

УДК 517+530.1

О СУЩЕСТВОВАНИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ И НЕТОПОЛОГИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ БОМА И СТЕПЕННЫМИ ЗАКОНАМИ НЕЛИНЕЙНОСТИ

С. В. Жестков

доктор физико-математических наук, профессор
МГУ имени А. А. Кулешова, г. Могилев, РБ

В [1] на основе полу-обратного вариационного принципа исследованы солитонные решения возмущенного резонансного нелинейного уравнения Шредингера с полной нелинейностью, включая потенциал Бома. Специфика этого подхода заключается в том, что параметры солитона определяются из вариационного принципа, а не прямой подстановкой анзаца в исходное уравнение. Поэтому остается открытым вопрос о сравнительном анализе результатов, полученных на основе вариационного принципа [1] и известных методов построения солитонных решений [2]. В связи с этим обстоятельством представляют интерес математические модели с потенциалом Бома, допускающие точные солитонные решения.

Цель работы – построение топологических и нетопологических солитонов, указанных в заглавии уравнений, на основе результатов работ [3-7].

I. Уравнение Шредингера с потенциалом Бома и степенными законами нелинейности и затухания

1. Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$iu_t + a_1 u_{xx} + a_2 |u|^{2m} u = i \left[a_3 u + a_4 |u|^{2m} u + a_5 u \frac{|u|_{xx}}{|u|} \right], \quad m > 0, \quad (1)$$

где $\overline{a_1}, a_5$ – произвольные действительные числа. Солитонное решение уравнения (1) строится в виде

$$u(t, x) = I(t, x) \exp(i\eta), \quad \eta = kx + \omega t + \varphi, \quad (2)$$

где $I(t, x)$ – неизвестная гладкая неотрицательная функция, k, ω – параметры солитона. Подставляя (2) в (1), найдем

$$i \left[I_t + i\omega I \right] + a_1 \left[I_{xx} + 2ikI_x - k^2 I \right] + a_2 I^{2m+1} = i \left[a_3 I + a_4 I^{2m+1} + a_5 I_{xx} \right].$$

Из последнего уравнения получим:

$$\begin{aligned} \text{Im:} \quad & I_t + 2a_1 k I_x = a_3 I + a_4 I^{2m+1} + a_5 I_{xx}, \\ \text{Re:} \quad & -\omega I + a_1 I_{xx} - a_1 k^2 I + a_2 I^{2m+1} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Система (3) является определяющей системой уравнений относительно неизвестной функции $I(t, x)$, т.е. справедлива

Теорема 1. Для того чтобы уравнение (1) имело решение (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (3).

Для решения системы (3) представим $I(t, x)$ в виде

$$I(t, x) = f(\xi), \quad \xi = \alpha x - vt + \psi, \quad (4)$$

где v – скорость солитона, α, ψ – действительные числа. Тогда подставляя (4) в (3), найдем:

$$\begin{aligned} (-v + 2a_1\alpha k)f'(\xi) &= a_3f(\xi) + a_4f^{2m+1}(\xi) + \alpha^2a_5f''(\xi), \\ a_1\alpha^2f''(\xi) - (\omega + a_1k^2)f(\xi) + a_2f^{2m+1}(\xi) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Предположим, что

$$v = 2a_1\alpha k. \quad (6)$$

Тогда система (5) преобразуется к виду:

$$a_3f(\xi) + a_4f^{2m+1}(\xi) + \alpha^2a_5f''(\xi) = 0, \quad (7)$$

$$a_1\alpha^2f''(\xi) - (\omega + a_1k^2)f(\xi) + a_2f^{2m+1}(\xi) = 0. \quad (8)$$

Известно [5], что уравнения (7), (8) допускают решения в форме нетопологического солитона, т. е.

$$f(\xi) = Ach^{-\mu}(\xi), \quad \mu > 0, \quad (9)$$

где A – амплитуда солитона μ – неизвестный параметр. Подставляя (9) в (7), найдем

$$a_3ch^2\xi + a_4A^{2m}ch^{-2m\mu+2}(\xi) + a_5\alpha^2[\mu(\mu+1)sh^2\xi - \mu ch^2\xi] = 0. \quad (10)$$

Из анализа уравнения (10) следует, что $\mu = \frac{1}{m}$. В этом случае в силу линейной независимости экспонент, найдем

$$a_3 + a_5\alpha^2\mu^2 = 0, \quad A^{2m} = (\mu + \mu^2)\alpha^2\frac{a_5}{a_4}, \quad \frac{a_5}{a_4} > 0. \quad (11)$$

Подставляя (9) в (8) при $\mu = \frac{1}{m}$, получим

$$a_1\alpha^2[\mu^2ch^2\xi - \mu(\mu+1)] - (\omega + a_1k^2)ch^2\xi + a_2A^{2m} = 0. \quad (12)$$

Из уравнения (12) следует, что

$$\omega + a_1k^2 = a_1\alpha^2\mu^2, \quad A^{2m} = \alpha^2\mu(\mu+1)\frac{a_1}{a_2}, \quad \frac{a_1}{a_2} > 0. \quad (13)$$

Из (11) и (13) вытекает важное соотношение

$$a_1 a_4 = a_2 a_5, \quad (14)$$

выполнение которого обеспечивает существование нетопологического солитона (2), (9). Таким образом, справедлива

Теорема 2. Пусть выполнены соотношения (6), (11), (13), (14) и $\mu = \frac{1}{m}$.

Тогда уравнение (1) имеет решение в виде нетопологического солитона

$$u(t, x) = A \operatorname{ch}^{-\mu}(\xi) \exp(i\eta). \quad (15)$$

Отметим, что соотношения (11), (13), (14) являются законами распространения солитона (15) и связывают параметры солитона с коэффициентами уравнения (1).

2. При $m = 1$ система уравнений (7), (8) принимает вид:

$$a_3 f(\xi) + a_4 f^3(\xi) + a_5 \alpha^2 f''(\xi) = 0, \quad (16)$$

$$a_1 \alpha^2 f''(\xi) - (\omega + a_1 k^2) f(\xi) + a_2 f^3(\xi) = 0. \quad (17)$$

В этом случае она допускает топологический солитон в виде кинка

$$f(\xi) = A \operatorname{th} \xi, \quad \xi \geq 0, \quad (18)$$

где $A > 0$ – неизвестный параметр. Подставляя (18) в (16), (17), найдем

$$a_3 = 2\alpha^2 a_5, \quad A = \sqrt{-\frac{a_3}{a_4}}, \quad \frac{a_3}{a_4} < 0, \quad (19)$$

$$\omega + a_1 k^2 = -2a_1 \alpha^2, \quad A = \sqrt{\frac{\omega + a_1 k^2}{a_2}}, \quad \frac{\omega + a_1 k^2}{a_2} > 0. \quad (20)$$

Из (19), (20) также следует соотношение (14), которое обеспечивает существование и топологических солитонов.

Таким образом, справедлива

Теорема 3. Пусть выполнены соотношения (6), (19), (20), $m = 1$. Тогда уравнение (1) имеет решение вида

$$u(t, x) = A \operatorname{th} \xi \exp(i\eta), \quad \xi \geq 0.$$

II. О существовании топологических солитонов НУШ с потенциалом Бома и нелинейным членом, содержащим первую производную

Аналитическое моделирование уравнений Шредингера позволяет построить и исследовать новые классы нелинейных уравнений, допускающих солитонные решения. При этом используется дробно-рациональная форма солитонов, которая позволяет получить законы их распространения. Они представляют собой нелинейные алгебраические соотношения, связывающие параметры солитона с коэффициентами исходного уравнения.

Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) вида

$$iu_t + a_1 u_{xx} + a_2 |u|^{2m} u = i \left[a_3 u + a_4 |u|^{2m} u + a_5 u \frac{|u|_{xx}}{|u|} \right] + a_6 \frac{u}{|u|} |u|_x \quad (21)$$

с произвольными действительными коэффициентами a_1, a_6 . В отличие от (1) уравнение (21) содержит нелинейный член

$$a_6 \frac{u}{|u|} |u|_x,$$

который обеспечивает существование кинковых волновых решений, отличных от классических (18). Решение уравнения (21) строится в виде (2). Подставляя (2) в (21), найдем

$$\begin{aligned} \text{Im: } I_t + 2a_1 k I_x &= a_3 I + a_4 I^{2m+1} + a_5 I_{xx}, \\ \text{Re: } -\omega I + a_1 I_{xx} - a_1 k^2 I + a_2 I^{2m+1} &= a_6 I_x. \end{aligned} \quad (22)$$

Система (22) является определяющей системой уравнений относительно неизвестной функции $I(t, x)$. Ее решение строится в виде

$$I(t, x) = f(\xi) = (\lambda_0 + \lambda_1 t h \xi)^\mu, \quad \mu > 0, \quad (23)$$

где $\lambda_0 > 0, \lambda_0 \geq |\lambda_1|, \mu > 0$ – неизвестные параметры кинка.

Предположим, что

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda, \quad \alpha = 1, \quad \mu = \frac{1}{m}. \quad (24)$$

Тогда подставляя (23) в (22), найдем

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= -\frac{a_1}{a_2} (\mu^2 + \mu) = -\frac{a_5}{a_4} (\mu^2 + \mu), \quad \frac{a_5}{a_4} < 0, \\ v &= 2a_1 k - 2a_5 (1 + 2\mu), \quad \omega + a_1 k^2 = -4a_1 (\mu^2 + \mu). \end{aligned} \quad (25)$$

$$a_3 = 4a_5 \mu (1 + \mu), \quad a_6 = 2a_1 (1 + 2\mu).$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. Пусть выполнены условия (24), (25). Тогда уравнение (21) имеет кинковое волновое решение вида

$$u(t, x) = \left[-\frac{a_5}{a_4} (\mu^2 + \mu) \right]^{\frac{\mu}{2}} (1 + t h \xi)^\mu \exp(i\eta).$$

Отметим, что из (25) также вытекает соотношение (14)

$$a_1 a_4 = a_2 a_5.$$

III. Уравнение Шредингера с потенциалом Бома и законом нелинейности удвоенной степени. Существование нетопологических солитонов

Известно [8], что закон нелинейности удвоенной степени является одним из важных законов, описывающих механизм баланса между нелинейными и дисперсионными членами, который обеспечивает существование солитонов. Рассмотрим НУШ вида

$$iu_t + a_1 u_{xx} + a_2 |u|^{2m} u + a_3 |u|^{4m} u = i \left[a_4 u + a_5 |u|^{2m} u + a_6 |u|^{4m} u + a_7 u \frac{|u|_{xx}}{|u|} \right], \quad m > 0, \quad (26)$$

где a_1, a_7 – произвольные действительные числа. Решение уравнения (26) строится в виде (2). Подставляя (2) в (26), получим следующие определяющие уравнения:

$$\begin{aligned} \text{Im:} \quad I_t + 2a_1 k I_x &= a_4 I + a_5 I^{2m+1} + a_6 I^{4m+1} + a_7 I_{xx}, \\ \text{Re:} \quad -(\omega + a_1 k^2) I &+ a_1 I_{xx} + a_2 I^{2m+1} + a_3 I^{4m+1} = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Решение системы (27) строится в виде (4). Подставляя (4) в (27), найдем

$$\begin{aligned} (-v + 2a_1 k \alpha) f'(\xi) &= a_4 f(\xi) + a_5 f^{2m+1}(\xi) + a_6 f^{4m+1}(\xi) + a_7 \alpha^2 f''(\xi), \\ -(\omega + a_1 k^2) f(\xi) &+ a_1 \alpha^2 f''(\xi) + a_2 f^{2m+1}(\xi) + a_3 f^{4m+1}(\xi) = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Система (28) представляет собой систему двух уравнений относительно неизвестной функции $f(\xi)$. Если положить, что

$$v = 2a_1 k \alpha, \quad (29)$$

то из (28) получим систему определяющих уравнений для нетопологических солитонов:

$$\begin{aligned} a_4 f(\xi) + a_5 f^{2m+1}(\xi) + a_6 f^{4m+1}(\xi) + a_7 \alpha^2 f''(\xi) &= 0, \\ -(\omega + a_1 k^2) f(\xi) + a_2 f^{2m+1}(\xi) + a_3 f^{4m+1}(\xi) + a_1 \alpha^2 f''(\xi) &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Решение системы (30) строится в виде [9]

$$f(\xi) = [\lambda_0 + \lambda_1 \exp \xi + \lambda_2 \exp(-\xi)]^{-\mu}, \quad \mu = \frac{1}{2m}, \quad (31)$$

где $\lambda_0 > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ – неизвестные параметры солитона. Подставляя (31) в первое уравнение системы (30), получаем следующие соотношения:

$$\mu^2 = -\frac{a_4}{\alpha^2 a_7}, \quad \left(\frac{a_4}{a_7} < 0\right), \quad \lambda_0 = \frac{a_5}{\alpha^2 a_7 (\mu + 2\mu^2)}, \quad \left(\frac{a_5}{a_7} > 0\right), \quad (32)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{4(\mu^2 + \mu)} \left[\frac{a_5^2}{\alpha^4 a_7^2 (\mu + 2\mu^2)} + \frac{a_6}{\alpha^2 a_7} + \frac{a_4 a_5^2}{\alpha^6 a_7^3 (\mu + 2\mu^2)^2} \right] > 0.$$

Аналогично, используя второе уравнение системы (30), находим

$$\mu^2 = \frac{\omega + a_1 k^2}{\alpha^2 a_1} > 0, \quad \lambda_0 = \frac{a_2}{\alpha^2 a_1 (\mu + 2\mu^2)}, \quad \left(\frac{a_1}{a_2} > 0\right), \quad (33)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{4\alpha^2 a_1 (\mu + \mu^2)} \left[a_3 + \frac{a_2^2 (1 + \mu)}{\alpha^2 a_1 \mu (2\mu + 1)^2} \right] > 0.$$

Сравнивая соотношения (32), (33), приходим к важным зависимостям для коэффициентов уравнения (26):

$$\omega = -\frac{a_1 a_4}{a_7} - a_1 k^2, \quad a_1 a_5 = a_2 a_7, \quad (34)$$

$$a_7 \left[\frac{a_2^2 (\mu + 1)}{\alpha^2 a_1 \mu (2\mu + 1)} + a_3 \right] = a_1 \left[\frac{a_5^2 (\mu + 1)}{\alpha^2 a_7 \mu (2\mu + 1)^2} + a_6 \right].$$

Таким образом, на основании изложенного устанавливаем следующий результат.

Теорема 5. Пусть выполнены условия (29), (32)-(34). Тогда уравнение (26) имеет нетопологический солитон вида

$$u(t, x) = [\lambda_0 + \lambda_1 \exp \xi + \lambda_2 \exp(-\xi)]^{-\mu} \exp(i\eta).$$

IV. О существовании топологических солитонов НУШ с потенциалом Бома и законом нелинейности удвоенной степени

Математический анализ баланса нелинейных и дисперсионных членов показывает, что существование топологических солитонов возможно для уравнения

$$iu_t + a_1 u_{xx} + a_2 |u|^{2m} u + a_3 |u|^{4m} u =$$

$$= i \left[a_4 u + a_5 |u|^{2m} u + a_6 |u|^{4m} u + a_7 u \frac{|u|_{xx}}{|u|} \right] + a_8 \frac{u}{|u|} |u|_x, \quad (35)$$

которое отличается от уравнения (26) нелинейным членом

$$a_8 \frac{u}{|u|} |u|_x.$$

Решение уравнения (35) строится в виде (2). Подставляя (2) в (35), получим следующие определяющие уравнения:

$$\begin{aligned} \text{Im: } I_t + 2a_1 k I_x &= a_4 I + a_5 I^{2m+1} + a_6 I^{4m+1} + a_7 I_{xx}, \\ \text{Re: } -(\omega + a_1 k^2) I &+ a_1 I_{xx} + a_2 I^{2m+1} + a_3 I^{4m+1} = a_8 I_x. \end{aligned} \quad (36)$$

Решение системы (36) строится в виде (4). Подставляя (4) в (36), находим

$$\begin{aligned} (-v + 2a_1 k \alpha) f'(\xi) &= a_4 f(\xi) + a_5 f^{2m+1}(\xi) + a_6 f^{4m+1}(\xi) + a_7 \alpha^2 f''(\xi), \\ a_1 \alpha^2 f''(\xi) - (\omega + a_1 k^2) f(\xi) &+ a_2 f^{2m+1}(\xi) + a_3 f^{4m+1}(\xi) = a_8 \alpha f'(\xi). \end{aligned} \quad (37)$$

В отличие от (30) система (37) содержит первые и вторые производные неизвестной функции $f(\xi)$. Поэтому ее решение строится в виде (23), т. е.

$$f(\xi) = (\lambda_0 + \lambda_1 th\xi)^\mu, \quad \mu = \frac{1}{2m}, \quad (38)$$

где $\lambda_0 > 0$, $\lambda_0 \geq |\lambda_1|$. Подставляя (38) в первое и второе уравнения системы (37), находим соответственно:

$$\begin{aligned} th^0 \xi: \quad a_7 \alpha^2 \mu(\mu-1) \lambda_1^2 &+ (v-2a_1 k \alpha) \mu \lambda_0 \lambda_1 + a_4 \lambda_0^2 + a_5 \lambda_0^3 + a_6 \lambda_0^4 = 0, \\ th \xi: \quad -2\mu \lambda_0 \lambda_1 a_7 \alpha^2 &+ (v-2a_1 k \alpha) \mu \lambda_1^2 + 2a_4 \lambda_0 \lambda_1 + 3\lambda_0^2 \lambda_1 a_5 + 4\lambda_0^3 \lambda_1 a_6 = 0, \\ th^2 \xi: \quad -2\mu^2 \lambda_1^2 a_7 \alpha^2 &- \mu \lambda_0 \lambda_1 (v-2a_1 k \alpha) + a_4 \lambda_1^2 + 3\lambda_0 \lambda_1^2 a_5 + 6\lambda_0^2 \lambda_1^2 a_6 = 0, \\ th^3 \xi: \quad 2\mu \lambda_0 \lambda_1 a_7 \alpha^2 &- \mu \lambda_1^2 (v-2a_1 k \alpha) + \lambda_1^3 a_5 + 4\lambda_0 \lambda_1^3 a_6 = 0, \\ th^4 \xi: \quad (\mu^2 + \mu) \lambda_1^2 a_7 \alpha^2 &+ a_6 \lambda_1^4 = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} th^0 \xi: \quad \mu(\mu-1) a_1 \alpha^2 \lambda_1^2 &- \alpha \mu \lambda_0 \lambda_1 a_8 - (\omega + a_1 k^2) \lambda_0^2 + a_2 \lambda_0^3 + a_3 \lambda_0^4 = 0, \\ th \xi: \quad -2\mu \lambda_0 \lambda_1 a_1 \alpha^2 &- \alpha \mu \lambda_1^2 a_8 - (\omega + a_1 k^2) 2\lambda_0 \lambda_1 + 3\lambda_0^2 \lambda_1 a_2 + 4\lambda_0^3 \lambda_1 a_3 = 0, \\ th^2 \xi: \quad -2\mu^2 \lambda_1^2 a_1 \alpha^2 &+ \mu \lambda_0 \lambda_1 \alpha a_8 - (\omega + a_1 k^2) \lambda_1^2 + 3\lambda_0 \lambda_1^2 a_2 + 6\lambda_0^2 \lambda_1^2 a_3 = 0, \\ th^3 \xi: \quad 2\mu \lambda_0 \lambda_1 a_1 \alpha^2 &+ \mu \lambda_1^2 \alpha a_8 + a_2 \lambda_1^3 + 4\lambda_0 \lambda_1^3 a_3 = 0, \\ th^4 \xi: \quad (\mu^2 + \mu) \lambda_1^2 a_1 \alpha^2 &+ a_3 \lambda_1^4 = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Анализ разрешимости системы (39), (40) устанавливает существование топологических солитонов вида (38), т. е. справедлива следующая

Теорема 6. Для того чтобы система (37) имела решение вида (38) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (39), (40).

Исследуем эти соотношения. Для этого положим, что $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda > 0$. Тогда из (39) найдем

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= -\alpha^2 \left(\mu^2 + \mu \right) \frac{a_7}{a_6}, \quad \frac{a_7}{a_6} < 0, \\ a_5 \lambda &= 2\mu(2\mu + 1)a_7 \alpha^2 + \mu(v - 2a_1 k \alpha), \\ a_4 &= -2\mu(v - 2a_1 k \alpha) - 4\mu^2 a_7 \alpha^2.\end{aligned}\tag{41}$$

Остальные уравнения системы (39) превращаются в тождества. Из (40) получаем

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= -\alpha^2 \left(\mu^2 + \mu \right) \frac{a_1}{a_3}, \quad \frac{a_1}{a_3} < 0, \\ a_2 \lambda &= (4\mu^2 + 2\mu)a_1 \alpha^2 - \alpha \mu a_8, \\ (\omega + a_1 k^2) &= 4\mu^2 a_1 \alpha^2 - 2\alpha \mu a_8.\end{aligned}\tag{42}$$

Остальные уравнения системы (40) превращаются в тождества. Из (41), (42) находим

$$\frac{a_7}{a_6} = \frac{a_1}{a_3} \quad \text{или} \quad a_3 a_7 = a_1 a_6.$$

Остальные четыре уравнения системы (41), (42) представляют собой линейную алгебраическую систему относительно восьми коэффициентов a_1, a_8 . Поэтому система (41), (42) имеет бесконечное множество решений. Из проведенного анализа вытекает

Теорема 7. Пусть выполнены условия (41), (42). Тогда уравнение (35) имеет топологический солитон

$$u(t, x) = \lambda^\mu (1 + th\xi)^\mu \exp(i\eta), \quad \mu = \frac{1}{2m}.$$

V. Уравнение Шредингера с потенциалом Бома и законом нелинейности утроенной степени. Существование нетопологических солитонов

Закон утроенной степени нелинейности [8] требует, чтобы уравнение Шредингера содержало дисперсионные члены высших порядков и нелинейные члены более сложной структуры, чем потенциал Бома. Такому требованию удовлетворяет уравнение вида

$$\begin{aligned}
 & i(u_t + a_1 u_x + a_2 u_{xxx}) + a_3 u_{xx} + a_4 u_{xxxx} + a_5 |u|^{2m} u + a_6 |u|^{4m} u + a_7 |u|^{6m} u = \\
 & = i \left[a_8 u + a_9 |u|^{2m} u + a_{10} |u|^{4m} u + a_{11} |u|^{6m} u + a_{12} \frac{u}{|u|} |u|_{xx} + a_{13} \frac{u}{|u|} |u|_{xxxx} \right] \quad (43)
 \end{aligned}$$

с произвольными действительными коэффициентами a_1, a_{13} . Решение уравнения (43) строится в виде (2). Подставляя (2) в (43), находим

$$\begin{aligned}
 & i[I_t + i\omega I] + ia_1[I_x + ikI] + ia_2[I_{xxx} + 3ikI_{xx} - 3k^2 I_x - ik^3 I] + a_3[I_{xx} + 2ikI_x - k^2 I] + \\
 & + a_4[I_{xxxx} + 4ikI_{xxx} - 6k^2 I_{xx} - 4ik^3 I_x + k^4 I] + a_5 I^{2m+1} + a_6 I^{4m+1} + a_7 I^{6m+1} = \\
 & = i[a_8 I + a_9 I^{2m+1} + a_{10} I^{4m+1} + a_{11} I^{6m+1} + a_{12} I_{xx} + a_{13} I_{xxxx}]. \quad (44)
 \end{aligned}$$

Отделяя мнимую и действительную части, из (44) получаем:

$$\begin{aligned}
 \text{Im: } & I_t + a_1 I_x + a_2 I_{xxx} - 3k^2 a_2 I_x + 2ka_3 I_x + 4a_4 k I_{xxx} - 4a_4 k^3 I_x = \\
 & = a_8 I + a_9 I^{2m+1} + a_{10} I^{4m+1} + a_{11} I^{6m+1} + a_{12} I_{xx} + a_{13} I_{xxxx}, \quad (45)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Re: } & -\omega I - ka_1 I - 3ka_2 I_{xx} + a_2 k^3 I + a_3 I_{xx} - a_3 k^2 I + a_4 I_{xxxx} - \\
 & - 6a_4 k^2 I_{xx} + a_4 k^4 I + a_5 I^{2m+1} + a_6 I^{4m+1} + a_7 I^{6m+1} = 0. \quad (46)
 \end{aligned}$$

Система (45), (46) является определяющей системой уравнений для нетопологических солитонов. Для ее исследования предположим, что

$$I(t, x) = f(\xi), \quad \xi = \alpha x - vt + \psi. \quad (47)$$

Подставляя (47) в (45), (46), находим:

$$\begin{aligned}
 & (-v + a_1 \alpha - 3k^2 a_2 \alpha + 2ka_3 \alpha - 4a_4 k^3 \alpha) f'(\xi) + (a_2 \alpha^3 + 4a_4 k \alpha^3) f'''(\xi) = \\
 & = a_{12} \alpha^2 f''(\xi) + a_{13} \alpha^4 f''''(\xi) + a_8 f(\xi) + a_9 f^{2m+1}(\xi) + a_{10} f^{4m+1}(\xi) + a_{11} f^{6m+1}(\xi), \\
 & (-\omega - ka_1 + a_2 k^3 - a_3 k^2 + a_4 k^4) f(\xi) + (-3ka_2 \alpha^2 + a_3 \alpha^2 - 6a_4 k^2 \alpha^2) f''(\xi) + \\
 & + a_4 \alpha^4 f''''(\xi) + a_5 f^{2m+1}(\xi) + a_6 f^{4m+1}(\xi) + a_7 f^{6m+1}(\xi) = 0. \quad (48)
 \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$a_2 + 4a_4 k = 0, \quad v = a_1 \alpha - 3k^2 a_2 \alpha + 2ka_3 \alpha - 4a_4 k^3 \alpha. \quad (49)$$

Тогда система (48) принимает вид

$$\begin{aligned}
& a_8 f(\xi) + a_9 f^{2m+1}(\xi) + a_{10} f^{4m+1}(\xi) + a_{11} f^{6m+1}(\xi) + a_{12} \alpha^2 f''(\xi) + a_{13} \alpha^4 f'''(\xi) = 0, \\
& Q f(\xi) + a_5 f^{2m+1}(\xi) + a_6 f^{4m+1}(\xi) + a_7 f^{6m+1}(\xi) + \alpha^2 R f''(\xi) + a_4 \alpha^4 f'''(\xi) = 0, \quad (50) \\
& Q \equiv -\omega - k a_1 + a_2 k^3 - a_3 k^2 + a_4 k^4, \quad R \equiv -3k a_2 + a_3 - 6a_4 k^2.
\end{aligned}$$

Решение системы (50) строится в виде:

$$f(\xi) = [\lambda_0 + \lambda_1 \exp \xi + \lambda_2 \exp(-\xi)]^{-\mu}, \quad \mu = \frac{1}{2m}, \quad (51)$$

где $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ – неизвестные параметры солитона. Подставляя (51) в систему (50) и приравнявая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях экспонент, находим

$$\begin{aligned}
& a_8 + \alpha^2 \mu^2 a_{12} + \alpha^4 (I_4 - 6I_3 + 7I_2 - \mu) a_{13} = 0, \\
& 4\lambda_0 a_8 + a_9 + \alpha^2 \lambda_0 (2I_2 - 3\mu) a_{12} + \alpha^4 \lambda_0 (-6I_3 + 14I_2 - 3\mu) a_{13} = 0 \\
& (6\lambda_0^2 + 4\lambda_1 \lambda_2) a_8 + 3\lambda_0 a_9 + a_{10} + \alpha^2 [\lambda_0^2 I_2 - \mu (3\lambda_0^2 + 4\lambda_1 \lambda_2)] a_{12} + \\
& + \alpha^4 [-4I_4 \lambda_1 \lambda_2 + 3I_2 (4\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0^2) + 4I_2 \lambda_0^2 - \mu (3\lambda_0^2 + 4\lambda_1 \lambda_2)] a_{13} = 0, \\
& (4\lambda_0^3 + 12\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2) a_8 + 3(\lambda_0^2 + 3\lambda_1 \lambda_2) a_9 + 2\lambda_0 a_{10} + a_{11} + \alpha^2 [-2I_2 \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 - \\
& - \mu (\lambda_0^3 + 9\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2)] a_{12} + \alpha^4 [6I_3 \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 + 10I_2 \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 - \mu (\lambda_0^3 + 9\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2)] a_{13} = 0, \\
& (\lambda_0^4 + 12\lambda_0^2 \lambda_1 \lambda_2 + 6\lambda_1^2 \lambda_2^2) a_8 + (\lambda_0^3 + 6\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2) a_9 + (\lambda_0^2 + 2\lambda_1 \lambda_2) a_{10} + \lambda_0 a_{11} + \\
& + \alpha^2 [I_2 (-2\lambda_0^2 \lambda_1 \lambda_2 - 2\lambda_1^2 \lambda_2^2) - \mu (6\lambda_0^2 \lambda_1 \lambda_2 + 6\lambda_1^2 \lambda_2^2)] a_{12} + \alpha^4 [6I_4 \lambda_1^2 \lambda_2^2 + 12I_3 \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \\
& + 3I_2 (2\lambda_0^2 \lambda_1 \lambda_2 + 6\lambda_1^2 \lambda_2^2) + 4I_2 (-2\lambda_0^2 \lambda_1 \lambda_2 - 2\lambda_1^2 \lambda_2^2) - \mu (6\lambda_0^2 \lambda_1 \lambda_2 + 6\lambda_1^2 \lambda_2^2)] a_{13} = 0, \\
& Q + \alpha^2 \mu^2 R + \alpha^4 (I_4 - 6I_3 + 7I_2 - \mu) a_4 = 0, \\
& 4\lambda_0 Q + a_5 + \alpha^2 \lambda_0 R (2I_2 - 3\mu) + \alpha^4 \lambda_0 a_4 (-6I_3 + 14I_2 - 3\mu) = 0, \quad (52) \\
& Q (6\lambda_0^2 + 4\lambda_1 \lambda_2) + 3\lambda_0 a_5 + a_6 + \alpha^2 [I_2 \lambda_0^2 - \mu (3\lambda_0^2 + 4\lambda_1 \lambda_2)] R + \\
& + \alpha^4 [-4I_4 \lambda_1 \lambda_2 + 3I_2 (\lambda_0^2 + 4\lambda_1 \lambda_2) + 4I_2 \lambda_0^2 - \mu (3\lambda_0^2 + 4\lambda_1 \lambda_2)] a_4 = 0,
\end{aligned}$$

$$Q(4\lambda_0^3 + 12\lambda_0\lambda_1\lambda_2) + 3a_5(\lambda_0^2 + 3\lambda_1\lambda_2) + 2\lambda_0a_6 + a_7 + \alpha^2 R[-2I_2\lambda_0\lambda_1\lambda_2 - \mu(\lambda_0^3 + 9\lambda_0\lambda_1\lambda_2)] + \alpha^4 a_4[(6I_3 + 10I_2)\lambda_0\lambda_1\lambda_2 - \mu(\lambda_0^3 + 9\lambda_0\lambda_1\lambda_2)] = 0,$$

$$Q(\lambda_0^4 + 12\lambda_0^2\lambda_1\lambda_2 + 6\lambda_1^2\lambda_2^2) + a_5(\lambda_0^3 + 6\lambda_0\lambda_1\lambda_2) + a_6(\lambda_0^2 + 2\lambda_1\lambda_2) + a_7\lambda_0 + \alpha^2 R[I_2(-2\lambda_0^2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1^2\lambda_2^2) - \mu(6\lambda_0^2\lambda_1\lambda_2 + 6\lambda_1^2\lambda_2^2)] + \alpha^4 a_4[6I_4\lambda_1^2\lambda_2^2 + 12I_3\lambda_1^2\lambda_2^2 + 3I_2(2\lambda_0^2\lambda_1\lambda_2 + 6\lambda_1^2\lambda_2^2) + 4I_2(-2\lambda_0^2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1^2\lambda_2^2) - 6\mu(\lambda_0^2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1^2\lambda_2^2)] = 0,$$

где

$$I_2 = \mu(\mu+1), \quad I_3 = \mu(\mu+1)(\mu+2), \quad I_4 = \mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3).$$

Таким образом, совместность системы (52) обеспечивает существование нетопологических солитонов уравнения (43).

Предположим, что λ_0^* , λ_1^* , λ_2^* произвольные фиксированные положительные числа. Тогда система (52) превратится в линейную алгебраическую систему десяти уравнений относительно коэффициентов a_1, a_{13} , к которой следует добавить уравнение из (49) $a_2 + 4a_4k = 0$. Такая система имеет бесконечно много решений.

Теорема 8. Пусть выполнены условия (49), (52). Тогда по заданным положительным числам λ_0^* , λ_1^* , λ_2^* можно подобрать коэффициенты a_1, a_{13} так, чтобы уравнение (43) имело решение вида (2), (51).

VI. О существовании топологических солитонов НУШ с потенциалом Бома и законом нелинейности утроенной степени

Известно [6], что топологические солитоны отличаются от нетопологических солитонов своей структурой и поведением на бесконечности. С математической точки зрения мы связываем с ними анзац вида

$$f(\xi) = (\lambda_0 + \lambda_1 th\xi)^\mu, \quad \mu > 0.$$

При этом оказывается, что соответствующее НУШ имеет более простую структуру нелинейных членов чем уравнение (43). Баланс между нелинейными и дисперсионными членами обеспечивается наличием производных третьего порядка. Такому требованию отвечает уравнение

$$i(u_t + a_1 u_x + a_2 u_{xxx}) + a_3 u_{xx} + a_4 u_{xxx} + a_5 |u|^{2m} u + a_6 |u|^{4m} u + a_7 |u|^{6m} u + M \frac{u}{|u|} |u|_x = i \left[a_8 u + a_9 |u|^{2m} u + a_{10} |u|^{4m} u + a_{11} |u|^{6m} u + N \frac{u}{|u|} |u|_{xx} \right] \quad (53)$$

с произвольными действительными коэффициентами $\overline{a_1}, \overline{a_{11}}, M, N$. Решение уравнения (53) строится в виде (2). Подставляя (2) в (53), находим

$$\begin{aligned} & i[I_t + i\omega I] + ia_1[I_x + ikI] + ia_2[I_{xxx} + 3ikI_{xx} - 3k^2I_x - ik^3I] + a_3[I_{xx} + 2ikI_x - k^2I] + \\ & + a_4[I_{xxx} + 3ikI_{xx} - 3k^2I_x - ik^3I] + a_5I^{2m+1} + a_6I^{4m+1} + a_7I^{6m+1} + MI_x = \\ & = i[a_8I + a_9I^{2m+1} + a_{10}I^{4m+1} + a_{11}I^{6m+1} + NI_{xx}]. \end{aligned} \quad (54)$$

Отделяя мнимую и действительную части, из (54) получаем:

$$\begin{aligned} \text{Im: } & I_t + a_1I_x + a_2I_{xxx} - 3k^2a_2I_x + 2a_3kI_x + 3a_4kI_{xx} - a_4k^3I = \\ & = a_8I + a_9I^{2m+1} + a_{10}I^{4m+1} + a_{11}I^{6m+1} + NI_{xx}, \\ \text{Re: } & -\omega I - a_1kI - 3a_2kI_{xx} + a_2k^3I + a_3I_{xx} - k^2a_3I + a_4I_{xxx} - \\ & - 3a_4k^2I_x + a_5I^{2m+1} + a_6I^{4m+1} + a_7I^{6m+1} + MI_x = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

Система (55) является определяющей системой уравнений для топологических солитонов. Ее решение строится в виде (47).

Подставляя (47) в (55), находим:

$$\begin{aligned} & (-v + a_1\alpha - 3k^2a_2\alpha + 2a_3k\alpha)f'(\xi) + (3a_4k\alpha^2 - N\alpha^2)f''(\xi) + a_2\alpha^3f'''(\xi) = \\ & = (a_4k^3 + a_8)f(\xi) + a_9f^{2m+1}(\xi) + a_{10}f^{4m+1}(\xi) + a_{11}f^{6m+1}(\xi), \\ & (M - 3a_4k^2)\alpha f'(\xi) + (a_3 - 3a_2k)\alpha^2f''(\xi) + a_4\alpha^3f'''(\xi) + \\ & + (-\omega - a_1k + a_2k^3 - k^2a_3)f(\xi) + a_5f^{2m+1}(\xi) + a_6f^{4m+1}(\xi) + a_7f^{6m+1}(\xi) = 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Предположим, что выполнены следующие соотношения:

$$v = a_1\alpha - 3k^2a_2\alpha + 2a_3k\alpha, \quad 3a_4k = N, \quad M = 3a_4k^2, \quad a_3 = 3a_2k. \quad (57)$$

Тогда система (56) примет вид

$$a_2\alpha^3f'''(\xi) = (a_4k^3 + a_8)f(\xi) + a_9f^{2m+1}(\xi) + a_{10}f^{4m+1}(\xi) + a_{11}f^{6m+1}(\xi), \quad (58)$$

$$a_4\alpha^3f'''(\xi) = (\omega + a_1k - a_2k^3 + k^2a_3)f(\xi) - a_5f^{2m+1}(\xi) - a_6f^{4m+1}(\xi) - a_7f^{6m+1}(\xi). \quad (59)$$

Таким образом, искомая волновая функция $f(\xi)$ должна удовлетворять уравнениям (58), (59). В качестве решения возьмем следующий анзац:

$$f(\xi) = F^\mu(\xi) = (\lambda_0 + \lambda_1 \text{th} \xi)^{\frac{1}{2m}}, \quad (60)$$

где $\lambda_0 > 0$, $\lambda_0 > |\lambda_1|$. Тогда, подставляя (60) в (58), найдем

$$\begin{aligned} a_2 \alpha^3 \left[I_3 (F'(\xi))^3 + 3I_2 F(\xi) F'(\xi) F''(\xi) + \mu F^2(\xi) F'''(\xi) \right] = \\ = (a_4 k^3 + a_8) F^3(\xi) + a_9 F^4(\xi) + a_{10} F^5(\xi) + a_{11} F^6(\xi), \end{aligned} \quad (61)$$

$$I_2 = \mu(\mu - 1), \quad I_3 = \mu(\mu - 1)(\mu - 2), \quad \mu = \frac{1}{2m}.$$

Из (61), приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $th\xi$, получим

$$\begin{aligned} th^6(\xi): \quad -a_2 \alpha^3 (I_3 + 6I_2 + 6\mu) &= a_{11} \lambda_1^3, \\ th^5(\xi): \quad -a_2 \alpha^3 (6I_2 + 12\mu) \lambda_0 &= \lambda_1^3 (a_{10} + 6a_{11} \lambda_0), \\ th^4(\xi): \quad a_2 \alpha^3 \left[3I_3 \lambda_1^2 + 12I_2 \lambda_1^2 - 2\mu (3\lambda_0^2 - 4\lambda_1^2) \right] &= a_9 \lambda_1^3 + 5a_{10} \lambda_0 \lambda_1^3 + 15a_{11} \lambda_0^2 \lambda_1^3, \\ th^3(\xi): \quad a_2 \alpha^3 (12I_2 + 16\mu) \lambda_0 &= (a_4 k^3 + a_8) \lambda_1 + 4a_9 \lambda_0 \lambda_1 + 10a_{10} \lambda_0^2 \lambda_1 + 20a_{11} \lambda_0^3 \lambda_1, \\ th^2(\xi): \quad a_2 \alpha^3 \left[-3I_3 \lambda_1^2 - 6I_2 \lambda_1^2 - 2\mu (\lambda_1^2 - 4\lambda_0^2) \right] &= 3(a_4 k^3 + a_8) \lambda_0 \lambda_1 + \\ &+ 6a_9 \lambda_0^2 \lambda_1 + 10a_{10} \lambda_0^3 \lambda_1 + 15a_{11} \lambda_0^4 \lambda_1, \\ th(\xi): \quad -a_2 \alpha^3 (6I_2 + 4\mu) \lambda_0 \lambda_1 &= 3(a_4 k^3 + a_8) \lambda_0^2 + 4a_9 \lambda_0^3 + 5a_{10} \lambda_0^4 + 6a_{11} \lambda_0^5, \\ th^0(\xi): \quad a_2 \alpha^3 (I_3 \lambda_1^3 - 2\mu \lambda_0^2 \lambda_1) &= (a_4 k^3 + a_8) \lambda_0^3 + a_9 \lambda_0^4 + a_{10} \lambda_0^5 + a_{11} \lambda_0^6. \end{aligned} \quad (62)$$

Аналогично, подставляя (60) в (59) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $f(\xi)$, находим:

$$\begin{aligned} a_4 \alpha^3 (I_3 + 6I_2 + 6\mu) &= a_7 \lambda_1^3, \\ a_4 \alpha^3 (6I_2 + 12\mu) \lambda_0 &= \lambda_1^3 (a_6 + 6a_7 \lambda_0), \\ a_4 \alpha^3 \left[3I_3 \lambda_1^2 + 12I_2 \lambda_1^2 - 2\mu (3\lambda_0^2 - 4\lambda_1^2) \right] &= -(a_5 \lambda_1^3 + 5a_6 \lambda_0 \lambda_1^3 + 15a_7 \lambda_0^2 \lambda_1^3), \\ a_4 \alpha^3 (12I_2 + 16\mu) \lambda_0 &= H \lambda_1 - 4a_5 \lambda_0 \lambda_1 - 10a_6 \lambda_0^2 \lambda_1 - 20a_7 \lambda_0^3 \lambda_1, \\ a_4 \alpha^3 \left[-3I_3 \lambda_1^2 - 6I_2 \lambda_1^2 - 2\mu (\lambda_1^2 - 4\lambda_0^2) \right] &= 3H \lambda_0 \lambda_1 - 6a_5 \lambda_0^2 \lambda_1 - 10a_6 \lambda_0^3 \lambda_1 - 15a_7 \lambda_0^4 \lambda_1, \\ -a_4 \alpha^3 (6I_2 + 4\mu) \lambda_0 \lambda_1 &= 3H \lambda_0^2 - 4a_5 \lambda_0^3 - 5a_6 \lambda_0^4 - 6a_7 \lambda_0^5, \\ a_4 \alpha^3 (I_3 \lambda_1^3 - 2\mu \lambda_0^2 \lambda_1) &= H \lambda_0^3 - a_5 \lambda_0^4 - a_6 \lambda_0^5 - a_7 \lambda_0^6, \\ H &\equiv \omega + a_1 k + a_3 k^2 - a_2 k^3. \end{aligned} \quad (63)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 9. Для того чтобы система (58), (59) имела решение вида (60) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (62), (63).

Изучим эти соотношения. Для этого положим, что $\lambda_0 = \lambda_1 \equiv \lambda > 0$. Тогда соотношения (62), (63) принимают вид:

$$\begin{aligned} a_2 \alpha^3 (I_3 - 2\mu) &= (a_4 k^3 + a_8) + a_9 \lambda + a_{10} \lambda^2 + a_{11} \lambda^3, \\ a_2 \alpha^3 (3I_3 + 12I_2 + 2\mu) &= a_9 \lambda + 5a_{10} \lambda^2 + 15a_{11} \lambda^3, \\ -a_2 \alpha^3 (6I_2 + 12\mu) &= a_{10} \lambda^2 + 6a_{11} \lambda^3, \\ -a_2 \alpha^3 (I_3 + 6I_2 + 6\mu) &= a_{11} \lambda^3, \\ a_4 \alpha^3 (I_3 - 2\mu) &= H - a_5 \lambda - a_6 \lambda^2 - a_7 \lambda^3, \\ a_4 \alpha^3 (3I_3 + 12I_2 + 2\mu) &= -(a_5 \lambda + 5a_6 \lambda^2 + 15a_7 \lambda^3), \\ a_4 \alpha^3 (6I_2 + 12\mu) &= \lambda^2 (a_6 + 6a_7 \lambda), \\ a_4 \alpha^3 (I_3 + 6I_2 + 6\mu) &= a_7 \lambda^3 \end{aligned} \quad (64)$$

соответственно. При этом остальные соотношения из (62), (63) обращаются в тождества. Таким образом, мы получили линейную алгебраическую систему (64) из 8 уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_1, a_{11} , к которой следует добавить соотношение $a_3 = 3a_2 k$. Такая система имеет бесконечно много решений. Поэтому справедлива

Теорема 10. Пусть выполнены условия (57), (64). Тогда для $\forall \lambda > 0$ можно подобрать коэффициенты a_1, a_{11}, M, N так, чтобы уравнение (53) имело решение вида

$$u(t, x) = (\lambda + \lambda t h \xi)^{\frac{1}{2m}} \exp(i\eta).$$

Таким образом, в работе найдены законы существования топологических и нетопологических солитонов уравнений Шредингера с потенциалом Бома и степенными законами нелинейности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Biswas, A. Soliton solutions of the perturbed resonant nonlinear Schrodinger's equation with full nonlinearity by semi-inverse variational principle / A. Biswas // Quantum Physics Letters. – 2013. – Vol. 1, N 2. – P. 79–83.
2. Жестков, С. В. Конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных : монография / С. В. Жестков. – Могилев : МГУ им. А. А. Кулешова, 2006. – 220 с.

3. **Жестков, С. В.** О существовании солитонных решений $(2+1)$ -мерного уравнения Шредингера со степенно-показательным законом нелинейности / С. В. Жестков // Еругинские чтения – 2013. XV : Междунар. науч. конф. по диф. уравнениям : тез. докл., Гродно, 13–16 мая 2013. Ч. 2. – Минск : Ин-т математики НАН Беларуси, 2013. – С. 6–7.
4. **Жестков, С. В.** О существовании светлых и темных солитонов нелинейных уравнений Шредингера с потенциалом Бома и степенным законом затухания / С. В. Жестков // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57. – № 4. – С. 65–67.
5. **Жестков, С. В.** О существовании нетопологических солитонов $(2+1)$ -мерного уравнения Шредингера с потенциалом Бома и степенными законами нелинейности / С. В. Жестков // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования : матер. науч. конф. “Герценовские чтения – 2014”. LXVII. 14–18 апр. 2014. – С. 56–58.
6. **Жестков, С. В.** О солитонных решениях обобщенного нелинейного уравнения Шредингера / С. В. Жестков // Весці НАНБ. Сер. фіз.мат. навук. – 2014. – № 1. – С. 77–81.
7. **Жестков, С. В.** О построении топологических солитонов $(2+1)$ -мерного уравнения Шредингера с потенциалом Бома и степенным законом нелинейности / С. В. Жестков, В. С. Новашинская // XVI Междунар. науч. конф. по диф. уравнениям (Еругинские чтения – 2014): тез. докл. Ч. 2, Новополоцк, 20–22 мая 2014. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 2014. – С. 8–9.
8. **Biswas, A.** Theory of non-Kerr law generalized vector solitons / A. Biswas // Appl. math. and comput. – 2003. – Vol. 136. – P. 443–452.
9. **Жестков, С. В.** О построении оптических солитонов $(2+1)$ -мерного уравнения Шредингера с зависящими от времени коэффициентами и законом нелинейности удвоенной степени / С. В. Жестков, В. С. Новашинская // Некоторые проблемы соврем. математики и математич. образования : матер. науч. конф. “Герценовские чтения – 2013”. – LXVII. 14–18 апр., 2014. – V2014. – С. 56–58.

Поступила в редакцию 10.10.2014 г.

Summary

The theory of topological and nontopological solitons of nonlinear Shrodinger's equations with potential Bohm and power laws of nonlinearity is developed.