УДК 511.42

ЗАВИСИМОСТЬ КОЛИЧЕСТВА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ НА ИНТЕРВАЛАХ ЕДИНИЧНОЙ ДЛИНЫ ОТ РАСПОЛОЖЕНИЯ ИНТЕРВАЛА

Н. В. Бударина
ассистент кафедры математики
Дублинский институт технологий, г. Дублин, Ирландия
Х. О'Доннелл
заведующий кафедрой математики
Дублинский институт технологий, г. Дублин, Ирландия
Н. В. Шамукова
доцент кафедры естественных наук
Командно-инженерный институт МЧС, г. Минск, РБ

Известны оценки для количества алгебраических чисел заданной степени и высоты, лежащих на интервале $(0,1)$. *В работе впервые получены оценки снизу для количества алгебраических чисел на отрезке* $(k, k+1)$ *при произвольном* k.

В последние годы появилось много работ, в которых изучаются распределения алгебраических чисел [1–4], их дискриминантов [5, 6], результантов [7], а также расстояний между сопряженными алгебраическими числами [3, 8]. В этих работах выяснено, что регулярные системы образуют не только алгебраические числа в $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p$, но и системы векторов с алгебраическими координатами в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ [9, 10]. Это позволило получить оценки снизу для размерности Хаусдорфа множеств чисел с заданной аппроксимацией алгебраическими числами [11], а также установить аналоги теоремы Хинчина [13] в случае расходимости ряда [12].

В данной работе мы покажем, что количество действительных алгебраических чисел в интервалах единичной убывает с удалением центров этих интервалов от начала координат.

Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

– многочлен с целыми рациональными коэффициентами степени $\deg P = n$ и высоты $H = H(P) = max_{0 \le j \le n} |a_j|$. Определим класс полиномов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[z] : \deg P \le n, \ H(P) \le Q\} \quad (1)$$

для любого достаточно большого натурального числа $Q > Q_0(n)$. Далее $I_k = [k-1, k), k \ge 1$ – интервалы единичной длины и $I_0 = [-1/2, 1/2)$. Обозначим через $\mathcal{M}_n(Q,k)$ количество действительных алгебраических чисел $\alpha \in I_k$, являющихся корнями $P \in P_n(Q)$.

Теорема 1. *Для величины $\mathcal{M}_n(Q,k)$ справедливы неравенства*

$$M_n(Q,0) \ge n^{-1}2^{-n-24}Q^{n+1} \tag{2}$$

$$M_n(Q,k) \ge n^{-4}2^{-n-24}k^{-2n}Q^{n+1},\ k \ge 1 \tag{3}$$

Доказательство.

Вначале докажем неравенство (2)

Пусть $x \in I_0$ и $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ с условием $0 \le a_j \le Q, 0 \le j \le n$, откуда

$$|P(x)| = |a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0| \le Q(1 + 1/2 + \dots + 1/(2^n)) \le 2Q. \tag{4}$$

Поделим интервал [-2Q, 2Q] на интервалы J длины c_1Q^{-v}. Количество таких интервалов равно $4c_1^{-1}Q^{1+v}$. Возьмем полиномы $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ с условием $0 \le a_j \le Q, 0 \le j \le n$. Количество полиномов P равно $(Q+1)^{n+1}$.

Если

$$4c_1^{-1}Q^{1+v} \le Q^{n+1} < (Q+1)^{n+1}, \tag{5}$$

то, по принципу Дирихле, найдется интервал J, на котором лежит по крайней мере две точки $P_1(x)$, $P_2(x)$. Очевидно, что

$$P(x) = P_2(x) - P_1(x) \in \mathcal{P}_n(Q), |P(x)| < c_1Q^{-v}. \tag{6}$$

Из неравенства (5) следует, что можно взять $v = n$ и $c_1 = 4$, откуда

$$|P(x) < 4Q^{-n}. \tag{7}$$

Пусть α_1 – ближайший к x корень полинома P.

Лемма 1. [5, 15] Справедливы неравенства:

$$|x - \alpha_1| < 4nQ^{-n}|P'(x)|^{-1}, \qquad P'(x) \ne 0, \tag{8}$$

$$|x - \alpha_1| < 2^{n+1}Q^{-n}|P'(\alpha_1)|^{-1}, P'(\alpha_1) \ne 0. \tag{9}$$

Из (8), (9) заключаем, что для существования корня α_1 в окрестности точки x необходимо к неравенству (7) добавить оценку снизу для $|P'(x)|^{-1}$ или $|P'(\alpha_1)|^{-1}$. Получить такие оценки при любых x задача очень сложная, однако для "большей части" $x \in I_0$ это можно сделать на основании следующей леммы. Далее μA – мера Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$.

Лемма 2. Обозначим через $\mathcal{L}_n(Q,\delta_0)$ множество $x \in I_0$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < 4Q^{-n}, \\ |P'(x)| < \delta_0 Q \end{cases} \tag{10}$$

имеет хотя бы одно решение в полиномах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$. Тогда при $\delta_0 \le n^{-1}2^{-n-21}$ справедлива оценка

$$\mu\mathcal{L}_n(Q,\delta_0) < 1/4. \tag{11}$$

Доказательство леммы 2. Пусть α_1 – ближайший к x корень P.

Нетрудно доказать, что при $|P'(x)| > Q^{-1}$ справедливы неравенства

$$3|P'(x)|/4 < |P'(\alpha_1)| < 4|P'(x)|/3, \tag{12}$$

откуда можно получить, что $\mu\mathcal{L}_n(Q,\delta_0)$ содержится во множестве решений системы неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < 4Q^{-n}, \\ |P'(\alpha_1)| < 4\delta_0 Q/3. \end{cases} \tag{13}$$

Определим интервалы $\sigma(P)$ и $\sigma_1(P)$:

$$\sigma(P) : |x-\alpha_1| < 2^4 3^{-1} n Q^{-n} |P'(\alpha_1)|^{-1}, \tag{14}$$

$$\sigma_1(P) : |x-\alpha_1| < c_2 Q^{-1} |P'(\alpha_1)|^{-1}, \ c_2 > 0. \tag{15}$$

Из (14) и (15) имеем

$$\mu\sigma(P) \le 2^4 3^{-1} n c_2^{-1} Q^{-n+1} \mu\sigma_1(P). \tag{16}$$

Составим вектор $\bar{b} = (a_n, \ldots, a_2)$. Класс многочленов с одним вектором b обозначим $P_n(Q,\bar{b})$. Поделим интервалы $\sigma_1(P)$, $P \in P_n(Q,\bar{b})$, на существенные и несущественные. Интервал $\sigma_1(P)$ будем называть существенным, если для любого $\sigma_1(P_2)$, $P_2 \in P_n(Q,\bar{b})$, верно неравенство

$$\mu\big(\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)\big) < 2^{-1}\mu\sigma_1(P_1). \tag{17}$$

Если же существует такой интервал, что

$$\mu\big(\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)\big) \ge 2^{-1}\mu\sigma_1(P_1), \tag{18}$$

то интервал $\sigma_1(P_1)$ будем называть несущественным.

Рассмотрим случай существенных интервалов. Из (17) имеем

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q,\bar{b})} \mu\sigma_1(P) \le 2. \tag{19}$$

Так как количество векторов $\bar{b}$ при $Q > 2n$ не превосходит $(2Q+1)^{n-1} \le 2^n Q^{n-1}$, то из (16) и (19) получаем

$$\sum_{\bar{b}} \sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q,\bar{b})} \mu\sigma(P) \le 2^{n+4} n c_2^{-1} Q^{-n+1+n-1} = n c_2^{-1} 2^{n+4} \le 2^{-4} \qquad (20)$$

для $c_2 \ge 2^{n+8} n$.

В случае несущественных интервалов разложим $P(x)$ и $P'(x)$ на $\sigma_1(P)$ в ряд Тэйлора и оценим $|P(x)|, |P'(x)|$ сверху. При этом будем считать, что

$$Q^{5/8} < |P'(\alpha_1)| < 4\delta_0 Q/3. \qquad (21)$$

Имеем:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} (i!)^{-1} P^{(i)}(\alpha_1)(x-\alpha_1)^i,$$

$$|P'(\alpha_1)(x-\alpha_1)| < c_2 Q^{-1},$$

$$|2^{-1} P''(\alpha_1)(x-\alpha_1)^2| < 2^{-1} n(n-1)(1 + 1/2 + \dots + 1/(2^{n-2})) c_2^2 Q^{-2} Q^{-5/4}$$

$$< c_2 Q^{-1}/(n-1) \qquad (22)$$

при $Q > Q_0(n)$. Оценка (22) будет справедлива и для остальных слагаемых в разложения P, и поэтому

$$|P(x)| < 2c_2 Q^{-1}, \qquad x \in \sigma_1(P). \qquad (23)$$

Для P' аналогично получим

$$|P'(x)| < 4\delta_0 Q, \quad x \in \sigma_1(P). \qquad (24)$$

У многочленов P_1 и P_2 на пересечении $\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)$ выполняются неравенства (23) и (24). Их разность $R(x) = P_2(x) - P_1(x)$ – линейный многочлен $R(x) = ax + b$, для которого из (23) и (24) имеем:

$$|ax + b| < 4c_2 Q^{-1}, \qquad |a| < 8\delta_0 Q.$$

На всем интервале $\sigma_1(P_1)$ верны неравенства:

$$|ax + b| < 12c_2 Q^{-1}, \qquad |a| < 8\delta_0 Q. \qquad (25)$$

Оценим меру тех x, для которых справедлива система неравенств (25). Первое неравенство в (25) верно для x из интервала $|x + b/a| < 12c_2 Q^{-1} a^{-1}$, длина которого не превосходит $2^5 c_2 Q^{-1} a^{-1}$. Просуммируем эту оценку по всем b, при которых b/a принадлежит I_0. Их количество не более $a + 2 \le 2a,\ a \ge 2$. Оценку для количества a возьмем из (25). Ясно, что можно считать $a > 0$. Имеем оценку

$$\sum_a \sum_b \mu\sigma_1(P) < 2^9\delta_0 c_2. \qquad (26)$$

Если $|P'(\alpha_1)| \le Q^{5/8}$, то из [14] следует, что мера решений системы неравенств с таким условием не превосходит $1/8$ для $Q > Q_0(n)$. Выберем в (26) $\delta_0 = 2^{-13}c_2^{-1}$ и $c_2 = n2^{n+8}$, тогда $\delta_0 = n^{-1}2^{-n-21}$. Получили (11). Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 имеем, что на множестве $B_1 = I_0/\mathcal{L}_n(Q,\delta_0)$ при $\delta_0 = n^{-1}2^{-n-21}$ с мерой $\mu B_1 > 3/4$ выполняется система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < 4Q^{-n}, \\ |P'(x)| > n^{-1}2^{-n-21}Q. \end{cases} \qquad (27)$$

Воспользуемся леммой 1 и установим оценку

$$|x-\alpha_1| < n2^{n+23}Q^{-n-1}. \qquad (28)$$

Около каждой точки $x \in B_1$ интервал (28) можно найти алгебраическое число. Пусть t – количество интервалов вида (28). Тогда $tn2^{n+23}Q^{-n-1} > 3/4$, откуда

$$t > n^{-1}2^{-n-24}Q^{n+1}, \qquad (29)$$

что и доказывает оценку (2) в теореме.

Докажем теперь неравенство (3)

Если $x \in I_k, k \ge 1$, то

$$|P(x)| \le Q(k^n + k^{n-1} + \cdots + k + 1) < 2nk^nQ. \qquad (30)$$

Воспользуемся принципом Дирихле, как в (5)–(7), и получим из (30) в каждой точке $x \in I_k$ оценку

$$|P(x)| < 4nk^nQ^{-n}. \qquad (31)$$

Как и в (13) заменим оценку $|P'(x)| < \delta_0 Q$ на оценку $|P'(\alpha_1)| < 4\delta_0 Q/3$.

Лемма 3. Обозначим через $S_n(Q,\delta_0)$ множество $x \in I_k$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < 4nk^nQ^{-n}, \\ |P'(\alpha_1)| < 4\delta_0 Q/3 \end{cases} \qquad (32)$$

имеет хотя бы одно решение в полиномах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$. Тогда при $\delta_0 \le n^{-2}k^{-n}2^{-n-21}$ справедлива оценка

$$\mu S_n(Q,\delta_0) < 1/4.$$

Доказательство леммы 3. Определим интервалы $\sigma_2(P)$ и $\sigma_3(P)$:

$$\sigma_2(P) : |x-\alpha_1| < 2^3n^2k^nQ^{-n}|P'(\alpha_1)|^{-1}, \qquad (33)$$

$$\sigma_3(P): |x-\alpha_1| < c_3 Q^{-1} |P'(\alpha_1)|^{-1}, \qquad c_3 > 0, \tag{34}$$

зафиксируем вектор $\bar{b} = (a_n, \ldots, a_2)$ и класс $\mathcal{P}_n(Q, \bar{b})$. Поделим интервалы $\sigma_3(P)$ на существенные и несущественные как в (17)–(18).

Рассмотрим случай существенных интервалов. Из (18), (33) и (34) имеем

$$\sum_{\bar{b}} \sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q,\bar{b})} \mu\sigma_2(P) < \sum_{\bar{b}} \sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q,\bar{b})} 8n^2 k^n c_3^{-1} Q^{-1n+1} \mu\sigma_3(P) \leq$$
$$\leq \sum_{\bar{b}} 2^4 n^2 k^n c_3^{-1} Q^{-n+1} \leq 2^{n+4} n^2 k^n c_3^{-1}. \tag{35}$$

В случае несущественных интервалов для $x \in \sigma_3(P)$ получаем оценки, аналогичные (23) и (24) при достаточно большом Q:

$$|P(x)| < 2c_3 Q^{-1}, \qquad |P'(x)| < 4\delta_0 Q.$$

Разность многочленов $P_2(x) - P_1(x)$, $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_n(Q, \bar{b})$, есть линейный многочлен $ax + b$ и

$$|ax+b| < 4c_3 Q^{-1}, \qquad |a| < 8\delta_0 Q \tag{36}$$

на пересечении $\sigma_3(P_1) \cap \sigma_3(P_2)$. На всем интервале $\sigma_3(P_1)$ верно

$$|ax+b| < 12c_3 Q^{-1}, \qquad |a| < 8\delta_0 Q. \tag{37}$$

Сумма мер решений неравенств (37) не превосходит, как и в (26), величины

$$2^9 \delta_0 c_3. \tag{38}$$

Опять, если $|P'(\alpha_1)| \leq Q^{5/8}$ заключаем из [14], что мера $x \in I_k$, для которых неравенство (32) выполняется в полиномах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ не превосходит 1/8.

Выберем в (35) число $c_3 = 2^{n+8} n^2 k^n$, а в (38) – число $\delta_0 = n^{-2} k^{-n} 2^{-n-21}$. Получим, что

$$\mu S_n(Q, \delta_0) < 1/4.$$

Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 следует, что на множестве $B_2 = I_k \setminus S_n(Q, \delta_0)$ с мерой $\mu B_2 > 3/4$ выполняется система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < 4nk^n Q^{-n}, \\ |P'(x)| > n^{-2} k^{-n} 2^{-n-21} Q. \end{cases} \tag{39}$$

Применим к неравенству (39) лемму 1 для $x_1 \in B_2$. Получим

$$|x_1 - \alpha_1| < 2^{n+23} n^4 k^{2n} Q^{-n-1}. \tag{40}$$

Интервалы вида (40) покрывают множество B_2. Обозначим через t_1 их количество. Тогда

$$t_1 2^{n+23} n^4 k^{2n} Q^{-n-1} > 3/4$$

и

$$t_1 > 2^{-n-24} n^{-4} k^{-2n} Q^{n+1}.$$

Сравним эту оценку с оценкой (29). Она в $n^3 k^{2n}$ раз меньше.

Этим завершено доказательство теоремы 1.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Beresnevich V. V., Bernik V. I., Goetze F.*** The distribution of close conjugate algebraic numbers, Compositio Math. 146 (2010), 1165–1179.
2. ***Bugeaud Y.*** Approximation by algebraic numbers, Cambridge Tracts in Mathematics, 160. Cambridge University Press, Cambridge, 2004, 274 pp.
3. ***Bugeaud Y., Dujella A.*** Root separation for reducible integer polynomials, Acta Arith. 162 (2014), no. 4, 393–403.
4. ***Budarina N., O'Donnell H.*** On a problem of Nesterenko: when is the closest root of a polynomial a real number? International Journal of Number Theory (IJNT). – 2012. – Vol. 8, no. 3. – P. 801–811.
5. ***Bernik V., Goetze F., Kukso O.*** Lower bounds for the number of integral polynomials with given order of discriminants, Acta Arith. 133 (2008), no. 4, 375–390.
6. ***Beresnevich V. V., Bernik V. I., Goetze F.*** Simultaneous approximations of zero by an integral polynomial, its derivative, and small values of discriminants, Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi 54 (2010), no. 2, 26–28.
7. ***Beresnevich V. V., Bernik V. I., Goetze F.*** On the distribution of the values of the resultants of integral polynomials, Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi 54 (2010), no. 5, 21–23.
8. ***Budarina N., Goetze F.*** Distance between conjugate algebraic numbers in clusters, Mathematical Notes 94 (2013), no. 5, 816–819.
9. ***Bernik V., Budarina N., Dickinson D.*** A divergent Khintchine theorem in the real, complex, and p-adic fields, Lith. Math. J. 48 (2008), no. 2, 158–173.
10. ***Bernik V., Budarina N., Dickinson D.*** Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p-adic fields, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 149 (2010), no. 2, 193–216.
11. ***Bernik V. I.*** Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations, Acta Arith. 42 (1983), no. 3, 219–253.
12. ***Beresnevich V. V.*** On approximation of real numbers by real algebraic numbers, Acta Arith. 90 (1999), no. 2, 97–112.
13. ***Khintchine A.J.*** Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, Math. Z. 24 (1926), no. 1, 706–714.
14. ***Bernik V., Kleinbock D., Margulis G.A.*** Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standart and multiplicative versions, Internat. Math. Res. Notices 2001, no. 9, 453–486.
15. ***Sprindzuk V.G.*** Mahler's problem in metric Number Theory, Minsk, Nauka i Tehnika, 1967 [Transl. Math. Monogr. 25, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1969].

Поступила в редакцию 09.12.2014 г.

Контакты: (+375 29) 835-84-65 (Шамукова Наталья Валентиновна)

Summary

There exist known estimates for the number of algebraic numbers of given degrees and heights lying in the interval [0,1). In this paper we present first known estimates of this type for the intervals [k,k+1) with an arbitrary k.