УДК 535.51

ФОРМАЛИЗМ МАТРИЦ МЮЛЛЕРА В ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ОПТИКЕ И ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

О. В. Веко, магистрант
Е. М. Овсиюк, кандидат физико-математических наук, доцент
Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, г. Мозырь, РБ
В. М. Редьков, ведущий научный сотрудник, Институт физики НАНБ, г. Минск, РБ

Исследовано условие сохранения свойства положительной определенности 4-мерного вектора Стокса под действием преобразований с помощью матриц Мюллера произвольного вида. Решена в общем виде задача о приведении квадратичной формы Мюллера к диагональному виду. Это позволяет анализировать условие положительной определенности 4-мерного вектора Стокса, и тем самым исследовать условие применимости каждого отдельного преобразования на принадлежность его к мюллеровскому типу.

Введение

Для аналитического описания состояния поляризации света используются четыре параметра Стокса [1]. При любом линейном оптическом процессе параметры Стокса падающего пучка линейно преобразуются в параметры Стокса вышедшего пучка с помощью матриц Мюллера [2]. Поляризация света может описываться также в рамках формализма Джонса [3-6]; при этом состояние поляризации света задается 2-мерным комплексным вектором, линейные оптические элементы описываются 2-мерными матрицами Джонса. Стоит отметить, что 2-мерный формализм Джонса пригоден только для описания полностью поляризованного света, в то время как формализм Стокса применим также и для описания частично поляризованного света.

В Беларуси теория матриц Мюллера недеполяризующих оптических систем развивалась в работах П.И. Ламекина [7-14]. В частности, были описаны собственные поляризации всех типов недеполяризующих оптических систем; в рамках формализма матриц Мюллера построена общая классификация недеполяризующих оптических систем; построены полярные формы матриц Мюллера недеполяризующих систем.

В настоящей работе основное внимание уделяется другим аспектам теории матриц Мюллера. Известно, что при описании полностью или частично поляризованного света существенную роль может играть группа псевдоортогональных преобразований, изоморфная группе Лоренца. Это означает, что техника оперирования с преобразованиями Лоренца, хорошо развитая в релятивистской физике [15–17], может сыграть существенную эвристическую роль при анализе вопросов оптики поляризованного света. А.А. Богушем и др. были инициированы исследования теории матриц Мюллера с акцентом на их групповой структуре, в частности, на группе псевдоортогональных преобразований, изоморфных группе Лоренца [18–30]. При этом была описана общая факторизованная структура возможных матриц Мюллера, показана эффективность применения параметризации Федорова в теории матриц Мюллера лоренцевского типа, найден способ построения 4-мерных спиноров Джонса для частично поляризованного света, выполнен теоретико-групповой анализ задачи восстановления матриц Мюллера оптического элемента из результатов поляризационных измерений, построена классификация возможных вырожденных матриц Мюллера с нулевым определителем.

В настоящей работе исследуется условие сохранения свойства положительной определенности 4-мерного вектора Стокса. С использованием пространства 3-мерных векторов поляризации решена в общем виде задача о приведении квадратичной формы Мюллера к диагональному виду, что позволяет, в принципе, относительно легко анализировать условие положительной определенности квадратичной формы Мюллера F', и тем самым исследовать условие применимости каждого отдельного преобразования, на предмет принадлежности его к мюллеровскому типу.

1. Диагонализация квадратичных форм. Пусть M_{ab} обозначает матрицу Мюллера, связывающую два 4-мерных вектора Стокса

$$S'_a = M_{ab} S_b \;\Rightarrow\; S'_0 = M_{00} S_0 + M_{0i} S_i\,, \quad S'_j = M_{j0} S_0 + M_{ji} S_i\,; \qquad (1)$$

в терминах компонент 3-мерного вектора поляризации это преобразование выглядит как проективное преобразование в трехмерном пространстве (это открывает возможности применения методов проективной геометрии в поляризационной оптике)

$$p'_j = \frac{M_{j0} S_0 + M_{ji} S_i}{M_{00} S_0 + M_{0i} S_i} = \frac{M_{j0} + M_{ji} p_i}{M_{00} + M_{0i} p_i}\,. \qquad (2)$$

Ограничения на преобразования мюллеровского типа имеют вид следующих неравенств:

$$S_0 > 0\,, \quad S_0 > 0\,, \quad p_j p_j \le 1\,, \quad p'_j p'_j \le 1\,,$$

$$M_{00} S_0 + M_{0i} S_i > 0 \qquad \Rightarrow \qquad M_{00} + M_{0i} p_i > 0\,;$$

$$(M_{j0} + M_{jk} p_k)(M_{j0} + M_{jl} p_l) \le (M_{00} + M_{0k} p_k)(M_{00} + M_{0l} p_l)\,. \qquad (3)$$

Квадратичное неравенство в (3) представимо так:

$$A_{11} p_1^2 + A_{22} p_2^2 + A_{33} p_3^2 + 2A_{12} p_1 p_2 + 2A_{13} p_1 p_3$$
$$+ 2A_{23} p_2 p_3 + 2A_1 p_1 + 2A_2 p_2 + 2A_3 p_3 + A_0 \ge 0\,, \qquad (4)$$

где используются обозначения

$$A_{11} = M_{01}M_{01} - M_{11}M_{11} - M_{21}M_{21} - M_{31}M_{31} ,$$
$$A_{22} = M_{02}M_{02} - M_{12}M_{12} - M_{22}M_{22} - M_{32}M_{32} ,$$
$$A_{33} = M_{03}M_{03} - M_{13}M_{13} - M_{23}M_{23} - M_{33}M_{33} ,$$
$$A_{12} = M_{01}M_{02} - M_{11}M_{12} - M_{21}M_{22} - M_{31}M_{32} ,$$
$$A_{13} = M_{01}M_{03} - M_{11}M_{13} - M_{21}M_{23} - M_{31}M_{33} ,$$
$$A_{23} = M_{02}M_{03} - M_{12}M_{13} - M_{22}M_{23} - M_{32}M_{33} ,$$
$$A_{1} = M_{00}M_{01} - M_{10}M_{11} - M_{20}M_{21} - M_{30}M_{31} ,$$
$$A_{2} = M_{00}M_{02} - M_{10}M_{12} - M_{20}M_{22} - M_{30}M_{32} ,$$
$$A_{3} = M_{00}M_{03} - M_{10}M_{13} - M_{20}M_{23} - M_{30}M_{33} ,$$
$$A_{0} = M_{00}^2 - M_{10}M_{10} - M_{20}M_{20} - M_{30}M_{30} .$$

Цель работы – решить в общем виде задачу о приведении мюллеровских квадратичных форм из (4) к диагональному виду с помощью 3-мерных ортогональных преобразований в сочетании с 3-мерными сдвигами. При решении этой задачи будем использовать параметризации матриц вращения согласно [16]

$$O(n_0, \mathbf{n}) = \begin{vmatrix} 1-2(n_2^2+n_3^2) & -2n_0n_3+2n_1n_2 & +2n_0n_2+2n_1n_3 \\ +2n_0n_3+2n_1n_2 & 1-2(n_3^2+n_1^2) & -2n_0n_1+2n_2n_3 \\ -2n_0n_2+2n_1n_3 & +2n_0n_1+2n_2n_3 & 1-2(n_1^2+n_2^2) \end{vmatrix},$$

или в несколько ином виде:

$$n_0 = \cos\frac{b}{2}, \quad \mathbf{n} = \sin\frac{b}{2}\,\mathbf{e}, \quad \mathbf{e}^2 = 1, \quad f = 1 - \cos b,$$

$$O = \begin{vmatrix} 1-f(e_2^2+e_3^2) & -\sin be_3+fe_1e_2 & +\sin be_2+fe_1e_3 \\ +\sin be_3+fe_1e_2 & 1-f(e_3^2+e_1^2) & -\sin be_1+fe_2e_3 \\ -\sin be_2+fe_1e_3 & +\sin be_1+fe_2e_3 & 1-f(e_1^2+e_2^2) \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Вещественная квадратичная форма $F = p_i A_{ij} p_j + 2A_i p_i + A_0$ должна приводиться к диагональному виду с помощью преобразования $p_i = O_{ik} p'_k + d_i$. С использованием индексной техники результат преобразования формы $F \Rightarrow F'$ представляем в виде

$$F' = O_{ik} p'_k A_{ij} O_{jl} p'_l + \left(O_{ik} p'_k A_{ij} d_j + d_i A_{ij} O_{jl} p'_l + 2A_i O_{ik} p'_k\right) + d_i A_{ij} d_j + 2A_i d_i + A_0 ;$$

отсюда, принимая во внимание свойство ортогональности $\tilde{0} = O^{-1}$, получаем

$$F' = p'_k [O_{ki}^{-1} A_{ij} O_{jl}] p'_l + 2p'_k O_{ki}^{-1} (A_{ij} d_j + A_i) + \left(d_i A_{ij} d_j + 2A_i d_i + A_0\right). \tag{6}$$

Квадратичная форма будет приведена к диагональному виду

$$F' = \lambda_1 p_1'^2 + \lambda_2 p_2'^2 + \lambda_3 p_3'^2 + A'_0 , \quad A'_0 = d_i A_{ij} d_j + 2 A_i d_i + A_0 \qquad (7)$$

в том случае, если, во-первых, решена задача о диагонализации 3×3-матрицы

$$O^{-1} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} O = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} , \qquad (8)$$

во-вторых, если затем решена неоднородная линейная система относительно d_j:

$$A_{ij} d_j = -A_i , \qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{33} & A_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A_1 \\ -A_2 \\ -A_3 \end{vmatrix} . \qquad (9)$$

Отмечаем, что структура неравенства (7) позволяет относительно легко анализировать условие положительной определенности квадратичной формы Мюллера F', и тем самым исследовать условие применимости каждого отдельного преобразования, как принадлежащего к мюллеровскому типу.

Задача (8) приводит к однородным системам уравнений с одинаковой структурой основной матрицы

$$\begin{aligned}
&(A_{11} - \lambda_1) O_{11} + A_{12} O_{21} + A_{13} O_{31} = 0 , \\
&A_{12} O_{11} + (A_{22} - \lambda_1) O_{21} + A_{23} O_{31} = 0 , \\
&A_{13} O_{11} + A_{23} O_{21} + (A_{33} - \lambda_1) O_{31} = 0 ; \\
&(A_{11} - \lambda_2) O_{12} + A_{12} O_{22} + A_{13} O_{32} = 0 , \\
&A_{12} O_{12} + (A_{22} - \lambda_2) O_{22} + A_{23} O_{32} = 0 , \\
&A_{13} O_{12} + A_{23} O_{22} + (A_{33} - \lambda_2) O_{32} = 0 ; \\
&(A_{11} - \lambda_3) O_{13} + A_{12} O_{23} + A_{13} O_{33} = 0 , \\
&A_{12} O_{13} + (A_{22} - \lambda_3) O_{23} + A_{23} O_{33} = 0 , \\
&A_{13} O_{13} + A_{23} O_{23} + (A_{33} - \lambda_3) O_{33} = 0 . \qquad (10)
\end{aligned}$$

Условием существования решений является равенство нулю определителя основной матрицы:

$$\det \begin{vmatrix} (A_{11} - \lambda) & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & (A_{22} - \lambda) & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & (A_{33} - \lambda) \end{vmatrix} , \qquad \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 . \qquad (11)$$

В явном виде кубическое уравнение для λ имеет вид:

$$\lambda^3-(A_{11}+A_{22}+A_{33})\,\lambda^2$$
$$+(A_{11}A_{22}+A_{11}A_{33}+A_{22}A_{33}-A_{12}^2-A_{13}^2-A_{23}^2)\,\lambda$$
$$+A_{11}A_{23}^2+A_{22}A_{13}^2+A_{33}A_{12}^2-A_{11}A_{22}A_{33}-2A_{12}A_{13}A_{23}=0\,. \qquad (12)$$

Каждая из трех систем в (10) содержит только по два независимых уравнения:

$$\begin{aligned}
(A_{22}-\lambda_1)O_{21}+A_{23}O_{31}&=-A_{12}O_{11}\,,\\
A_{23}O_{21}+(A_{33}-\lambda_1)O_{31}&=-A_{13}O_{11}\,;\\
(A_{11}-\lambda_2)O_{12}+A_{13}O_{32}&=-A_{12}O_{22}\,,\\
A_{13}O_{12}+(A_{33}-\lambda_2)O_{32}&=-A_{23}O_{22}\,;\\
(A_{11}-\lambda_3)O_{13}+A_{12}O_{23}&=-A_{13}O_{33}\,,\\
A_{12}O_{13}+(A_{22}-\lambda_3)O_{23}&=-A_{23}O_{33}\,.
\end{aligned} \qquad (13)$$

Очевидно, что каждая подсистема в (13) содержит по одному произвольному параметру. Эти три пока произвольных параметра O_{11}, O_{22}, O_{33} предстоит зафиксировать, требуя, чтобы строящаяся таким образом матрица O_{ij} была ортогональной. Для дальнейшего удобно упростить обозначения. Пусть

$$(A_{11},A_{22},A_{33})=(a_1,a_2,a_3)\,,\quad (A_{23},A_{13},A_{12})=(b_1,b_2,b_3)\,; \qquad (14)$$

приведенное выше кубическое уравнения записывается как

$$\lambda^3-(a_1+a_2+a_3)\,\lambda^2+(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3-b_1^2-b_2^2-b_3^2)\,\lambda$$
$$+(a_1b_1^2+a_2b_2^2+a_3b_3^2-a_1a_2a_3-2b_1b_2b_3)=0\,, \qquad (15)$$

а решения уравнений в (13) представимы в виде (вводим сокращающие обозначения):

$$\left|\begin{array}{l}
\qquad\qquad O_{11},\\
O_{21}=O_{11}\dfrac{b_2b_1-b_3(a_3-\lambda_1)}{(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)-b_1^2}=O_{11}m_{21}\,;\\
O_{31}=O_{11}\dfrac{b_3b_1-b_2(a_2-\lambda_1)}{(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)-b_1^2}=O_{11}m_{31}
\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}
O_{12}=O_{22}\dfrac{b_1b_2-b_3(a_3-\lambda_2)}{(a_1-\lambda_2)(a_3-\lambda_2)-b_2^2}=O_{22}m_{12}\\
\qquad\qquad O_{22}\qquad\qquad\qquad\qquad ;\\
O_{32}=O_{22}\dfrac{b_3b_2-b_1(a_1-\lambda_2)}{(a_1-\lambda_2)(a_3-\lambda_2)-b_2^2}=O_{22}m_{32}
\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} O_{13} = O_{33}\,\dfrac{b_1 b_3 - b_2(a_2-\lambda_3)}{(a_1-\lambda_3)(a_3-\lambda_3)-b_3^2} = O_{33}m_{13} \\ O_{23} = O_{33}\,\dfrac{b_2 b_3 - b_1(a_1-\lambda_3)}{(a_1-\lambda_3)(a_2-\lambda_3)-b_3^2} = O_{33}m_{23}\,. \\ \qquad\qquad\quad O_{33} \end{array}\right. \tag{16}$$

Потребуем, чтобы строящаяся матрица O_{ij} была ортогональной. Недиагональные элементы произведения матриц $O\tilde{O}$ должны обращаться в ноль:

$$O = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{22}m_{12} & O_{33}m_{13} \\ O_{11}m_{21} & O_{22} & O_{33}m_{23} \\ O_{11}m_{31} & O_{22}m_{32} & O_{33} \end{pmatrix}, \quad \tilde{O} = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{11}m_{21} & O_{11}m_{31} \\ O_{22}m_{12} & O_{22} & O_{22}m_{32} \\ O_{33}m_{13} & O_{33}m_{23} & O_{33} \end{pmatrix}$$

$$12-21:\quad O_{11}^2 m_{21} + O_{22}^2 m_{12} + O_{33}^2 m_{13}m_{23} = 0\,,$$

$$13-31:\quad O_{11}^2 m_{31} + O_{22}^2 m_{12}m_{32} + O_{33}^2 m_{13} = 0\,,$$

$$23-32:\quad O_{11}^2 m_{21}m_{31} + O_{22}^2 m_{32} + O_{33}^2 m_{23} = 0\,; \tag{17}$$

диагональные элементы произведения $O\tilde{O}$ должны равняться единице:

$$11:\quad O_{11}^2 + O_{22}^2 m_{12}^2 + O_{33}^2 m_{13}^2 = 1\,,$$

$$22:\quad O_{11}^2 m_{21}^2 + O_{22}^2 + O_{33}^2 m_{23}^2 = 1\,,$$

$$33:\quad O_{11}^2 m_{31}^2 + O_{22}^2 m_{32}^2 + O_{33}^2 = 1\,. \tag{18}$$

Для решения задачи наиболее важными являются уравнения (18) – они позволяют найти явный вид трех величин $O_{11}^2, O_{22}^2, O_{22}^2$; уравнения (17) должны при этом выполняться тождественно. Нужное решение задается формулами (достаточно использовать только положительные корни)

$$O_{11} = +\sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta}}\,, \quad O_{22} = +\sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta}}\,, \quad O_{33} = +\sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta}}\,, \tag{19}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & m_{12}^2 & m_{13}^2 \\ m_{21}^2 & 1 & m_{23}^2 \\ m_{31}^2 & m_{32}^2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2m_{32}^2 m_{13}^2 m_{12}^2 - m_{31}^2 m_{13}^2 - m_{12}^2 m_{21}^2 - m_{23}^2 m_{32}^2\,,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & m_{12}^2 & m_{13}^2 \\ 1 & 1 & m_{23}^2 \\ 1 & m_{32}^2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + m_{32}^2 m_{13}^2 + m_{12}^2 m_{23}^2 - m_{32}^2 m_{23}^2 - m_{13}^2 - m_{12}^2 ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m_{13}^2 \\ m_{21}^2 & 1 & m_{23}^2 \\ m_{31}^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + m_{21}^2 m_{13}^2 + m_{23}^2 m_{31}^2 - m_{31}^2 m_{13}^2 - m_{21}^2 - m_{23}^2 ,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & m_{12}^2 & 1 \\ m_{21}^2 & 1 & 1 \\ m_{31}^2 & m_{32}^2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + m_{21}^2 m_{32}^2 + m_{12}^2 m_{31}^2 - m_{21}^2 m_{12}^2 - m_{31}^2 - m_{32}^2 .$$

Окончательная форма решения выглядит так:

$$O_{11} = \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta}}, \qquad O_{12} = \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta}}\, m_{12}, \qquad O_{13} = \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta}}\, m_{13},$$

$$O_{21} = \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta}}\, m_{21}, \qquad O_{22} = \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta}}, \qquad O_{23} = \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta}}\, m_{23},$$

$$O_{31} = \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta}}\, m_{31}, \qquad O_{32} = \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta}}\, m_{32}, \qquad O_{33} = \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta}}. \tag{20}$$

Поскольку любая ортогональная матрица может быть параметризована как:

$$O_{11} = 1 - f(e_2^2 + e_3^2), \quad O_{12} = -\sin b\, e_3 + f e_1 e_2, \quad O_{13} = +\sin b\, e_2 + f e_1 e_3,$$
$$O_{21} = +\sin b\, e_3 + f e_1 e_2, \quad O_{22} = 1 - f(e_3^2 + e_1^2), \quad O_{23} = -\sin b\, e_1 + f e_2 e_3,$$
$$O_{31} = -\sin b\, e_2 + f e_1 e_3, \quad O_{32} = +\sin b\, e_1 + f e_2 e_3, \quad O_{33} = 1 - f(e_1^2 + e_2^2),$$

то ее антисимметричная часть:

$$O_{32} - O_{23} = 2\sin b\, e_1, \quad O_{13} - O_{31} = 2\sin b\, e_2, \quad O_{21} - O_{12} = 2\sin b\, e_3$$

позволяет найти выражения для $\sin b$ и единичного вектора **e**:

$$2\sin b = +\sqrt{(O_{32} - O_{23})^2 + (O_{13} - O_{31})^2 + (O_{21} - O_{12})^2},$$

$$e_1 = \frac{O_{32} - O_{23}}{\sqrt{(O_{32} - O_{23})^2 + (O_{13} - O_{31})^2 + (O_{21} - O_{12})^2}},$$

$$e_2 = \frac{O_{13} - O_{31}}{\sqrt{(O_{32} - O_{23})^2 + (O_{13} - O_{31})^2 + (O_{21} - O_{12})^2}},$$

$$e_3 = \frac{O_{21} - O_{12}}{\sqrt{(O_{32} - O_{23})^2 + (O_{13} - O_{31})^2 + (O_{21} - O_{12})^2}} . \qquad (21)$$

В свою очередь след матрицы дает

$$\mathrm{Sp}\, O = 3 - 2(1 - \cos b) \quad \Rightarrow \quad \cos b = \frac{\mathrm{Sp}\, O - 1}{2} . \qquad (22)$$

Эти формулы дают общее решение задачи восстановления параметров ортогонального преобразования, приводящего мюллеровскую квадратичную форму к диагональному виду; уравнения (9) относительно вектора d_j решается по известным формулам Крамера.

2. Случай вырожденной квадратичной формы. Рассмотрим кратко специальный случай вырожденной квадратичной формы, его необходимо рассматривать отдельно. Кубическое уравнение (15) с использованием обозначений:

$$r = -(a_1 + a_2 + a_3) , \quad s = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 ,$$
$$t = a_1b_1^2 + a_2b_2^2 + a_3b_3^2 - a_1a_2a_3 - 2b_1b_2b_3$$

перепишем в виде

$$\lambda^3 + r\lambda^2 + s\lambda + t = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0 ;$$

отмечаем тождества

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -r , \quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = s , \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -t . \qquad (23)$$

Поскольку определитель матрицы A_{ij} равен

$$\det \begin{vmatrix} a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & a_3 \end{vmatrix} = -(a_1b_1^2 + a_2b_2^2 + a_3b_3^2 - a_1a_2a_3 - 2b_1b_2b_3) = -t , \qquad (24)$$

то произведение трех корней равно

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det(A_{ij}) . \qquad (25)$$

В случае вырожденной квадратичной формы с $\det A = 0$, кубическое уравнение упрощается

$$\lambda\,(\lambda^2 + r\lambda + s) = 0 , \qquad (26)$$

это означает, что, по крайней мере, один корень обращается в ноль.

Детализируем известную процедуру построения корней в общем случае. Сделав замену переменной $\Lambda = \lambda + r/3$, преобразуем уравнение к виду:

$$\Lambda^3 + p\Lambda + q = 0 , \quad p = s - \frac{1}{3}r^2 , \quad q = \frac{2}{27}r^3 - \frac{1}{3}rs + t ; \qquad (27)$$

отметим два простых случая:

$$q = 0, \qquad \Lambda^3 + p\Lambda = 0, \qquad \Lambda_{1,2,3} = 0, \pm\sqrt{-p};$$

$$p = 0, \qquad \Lambda^3 + q = 0, \qquad \Lambda_{1,2,3} = (-q)^{1/3}. \tag{28}$$

Для p и q имеем следующие явные выражения:

$$p = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 - \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)^2,$$

$$q = -\frac{2}{27}(a_1 + a_2 + a_3)^3 + \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)\left(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2\right)$$

$$+\left(a_1b_1^2 + a_2b_2^2 + a_3b_3^2 - a_1a_2a_3 - 2b_1b_2b_3 \right). \tag{29}$$

Для дискриминанта D:

$$D = (\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2 \tag{30}$$

выполняется тождество

$$D = -\frac{1}{4\cdot 27}(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2. \tag{31}$$

Если все три корня вещественные, то $D < 0$. Если имеем пару комплексно сопряженных корней, то:

$$\lambda_1 = A + iB, \qquad \lambda_2 = A - iB, \qquad \lambda_3 = C, \quad D = \frac{1}{27}B^2\,[\,(a - C)^2 + B^2]^2 > 0.$$

Приведем явное выражение для дискриминанта через параметры (r, s, t):

$$D = \frac{1}{27}s^3 - \frac{1}{4\cdot 27}s^2r^2 + \frac{1}{27}r^3t - \frac{1}{6}rst + \frac{1}{4}t^2. \tag{32}$$

Отмечаем существование трех простых случаев с отрицательным D:

$$t = 0, \qquad D = \frac{s^2}{27}\left(s - \frac{1}{4}r^2\right) < 0;$$

$$s = 0, \qquad D = t(\frac{r^3}{27} + \frac{1}{4}t) < 0;$$

$$r = 0, \qquad D = \frac{1}{27}s^3 + \frac{1}{4}t^2 < 0. \tag{33}$$

В случае нулевого определителя ($\det A = -t = 0$) выражение (32) для D также упрощается

$$D = \frac{s^2}{27}\left(s - \frac{1}{4}r^2\right); \tag{34}$$

здесь выделяются три простых варианта:

$$I \qquad \lambda_3 = 0, \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0\,,$$

$$D = -\frac{1}{4\cdot 27}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 = \frac{s^2}{27}\left(s - \frac{1}{4}r^2\right) < 0\,,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -r\,, \qquad \lambda_1 \lambda_2 = s\,, \qquad t = 0\,; \qquad (35)$$

$$II \qquad \lambda_3 = 0, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda\,,$$

$$D = -\frac{1}{4\cdot 27}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 = \frac{s^2}{27}\left(s - \frac{1}{4}r^2\right) = 0\,,$$

$$2\lambda = -r\,, \qquad \lambda^2 = s\,, \qquad t = 0\,; \qquad (36)$$

$$III \qquad \lambda_3 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0\,,$$

$$D = \frac{s^2}{27}\left(s - \frac{1}{4}r^2\right) = 0\,,$$

$$r = 0\,, \qquad s = 0\,, \qquad t = 0\,. \qquad (37)$$

Заключение

В развитие формализма Мюллера в поляризационной оптике исследовано условие сохранения свойства положительной определенности 4-мерного вектора Стокса

$$S_0^2 - \vec{S}^2 \geq 0 \quad \overset{M}{\Longrightarrow} \quad S_0'^2 - \vec{S}'^2 \geq 0$$

под действием преобразований с помощью матриц Мюллера $M = M_{ab}$ произвольного вида. С использованием пространства 3-мерных векторов поляризации $p_j = S_j/S_0$ решена в общем виде задача о приведении квадратичной формы Мюллера к диагональному виду

$$F' = \lambda_1 p_1'^2 + \lambda_2 p_2'^2 + \lambda_3 p_3'^2 + A'_0 \geq 0\,.$$

Структура неравенства позволяет анализировать условие положительной определенности квадратичной формы Мюллера F', и тем самым исследовать условие применимости каждого отдельного преобразования, как принадлежащего к мюллеровскому типу.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Stokes, G. G.*** On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources / G. G. Stokes // Trans. Cambridge Phil. Soc. – 1852. – Vol. 9. – P. 399–416.

2. ***Mueller, H.*** Memorandum on the polarization optics of the photo-elestic shutter; Report № 2 of the OSRD project OEMsr576, Boston, MA, USA, 1943.
3. ***Jones, R. C.*** New calculus for the treatment of optical systems. I. Description and discussion of the calculus / R. C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 488–493.
4. ***Hurwitz, H.*** A new calculus for the treatment of optical systems. II. Proof of three general equivalence theorems / H. Hurwitz, R. C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 493–499.
5. ***Jones, R. C.*** A new calculus for the treatment of optical systems. III. The Sohncke Theory of optical activity / R. C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 500–503.
6. ***Jones, R. C.*** A new calculus for the treatment of optical systems, IV / R. C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1942. – Vol. 32. – P. 486–493.
7. ***Lamekin, P. I.*** Intrinsic polarization states of corner reflectors / P. I. Lamekin // Sov. J. Opt. Tech. – 1987. – Vol. 54. – P. 658–661.
8. ***Ламекин, П. И.*** Необходимые и достаточные условия недеполяризуемости оптических систем / П. И. Ламекин // Оптика и спектроскопия. – 1996. – Т. 81, вып. 1. – С. 164–168.
9. ***Ламекин, П. И.*** Преобразование степени поляризации излучения оптическими системами / П. И. Ламекин // Оптический журнал. – 1997. – № 6. – С. 50–55.
10. ***Lamekin, P. I.*** Polar forms of Mueller matrices of nondepolarizing optical systems / P. I. Lamekin // Optics and Spectroscopy. – 2000. – Vol. 88, № 5. – P. 737–742.
11. ***Lamekin, P. I.*** Polarization Eigenstates of Nondepolarizing Optical Systems / P. I. Lamekin // Optics and Spectroscopy. – 2001. – Vol. 91, № 5. – P. 741–748.
12. ***Lamekin, P. I.*** Formalism of Mueller matrices and its application to calculation of phase-shifting devices / P. I. Lamekin, Yu. V. Sivaev, K. G. Predko // Optics of Crystals: Proceedings of SPIE / V. V. Shepelevich, N. N. Egorov (Eds.). – 2000. – Vol. 4358. – P. 289–293.
13. ***Lamekin, P. I.*** Mueller matrices of nondepolarizing optical systems: the theory and a new method of determination / P. I. Lamekin // Optics of Crystals: Proceedings of SPIE / V. V. Shepelevich, N. N. Egorov (Eds.). – 2000. – Vol. 4358. – P. 294–302.
14. ***Ламекин, П. И.*** Кратные собственные значения и собственные состояния поляризации матриц Мюллера частичных поляризаторов / П. И. Ламекин // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 5 (8). – С. 128–132.
15. ***Гельфанд, И. М.*** Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения / И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. – М. : Физматгиз, 1958. – 367 с.
16. ***Федоров, Ф. И.*** Группа Лоренца / Ф. И. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
17. ***Березин, А. В.*** Кватернионы в релятивистской физике / А. В. Березин, Ю. А. Курочкин, Е. А. Толкачев. – Минск : Наука и техника, 1989. – 211 с.
18. ***Bogush, A. A.*** On Unique Parametrization of the Linear Group and Its Subgroups by Using the Dirac Algebra Basis / A. A. Bogush, V. M. Red'kov // NPCS. – 2008. – Vol. 11, № 1. – P. 1–24.
19. ***Богуш, А. А.*** Матрицы Мюллера в поляризационной оптике / А. А. Богуш // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 96–102.
20. ***Red'kov, V. M.*** Lorentz group and polarization of the light / V. M. Red'kov // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2011. – Vol. 21. – P. 203–220.
21. ***Овсиюк, Е. М.*** Транзитивность в теории группы трехмерных вращений и формализм Стокса-Мюллера в поляризационной оптике / Е. М. Овсиюк // Веснік

Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. Серыя В, Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2011. – № 1(37). – С. 69–75.
22. ***Редьков, В. М.*** Транзитивность в теории группы Лоренца и формализм Стокса-Мюллера в поляризационной оптике / В. М. Редьков, Е. М. Овсиюк // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка, матэматыка. – 2012. – № 1. – С. 18–23.
23. ***Овсиюк, Е. М.*** Полугруппы Мюллера ранга 1 и 2 / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко, В. М. Редьков // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 34–40.
24. ***Овсиюк, Е. М.*** Возможна ли финслерова геометризация поляризационной оптики / Е. М. Овсиюк, В. М. Редьков // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2012. – Т. 9, № 1 (17). – С. 106–161.
25. ***Овсиюк, Е. М.*** Degenerate 4-dimensional matrices with semi-group structure and polarization optics / E. M. Ovsiyuk, V. M. Red'kov // Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика. – 2013. – № 1. – С. 245–259.
26. ***Веко, О. В.*** О 4-спинорах Джонса частично поляризованного света / О. В. Веко, Е. М. Овсиюк, В.М. Редьков // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1(14). – С. 13–18.
27. ***Веко, О. В.*** О 4-спинорах Джонса полностью поляризованного света / О. В. Веко, Е. М. Овсиюк, В. М. Редьков // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2013. – № 1(41). – С. 56–64.
28. Некоторые свойства параметров группы Лоренца и уравнения транзитивности в поляризационной оптике / Е. Овсиюк, О. Веко, М. Неагу, В. Балан, В. Редьков // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка, матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 18–29.
29. Some properties of parameters of Lorentz matrices and transitivity equations / E. Ovsiyuk, O. Veko, M. Neagu, V. Balan, V. Red'kov // Balkan Society of Geometers Proceedings (BSGP). – 2013. – Vol. 20. – P. 51–63.
30. Spinors, matrix strictures, and projective geometry in polarization optics / E. Ovsiyuk, O. Veko, M. Neagu, V. Balan, V. Red'kov // Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics. – 2013. – Vol. 10, no 2 (20). – P. 315–328.

Поступила в редакцию 17.10.2014 г.
Контакты: e-mail: e.ovsiyuk@mail.ru (Овсиюк Елена Михайловна)

Summary

The conditions of preserving the positive definiteness of 4-dimensional Stokes vector under the action of the transformations of Mueller matrices of arbitrary form are studied. The problem of reducing the quadratic form to a diagonal Muller form is solved in a general form. It permits us to analyze the condition of positive definiteness of the quadratic Muller form and thereby investigate the condition of applicability of each individual transformation as belonging to Mueller's type.