial v_x(t,p)}{\partial t_1}\right|_{t=\left(\xi_1, \tau_2'', ..., \tau_m''\right)} \cdot |\tau_1'' - \tau_1'| \le \left|\frac{\partial v_x(t,p)}{\partial t_1}\right|_{t=\left(\xi_1, \tau_2'', ..., \tau_m''\right)} \cdot \left\|\tau'' - \tau'\right\|,$$

где $\xi_1 \in \Delta_1$. Оценим теперь $|\partial v_x(t,p)/\partial t_1|$ при $t = (\xi_1, \tau_2'', ..., \tau_m'')$:

$$\left|\frac{\partial v_x(t,p)}{\partial t_1}\right| = \left|\frac{\partial\|x(t)\|/\partial t_1}{\|x(t)\|\cdot\|t\|} - \frac{\ln\|x(t)\|}{\|t\|^3}t_1 - \frac{p_1}{\|t\|} + \frac{(p,t)}{\|t\|^3}t_1\right| \overset{(5),(6)}{\le}$$

$$\le \frac{\delta\|t\|^\eta}{\|t\|} + \frac{\left|\ln\|x(0)\|\right|}{\|t\|^2} + \frac{\delta}{\eta+1}\frac{(t_1 + ... + t_m)^{\eta+1}}{\|t\|^2} + \frac{2\|p\|}{\|t\|} =$$

$$= \|t\|^{\eta-1}\left[\delta + \frac{\left|\ln\|x(0)\|\right|}{\|t\|^{1+\eta}} + \frac{\delta}{\eta+1}\left(\frac{t_1 + ... + t_2}{\|t\|}\right)^{1+\eta} + \frac{2\|p\|}{\|t\|^\eta}\right].$$

Таким образом, при достаточно удаленных от начала координат $\tau'$ и $\tau''$, будем иметь неравенство

$$\left|v_x\left((\tau_1'', \tau_2'', ..., \tau_m''), p\right) - v_x\left((\tau_1', \tau_2', ..., \tau_m'), p\right)\right| \le K\left\|(\xi_1, \tau_2'', ..., \tau_m'')\right\|^{\eta-1}\left\|\tau'' - \tau'\right\|, \quad (8)$$

где $K = const > 0$. Аналогично можно показать справедливость неравенства

$$\left|v_x\left((\tau_1', ..., \tau_{i-1}', \tau_i'', ..., \tau_m''), p\right) - v_x\left((\tau_1', ..., \tau_i', \tau_{i+1}'', ..., \tau_m''), p\right)\right| \le$$

$$\le K\left\|\left(\tau_1', ..., \tau_{i-1}', \xi_i, \tau_{i+1}'', ..., \tau_m''\right)\right\|^{\eta-1}\left\|\tau'' - \tau'\right\|, \quad (9)$$

где $\xi_i \in \Delta_i = \left[\min\{\tau_i', \tau_i''\}, \max\{\tau_i', \tau_i''\}\right]$.

Из (8) и (9) вытекает неравенство

$$\left|v_x(\tau'', p) - v_x(\tau', p)\right| = \left|v_x\left((\tau_1'', ..., \tau_m''), p\right) - v_x\left((\tau_1', \tau_2'', ..., \tau_m''), p\right) +\right.$$

$$+ v_x\left((\tau_1', \tau_2'', ..., \tau_m''), p\right) - v_x\left((\tau_1', \tau_2', \tau_3'', ..., \tau_m''), p\right) + ... +$$

$$\left. + v_x\left((\tau_1', ..., \tau_{m-1}', \tau_m''), p\right) - v_x\left((\tau_1', ..., \tau_m'), p\right)\right| \le mK\left\|\tau_l\right\|^{\eta-1}\left\|\tau'' - \tau'\right\|, \quad (10)$$

где $\tau_l$ – та из двух точек $\tau'$ и $\tau''$, у которой норма не превосходит нормы другой точки: $\|\tau_l\| = \min\{\|\tau'\|, \|\tau''\|\}$.

Вернемся теперь к значениям функции $v_x(t,p)$ в точках $t'(k)$ и $t(j_k)$. На основании (10) и (7) при $\|t'(k)\| \le \|t(j_k)\|$ имеем оценку

$$|v_x(t(j_k),p)-v_x(t'(k),p)|\le mK\|t'(k)\|^{\eta-1}\|t(j_k)-t'(k)\|\le$$
$$\le mK\|t'(k)\|^{\eta-1}\|t'(k)\|^{1-\eta-\varepsilon}=mK\|t'(k)\|^{-\varepsilon}. \qquad (11)$$

Аналогичная оценка (с постоянной $2^{1-\eta}mK$) будет иметь место и в том случае, когда $\|t'(k)\|>\|t(j_k)\|$, $\|t'(k)\|\ge T_0$. Покажем это. Оценим $\|t(j_k)\|$ снизу через $\|t'(k)\|$. Из очевидных неравенств

$$\|t'(k)\|=\|t(j_k)+[t'(k)-t(j_k)]\|\le\|t(j_k)\|+\|t'(k)-t(j_k)\|\overset{(7)}{\le}\|t(j_k)\|+\|t'(k)\|^{1-\eta-\varepsilon},$$

неравенства $2^{1/(\eta+\varepsilon)}\le T_0$ имеем требуемую оценку

$$\|t(j_k)\|\ge\|t'(k)\|\left[1-\|t'(k)\|^{-\eta-\varepsilon}\right]\ge\|t'(k)\|/2, \qquad (12)$$

в силу того, что при $\|t'(k)\|\ge T_0$ справедливы неравенства

$$\|t'(k)\|^{-\eta-\varepsilon}\le T_0^{-\eta-\varepsilon}\le 2^{-1}.$$

В силу (10), (7) и (12) (для случая $\|t'(k)\|>\|t(j_k)\|$) получим оценку

$$|v_x(t'(k),p)-v_x(t(j_k),p)|\le mK\|t(j_k)\|^{\eta-1}\|t'(k)-t(j_k)\|\le$$
$$\le 2^{1-\eta}mK\|t'(k)\|^{\eta-1}\|t'(k)\|^{1-\eta-\varepsilon}=2^{1-\eta}mK\|t'(k)\|^{-\varepsilon}, \qquad (13)$$

справедливую и в случае $\|t'(k)\|\le\|t(j_k)\|$.

Переходя в неравенствах (11) и (13) к пределу при $k\to\infty$, получим реализуемость величины $\omega_x(p)$ по подпоследовательности $\{t(j_k)\}\subset\{t(j)\}$. Лемма 2 доказана.

<u>Следствие 1.</u> *Для любого нетривиального решения $x(t)$ системы (1) величины $L_x(p)$ и $l_x(p)$, где $p=(p_1,\dots,p_m)$ – произвольный фиксированный вектор плоскости $R^m$, реализуются по последовательностям $\{t(j_L(k))\}$, $\|t(j_L(k))\|\to+\infty$ при $k\to\infty$, и $\{t(j_l(k))\}$, $\|t(j_l(k))\|\to+\infty$ при $k\to\infty$, являющимся некоторыми подпоследовательностями последовательности $\{t(j)\}\in R_+^m$.*

Справедлива следующая

<u>Лемма 3.</u> *Пусть для некоторого $k\in N$ заданы множество $\{r_0(j)\}\subset R$ действительных чисел и множество $\{r(j)\}\subset R^k\setminus\{0\}$ точек $r(j)=(r_1(j),\dots,r_k(j))$ k-мерного пространства $R^k$, где $j=(j_1,\dots,j_m)$, $j_l\in\{0\}\cup N$. Тогда множество $A(q)$, $q\in N$, составленное из всех тех точек $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in R^k$, для каждой из которых существует такая последовательность $\{j(h)\}$, $h\in N$, что справедливы неравенства*

$$\frac{|r_0(j)+(r(j),\alpha)|}{\max\limits_{1\le i\le k}\{|r_i(j)|\}} \le ce^{-\|j\|/q}, \quad c=c(\alpha)=const>0, \quad j\in\{j(h)\}, \tag{14}$$

*имеет нулевую k-меру Лебега:* $mes_k A(q)=0$.

Доказательство. Для каждого $i\in\{1,...,k\}$ построим множество

$$J_i=\left\{j\in\{j(h)\}:\max_{1\le l\le k}\{|r_l(j)|\}=|r_i(j)|\right\},$$

которое, вообще говоря, может оказаться пустым. Введем обозначение

$$v_i(\alpha,j)\equiv-\frac{1}{r_i(j)}\left(r_0(j)+\sum_{l\ne i}\alpha_l r_l(j)\right).$$

Будем считать, что $\alpha\in A_i(q)$, если существует бесконечная последовательность $\{j(h_s)\}\subset J_i$, для которой выполняются неравенства (14), то есть

$$|\alpha_i-v_i(\alpha,j)|\le ce^{-\|j\|/q}, \quad j\in J_i.$$

Зафиксируем некоторое $\rho\in N$ и введем вспомогательные множества

$$B_\rho=\{\alpha\in A_i(q)\ :\ |\alpha_l|\le\rho,\ l\ne i\},$$

$$M_\rho(j)=\{\alpha\in R^k\ :\ |\alpha_i-v_i(\alpha,j)|\le ce^{-\|j\|/q},\ |\alpha_l|\le\rho,\ l\ne i\}, \quad j\in J_i\subset R^m.$$

Объем $V_\rho(j)$ тела $M_\rho(j)$ равен

$$V_\rho(j)=\int_{-\rho}^{\rho}d\alpha_1\ldots\int_{-\rho}^{\rho}d\alpha_{i-1}\int_{v_i(\alpha,j)-ce^{-\|j\|/q}}^{v_i(\alpha,j)+ce^{-\|j\|/q}}d\alpha_i\int_{-\rho}^{\rho}d\alpha_{i+1}\ldots\int_{-\rho}^{\rho}d\alpha_k=2^k\rho^{k-1}ce^{-\|j\|/q}.$$

Совокупность множеств $M_\rho(j)$ для всех $j\in J_i$, $\|j\|\ge\mu\in\mathrm{N}$, обозначим символом $N_\rho(\mu)=\bigcup\limits_{\|j\|\ge\mu}M_\rho(j)$. Множество $B_\rho$ будет принадлежать множеству $N_\rho(\mu)$ при любом $\mu\ge 2q$. Поэтому мера множества $B_\rho$ не больше, чем мера множества $N_\rho(j)$. Оценим эту величину

$$mes_k N_\rho(j)=\sum_{j\in J_i,\|j\|\ge\mu}mes_k M_\rho(j)=\sum_{j\in J_i,\|j\|\ge\mu}V_\rho(j)=$$

$$=\sum_{j\in J_i,\|j\|\ge\mu}2^k\rho^{k-1}ce^{-\|j\|/q}\le 2^k\rho^{k-1}c\sum_{\|j\|\ge\mu}e^{-\|j\|/q}\le 2^k\rho^{k-1}c\sum_{s=\mu}^{\infty}K(s)e^{-s/q},$$

где $K(s)\le\left(1-m^{-\frac{m}{2}}\right)(s+1)^m$ – число точек $j=(j_1,...,j_m)\in R_+^m$ с целочисленными координатами, обладающих свойством $s\le\|j\|<s+1$. Последнее неравен-

ство справедливо в силу того, что непрерывная положительная функция $g(\tau)=\tau^2 e^{-\tau/q}$ убывает на промежутке $[2q,+\infty)$. Итак, получили неравенство

$$mes_k N_\rho(j) \le c_1\rho^{k-1}\sum_{s=\mu}^{\infty} s^2 e^{-s/q} \equiv c_1\rho^{k-1}\sum_{s=\mu}^{\infty} g(s), \quad c_1 = const, \quad \mu \ge 2q. \quad (15)$$

Ряд $\sum\limits_{s=2q}^{\infty} g(s)$ сходится по интегральному признаку сходимости рядов, так как сходится интеграл $\int\limits_{2q}^{+\infty}\tau^2 e^{-\tau/q}d\tau = q(\tau^2+2q\tau+2q^2)e^{-\tau/q}\Big|_{\tau=2q} = 10e^{-2}q^3$. Рассматривая ряд $\sum\limits_{s=\mu}^{\infty} g(s)$ как остаток сходящегося ряда $\sum\limits_{s=2q}^{\infty} g(s)$, можем записать $\lim\limits_{\mu\to\infty}\sum\limits_{s=\mu}^{\infty} g(s)=0$. Отсюда, в силу произвола выбора $\mu$, из (15) вытекает справедливость равенства $mes_k B_\rho = 0$, выполнимого при любом $\rho \in N$. Последнее означает, что $k$-мера множества $A_i(q)=\bigcup\limits_{\rho=1}^{\infty} B_\rho$ равна нулю как мера объединения счетного числа множеств нулевой $k$-меры.

Таким образом, $mes_k A(q) = mes_k \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i(q) = 0$. Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Почти все (в смысле k-меры Лебега) решения линейной вполне интегрируемой системы Пфаффа (1) с ограниченными непрерывно-дифференцируемыми матрицами коэффициентов $A_i(t)$, начинающиеся при $t = t_0$ на произвольном подпространстве $\Pi_k = R^k$, $k \in \{1,...,n\}$, пространства $R^n$, имеют нижние характеристические множества, совпадающие с точной верхней границей всего множества нижних характеристических векторов этих решений.*

Доказательство (использующее элементы рассуждений работы [5]). Без ограничения общности можно считать $t(0)=0$. Поэтому последовательность $\{t(j)\}$, $t(j)=j=(j_1,...,j_m)$, $j_i \in \{0\}\cup N$, $i=1,...,m$, является последовательностью леммы 1. Запишем уравнение $k$-мерного подпространства $\Pi_k$ пространства $R^n$ в параметрической форме

$$x_h^{(0)} = a_h^{(0)} + (\alpha, a_h) = a_h^{(0)} + \sum_{l=1}^{k}\alpha_l a_h^{(l)}, \quad a_h^{(0)} \in R, \quad a_h \in R^k, \quad h=1,...,n,$$

где $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_k) \in R^k$ – параметр.

Пусть $X(t)=[x^{(1)}(t),...,x^{(n)}(t)]$ – фундаментальная система решений системы (1), нормированная в точке $t=0$, то есть $X(0)=E$, где $E$ – единичная матрица; $x^{(h)}(t)=\left(x_1^{(h)}(t),...,x_n^{(h)}(t)\right)$ – $h$-ый столбец-решение матрицы $X(t)$. Тогда решение $x(t,x_0)$ системы (1) представимо в виде

$$x(t,x_0)=X(t)x_0=\left(\sum_{h=1}^{n}x_1^{(h)}(t)x_h^{(0)},...,\sum_{h=1}^{n}x_n^{(h)}(t)x_h^{(0)}\right).$$

А в обозначениях $\gamma_h^{(i)}(t)\equiv\sum_{l=1}^{n}a_l^{(i)}x_h^{(l)}(t),\ i\in\{0,...,k\},\ h\in\{1,...,n\}$, имеет вид

$$x(t,x_0(\alpha))=\left(\gamma_1^{(0)}(t)+(\alpha,\gamma_1(t)),...,\gamma_n^{(0)}(t)+(\alpha,\gamma_n(t))\right), \qquad (16)$$

где $\alpha,\gamma_l(t)\in R^k$, а $(\alpha,\gamma_l(t))$ – скалярное произведение этих векторов.

Выберем в плоскости $R^m$ произвольный вектор $p=(p_1,...,p_m)$ и зафиксируем его. Введем обозначения

$$\underline{\Omega}_p(\alpha)\equiv l_{x(\cdot,x_0(\alpha))}(p)=\varliminf_{j\to\infty}\frac{1}{\|j\|}\left(\frac{1}{2}\ln\sum_{l=1}^{n}[\gamma_l^{(0)}(j)+(\alpha,\gamma_l(j))]^2-(p,j)\right)$$

и покажем, что для почти всех $\alpha\in R^k$ выполнены неравенства $\underline{\Omega}_p(\beta)\le\underline{\Omega}_p(\alpha)$, $\forall\beta\in R^k$.

Из представлений (16) получим равенство

$$x(t,x_0(\beta))=((\beta-\alpha,\gamma_1(t)),...,(\beta-\alpha,\gamma_n(t)))+x(t,x_0(\alpha)),$$

а отсюда неравенство

$$\|x(j,x_0(\beta))\|\le kn\|\beta-\alpha\|\left|\gamma_{h(j)}^{(i(j))}(j)\right|+\|x(j,x_0(\alpha))\|, \qquad (17)$$

где $\left|\gamma_{h(j)}^{(i(j))}(j)\right|=\max\limits_{1\le h\le n,1\le i\le k}\left\{\left|\gamma_h^{(i)}(j)\right|\right\}$. Пусть предел $\underline{\Omega}_p(\alpha)$ реализуется по последовательности $\{j(s)\}$, $\|j(s)\|\to+\infty$ при $s\to\infty$. Без ограничения общности, эту последовательность можно считать такой, что выполнены условия: $i(j(s))=i$ и $h(j(s))=j$ – фиксированные, одинаковые для всех $s\in\mathrm{N}$ числа, $\gamma_h^{(i)}(j(s))\ne0$. Тогда из (17) получим неравенство

$$\underline{\Omega}_p(\beta)\le\underline{\Omega}_p(\alpha)+d,$$

где

$$d=\varliminf_{s\to\infty}\frac{1}{\|j(s)\|}\ln\left[1+\frac{kn\|\beta-\alpha\|\left|\gamma_h^{(i)}(j(s))\right|}{\|x(j(s),x_0(\alpha))\|}\right]. \qquad (18)$$

Очевидно, что существование бесконечной последовательности $\{j(s_l)\}\subset\{j(s)\}$, для которой все $\gamma_h^{(i)}(j(s_l))=0,\ l\in N$, обеспечило бы выполнимость необходимого равенства $d=0$.

Для любого $q \in N$ и каждой пары $h \in \{1,...,n\}$ и $i \in \{1,...,k\}$ введем в рассмотрение множества $A_h^{(i)}(q) \subset R^k$. Будем считать, что $\alpha \in A_h^{(i)}(q)$, если существует такая бесконечная последовательность $\{j(s_l)\} \subset \{j(s)\}$, $l \in N$, что выполняются неравенства

$$\rho_h^{(i)}(j,\alpha) \equiv \frac{|\gamma_h^{(0)}(j) + (\alpha, \gamma_h(j))|}{|\gamma_h^{(i)}(j)|} \le ce^{-\|j\|/q}, \tag{19}$$

где $c = c(\alpha) = const > 0$, $j \in \{j(s_l)\}$. Согласно лемме 3 $mes_k A_h^{(i)}(q) = 0$, а, следовательно, мера множества $A = \bigcup_{q=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{n} A_h^{(i)}(q)$ равна нулю как мера объединения счетного числа множеств нулевой меры.

Покажем теперь, что при $\alpha \notin A$ величина $d$, определяемая формулой (18), равна 0. Действительно, при $\alpha \notin A$ в силу (19) для каждого $q \in N$ найдется такое $s(\alpha, q)$, что для любых $h \in \{1,...,n\}$, $i \in \{1,...,k\}$ и всех $s \ge s(\alpha, q)$ выполняются неравенства $\rho_h^{(i)}(j(s),\alpha) > ce^{-\|j(s)\|/q}$. Поэтому в этом случае справедливы оценки

$$\frac{\left|\gamma_h^{(i)}(j(s))\right|}{\left\|x(j(s), x_0(\alpha)\right\|} \le \frac{\left|\gamma_h^{(i)}(j(s))\right|}{\left|\gamma_h^{(0)}(j(s)) + (\alpha, \gamma_h(j(s)))\right|} = \frac{1}{\rho_h^{(i)}(j(s),\alpha)} < ce^{\|j(s)\|/q}$$

для всех $h \in \{1,...,n\}$, $i \in \{1,...,k\}$ и $s \ge s(\alpha, q)$. На основании последних оценок получаем неравенство

$$d \le \varlimsup_{s \to \infty} \frac{\ln\left[1 + knc\|\beta - \alpha\| e^{\|j(s)\|/q}\right]}{\|j(s)\|} = \frac{1}{q}, \quad q \in N.$$

Отсюда, в силу произвола выбора $q$, получаем требуемое равенство $d = 0$. В итоге мы доказали, что для любых $\beta \in R^k$ и $\alpha \in R^k \setminus A$, $mes_k A = 0$, выполняется неравенство

$$\underline{\Omega}_p(\beta) \le \underline{\Omega}_p(\alpha), \quad \forall p \in R^m, \quad \alpha \notin A. \tag{20}$$

Аналогично, исходя из $\beta$, можно показать, что при $\beta \notin A$ выполняется неравенство $\underline{\Omega}_p(\alpha) \le \underline{\Omega}_p(\beta)$, являющееся обратным для неравенства (20).

Таким образом, для любых $\alpha, \beta \in R^k \setminus A$ и произвольного фиксированного $p$ пространства $R^m$ выполнено равенство

$$\underline{\Omega}_p(\alpha) = \underline{\Omega}_p(\beta), \quad \forall p \in R^2. \tag{21}$$

Рассмотрим решения $x_1(t) \equiv x(t, x_0(\alpha))$ и $x_2(t) \equiv x(t, x_0(\beta))$, где $\alpha, \beta \notin A$. Пусть $p = (p_1, ..., p_m)$ является нижним характеристическим вектором решения $x_1(t)$, тогда выполняется следующая цепочка равенств $0 \overset{def}{=} l_{x_1}(p) = \underline{\Omega}_p(\alpha) \overset{(21)}{=} \underline{\Omega}_p(\beta) = l_{x_2}(p)$.

То есть выполняется равенство $l_{x_2}(p) = 0$, а тем самым и неравенства $l_{x_2}(p + \varepsilon e_i) < 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $i = \overline{1, m}$. Следовательно, вектор $p$ по определению нижнего характеристического вектора принадлежит нижнему характеристическому множеству $P_{x_2}$ решения $x_2(t)$, и, значит, верно включение $P_{x_1} \subset P_{x_2}$. Обратное включение $P_{x_2} \subset P_{x_1}$ доказывается аналогично. Итак, все решения $x(t, x_0(\alpha))$, $\alpha \notin A \subset R^k$, $x_0(\alpha) \in \Pi_k$, системы (1) имеют одинаковые нижние характеристические множества $P_{x(\cdot, x_0(\alpha))} = P_k$.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что $P_k = \sup \bigcup\limits_{x_0 \in \Pi_k} P_{x(\cdot, x_0)}$. Предположим противное. Пусть для некоторой точки $p' \in P_k$ существует решение $x(t) \equiv x(t, x_0(\beta))$, $x_0(\beta) \in \Pi_k$, $\beta \in R^k$, с нижним характеристическим вектором $p[x(t)] = p \in R^m$ таким, что $p_i > p'_i$, $p_{l \neq i} \geq p'_{l \neq i}$, $i, l \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда найдется решение $x'(t) \equiv x(t, x_0(\alpha))$, $x_0(\alpha) \in \Pi_k$, $\alpha \notin A$, для которого $p'$ является нижним характеристическим вектором. Для последовательности $\{t'(k)\}$, по которой реализуется предел $l_{x'}(p' + \varepsilon e_i)$, справедливы следующие рассуждения:

$$0 > l_{x'}(p' + \varepsilon e_i) = \varliminf_{t \to \infty} \frac{\ln\|x'(t)\| - (p, t) + (p - p', t) - \varepsilon t_i}{\|t\|} \geq$$

$$\geq \varliminf_{t \to \infty} \frac{\ln\|x'(t)\| - (p, t)}{\|t\|} + \varliminf_{k \to \infty} \frac{(p - p', t'(k)) - \varepsilon t'_i(k)}{\|t'(k)\|} \overset{(20)}{\geq}$$

$$\geq \varliminf_{t \to \infty} \frac{\ln\|x(t)\| - (p, t)}{\|t\|} + (p_i - p'_i - \varepsilon)\gamma_i + \sum_{l \neq i} (p_l - p'_l)\gamma_l \geq 0,$$

где $0 < \varepsilon < p_i - p'_i$, $\gamma_i = \varliminf\limits_{k \to \infty} t'_i(k) / \|t'(k)\| \geq 0$. Полученное противоречие устанавливает, что множество $P_k$ есть точная верхняя грань множества всех нижних характеристических векторов решений линейной системы Пфаффа (1), начинающихся при $t = t_0$ на подпространстве $\Pi_k \subset R^n$. Теорема доказана.

<u>Следствие 2.</u> *Пусть непрерывная поверхность $G$ пространства $R^m$ является множеством нижних характеристических векторов каждого из решений системы (1), образующих при $t = t_0$ подмножество $\Pi_G \subset \Pi_k \subset R^n$, поло-*

*жительной k-меры Лебега. Тогда G является точной верхней границей нижнего характеристического множества всех решений, начинающихся на подпространстве* $\Pi_k$ *при* $t = t_0$.

Следствие 3. *Нижнее характеристическое множество* $P(A) \subset R^m$ *линейной вполне интегрируемой системы Пфаффа (1) с ограниченными непрерывно-дифференцируемыми матрицами коэффициентов* $A_i(t)$ *замкнуто сверху.*

Следствие 4. *Почти все (в смысле n-меры) решения* $x(t)$ *линейной вполне интегрируемой системы Пфаффа (1) имеют нижние характеристические множества, совпадающие с точной верхней границей нижнего характеристического множества* $P(A)$ *этой сиситемы.*

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Гайшун, И. В.*** Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И. В. Гайшун. – Минск, 1983. – 272 с.
2. ***Гайшун, И. В.*** Линейные уравнения в полных дифференциалах / И. В. Гайшун. – Минск, 1989. – 254 с.
3. ***Грудо, Э. И.*** Характеристические векторы и множества функций двух переменных и их основные свойства / Э. И. Грудо // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12. – № 12. – С. 2115–2128.
4. ***Изобов, Н. А.*** О существовании линейных систем Пфаффа с множеством нижних характеристических векторов положительной плоской меры / Н. А. Изобов // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 12. – С. 1623–1630.
5. ***Изобов, Н. А.*** О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы / Н. А. Изобов // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1, № 4. – С. 469–477.
6. ***Изобов, Н. А.*** О мере множества решений линейной системы с наибольшим нижним показателем / Н. А. Изобов // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 12. – С. 2168–2170.
7. ***Изобов, Н. А.*** О мере множества решений линейной системы Пфаффа с совпадающими нижними характеристическими множествами / Н. А. Изобов, А. С. Платонов // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 12. – С. 1599–1606.

Поступила в редакцию 27.02.2015 г.
Контакты: alexpltn@mail.ru (Платонов Александр Сергеевич)

**Izobov N.A., Platonov A.S., Philiptsov A.V. THE MEASURE OF SOLUTIONS OF PFAFFIAN LINEAR SYSTEM WITH M-DIMENSIONAL TIME HAVING PAIRED DIFFERENT LOWER CHARACTERISTICS.**

*The authors establish the feasibility of m-dimensional characteristics and lower characteristic vectors for the m-dimensional analogue of the arithmetic time sequence. It is proved that almost all (in the sense of n-Lebesgue measure) solutions of a linear quite integrable Pfaffian system with m-dimensional time (m ≤ n) have lower characteristic sets coinciding with the least upper boundary of the lower characteristic set of this system.*

**Key word:** Linear Pfaff System, lower characteristic set, least upper boundary, Lebesgue measure.