УДК 512.548

О СИММЕТРИЧЕСКИХ КУБИЧЕСКИХ МАТРИЦАХ

А. М. Гальмак
доктор физико-математических наук, доцент
Могилевский государственный университет продовольствия,
г. Могилев, РБ

В статье изучаются кубические матрицы порядка $n \geq 2$ над произвольным кольцом P, у которых для любого $r = 1, 2, \ldots, n$ r-е сечения ориентаций (i), (j) и (k) совпадают. Множество всех таких кубических матриц совпадает с множеством $\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$ всех симметрических кубических матриц порядка n над P. Приводятся критерии симметричности кубической матрицы. Указан один из возможных способов конструирования всех кубических матриц из $\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$. Показано, что множество всех кубических матриц порядка n над P, у которых определители ориентаций (i), (j) и (k) совпадают, шире множества $\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$.

1 Введение

В теории кубических матриц, которые являются пространственными аналогами квадратных матриц, значительное место занимают исследования, связанные с изучением пространственных обобщений обычных определителей. К числу таких обобщений относятся кубические детерминанты из [1, 2]. Кроме того, в [3] для любой кубической матрицы A порядка n над ассоциативным, коммутативным кольцом P с единицей были определены четыре вида определителей: $\det^{(i)}A$ – определитель ориентации (i); $\det^{(j)}A$ – определитель ориентации (j), $\det^{(k)}A$ – определитель ориентации (k) и полный определитель $\det A$. Напомним эти определения из [3].

Определителем ориентации (s) кубической матрицы $A = (a_{ijk})$, где $s \in \{i, j, k\}$, называется [3] произведение определителей всех ее сечений ориентации (s).

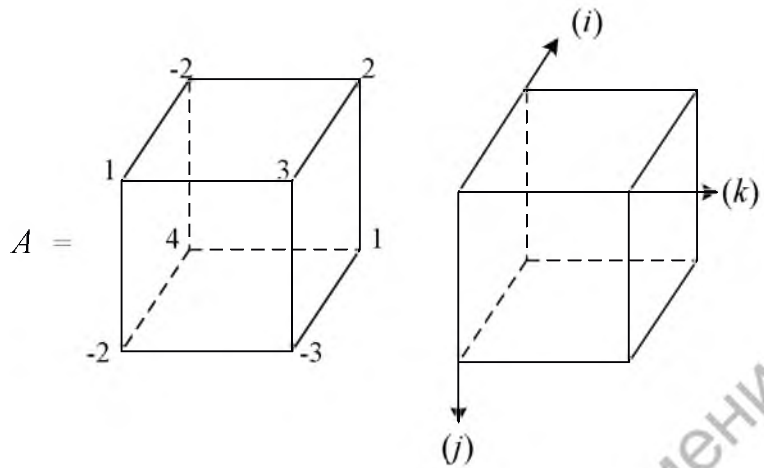
Полным определителем кубической матрицы $A = (a_{ijk})$ называется [3] произведение ее определителей ориентаций (i), (j) и (k).

Таким образом, согласно определению,

$$\det{}^{(i)}(a_{ijk}) = \det(a_{1jk})\det(a_{2jk}) \ldots \det(a_{mjk}),$$
$$\det{}^{(j)}(a_{ijk}) = \det(a_{i1k})\det(a_{i2k}) \ldots \det(a_{imk}),$$
$$\det{}^{(k)}(a_{ijk}) = \det(a_{ij1})\det(a_{ij2}) \ldots \det(a_{ijm}),$$
$$\det(a_{ijk}) = \det{}^{(i)}(a_{ijk})\det{}^{(j)}(a_{ijk})\det{}^{(k)}(a_{ijk}).$$

Сравнивая приведенные выше определения определителей из [3] с определением кубических детерминантов из [1, 2], видим, что определители из [3] и кубические детерминанты из [1, 2] – это совершенно разные понятия.

Пример 1.1. Пусть $n = 2$, $P = \mathbb{Z}$,



Найдем все определители пространственной матрицы A:

$$\det{}^{(i)}A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-10) = -30;$$

$$\det{}^{(j)}A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8\cdot 10 = 80;$$

$$\det{}^{(k)}A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot 9 = 0;$$

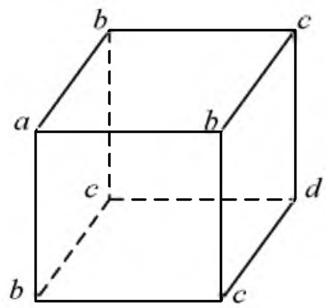
$$\det A = 30\cdot 80\cdot 0 = 0.$$

Отметим, что для кубической матрицы A из рассмотренного примера кубический детерминант сигнатуры $[\,{}^{+}_{i}\,]$ равен – 1.

Представляет интерес следующий

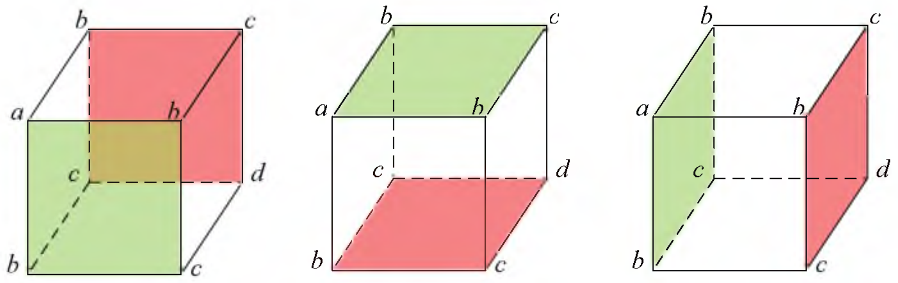
Вопрос 1.1. *Существуют ли для любого $n \geq 2$ кубические матрицы, у которых определители ориентаций* (i), (j) *и* (k) *совпадают*?

Пример 1.2. Рассмотрим кубическую матрицу



(1.1)

и ее сечения ориентаций (i), (j) и (k)



сечения ориентации (i) | сечения ориентации (j) | сечения ориентации (k)

где a, b, c и d – произвольные элементы кольца P (первые сечения каждой ориентации имеют зелёный цвет, вторые – красный цвет). Эта кубическая матрица примечательна тем, что у нее первые сечения ориентаций (i), (j) и (k) совпадают, совпадают и вторые сечения ориентаций (i), (j) и (k). Понятно, что у этой кубической матрицы определители ориентаций (i), (j) и (k) совпадают и равны

$$(ac - b^2)(bd - c^2).$$

Таким образом, при $n = 2$ ответ на сформулированный выше вопрос 1.1 является положительным. Для $n > 2$ ответ будет также положительным, если будет получен утвердительный ответ на

Вопрос 1.2. *Существуют ли для любого $n > 2$ кубические матрицы порядка n, у которых для любого $r = 1, 2, \ldots, n$ r-е сечения ориентаций (i), (j) и (k) совпадают*?

2. Симметрические кубические матрицы

Можно заметить, что кубическая матрица (1.1) является симметрической в смысле следующего определения. Кубическая матрица (a_{ijk}) порядка n называется [1] *симметрической*, если

$$a_{ijk} = a_{ikj} = a_{jik} = a_{jki} = a_{kij} = a_{kji}$$

для любых $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Множество всех симметрических кубических матриц порядка n над P непусто, так как содержит любую кубическую матрицу порядка n над P, у которой все элементы совпадают с одним и тем же элементом из P.

Ясно, что если зафиксировать $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то r-е сечения ориентаций (i) и (j)

$$(a_{rjk}) = \begin{pmatrix} a_{r1} & \cdots & a_{r1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{rnn} \end{pmatrix}, \ (a_{irk}) = \begin{pmatrix} a_{1r1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nrn} \end{pmatrix}$$

кубической матрицы (a_{ijk}) порядка n совпадают тогда и только тогда, когда $a_{rst} = a_{srt}$ для любых $s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Аналогично, r-е сечения ориентаций (i) и (k) кубической матрицы (a_{ijk}) порядка n совпадают тогда и только тогда, когда $a_{rst} = a_{str}$ для любых $s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Точно также, r-е сечения ориентаций (j) и (k) кубической матрицы (a_{ijk}) порядка n совпадают тогда и только тогда, когда $a_{srt} = a_{str}$ для любых $s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Таким образом, у кубической матрицы (a_{ijk}) порядка n r-е сечения ориентаций (i), (j) и (k) совпадают для любого $r = 1, 2, \ldots, n$ тогда и только тогда, когда

$$a_{rst} = a_{srt} = a_{str}$$

для любых $r, s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Можно показать, что если у кубической матрицы (a_{ijk}) порядка n для любого $r = 1, 2, \ldots, n$ r-е сечения ориентаций (i), (j) и (k) совпадают, то у этой кубической матрицы все сечения любой ориентаций являются симметрическими матрицами. Поэтому у кубической матрицы (a_{ijk}) порядка n r-е сечения ориентаций (i), (j) и (k) совпадают для любого $r = 1, 2, \ldots, n$ тогда и только тогда, когда

$$a_{rst} = a_{rts} = a_{srt} = a_{trs} = a_{str} = a_{tsr}$$

для любых $r, s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то есть имеет место

Предложение 2.1. *Множество всех кубических матриц порядка n над P, у которых r-е сечения ориентаций (i), (j) и (k) совпадают для любого $r = 1, 2, \ldots, n$, совпадает с множеством всех симметрических кубических матриц порядка n над P.*

Таким образом, кубические матрицы из вопроса 1.2 это ни что иное, как симметрические кубические матрицы.

Обозначим через $\mathbf{M}_{n\times n\times n}(P)$ множество всех кубических матриц порядка n над P, а через $\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$ множество всех симметрических кубических матриц порядка n над P. Согласно предложению 2.1,

$$\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P) = \{(a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{n\times n\times n}(P) \mid (a_{rjk}) = (a_{irk}) = (a_{ijr}),\ r = 1, \ldots, n\}.$$

Поэтому справедливо

Предложение 2.2. *У любой кубической матрицы $A \in \mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$ ее определители ориентаций (i), (j) и (k) совпадают*:

$$\det{}^{(i)}A = \det{}^{(j)}A = \det{}^{(k)}A.$$

Для $n = 1$ считаем $\mathbf{\Sigma}_{1\times 1\times 1}(P) = P$.

Легко проверить справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.1. *Множество $\mathbf{\Sigma}_{2\times 2\times 2}(P)$ совпадает с множеством всех кубических матриц второго порядка вида* (1.1).

3. Критерии симметричности кубической матрицы

Укажем один из способов получения всех кубических матриц порядка n, у которых для любого $r = 1, 2, \ldots, n$ r-е сечения ориентаций (i), (j) и (k) совпадают.

Обозначим через $\mathbf{\Sigma}^{[1]}_{n\times n\times n}(P)$ множество всех кубических матриц порядка n над P, у которых первые сечения ориентаций (i), (j) и (k) совпадают и являются симметрическими матрицами, то есть

$$\mathbf{\Sigma}^{[1]}_{n\times n\times n}(P) = \{A = (a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{n\times n\times n}(P) \mid (a_{1jk}) = (a_{i1k}) = (a_{ij1}) \in \Sigma_n(P)\},$$

где $\Sigma_n(P)$ – множество всех симметрических матриц порядка n над P.

Если у кубической матрицы A порядка n над P удалить первые сечения ориентаций (i), (j) и (k), то получится кубическая подматрица порядка $n - 1$ над P, которую будем обозначать символом ^{-1}A.

Обозначим через $^{-1}\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$ множество всех кубических матриц порядка n над кольцом P, у которых кубическая подматрица ^{-1}A принадлежит множеству $\mathbf{\Sigma}_{(n-1)\times(n-1)\times(n-1)}(P)$.

При доказательстве приведенной ниже теоремы будет использоваться следующий простой факт: *если у матриц A и B равны подматрицы, получающиеся вычеркиванием первых строк и первых столбцов, то для равенства самих матриц A* и *B достаточно равенства их первых строк и равенства их первых столбцов*.

Для произвольной матрицы A будем использовать следующие обозначения: $A^{(i)}$ – (i)-я строка, $A_{(j)}$ – (j)-й столбец.

Теорема 3.1. *Для любого целого $n \geq 2$ верно равенство*

$$\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P) = \mathbf{\Sigma}^{[1]}_{n\times n\times n}(P) \cap {}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P).$$

Доказательство. Так как, согласно лемме 2.1, любая кубическая матрица из $\mathbf{\Sigma}_{2\times 2\times 2}(P)$ имеет вид (1.1), то

$$\mathbf{\Sigma}^{[1]}_{n\times n\times n}(P) = \mathbf{\Sigma}_{2\times 2\times 2}(P).$$

Кроме того, из условия $\mathbf{\Sigma}_{1\times 1\times 1}(P) = P$ следует

$$^{-1}\mathbf{\Sigma}_{2\times 2\times 2}(P) = \mathbf{M}_{2\times 2\times 2}(P).$$

Поэтому при $n = 2$ равенство из формулировки теоремы верно.

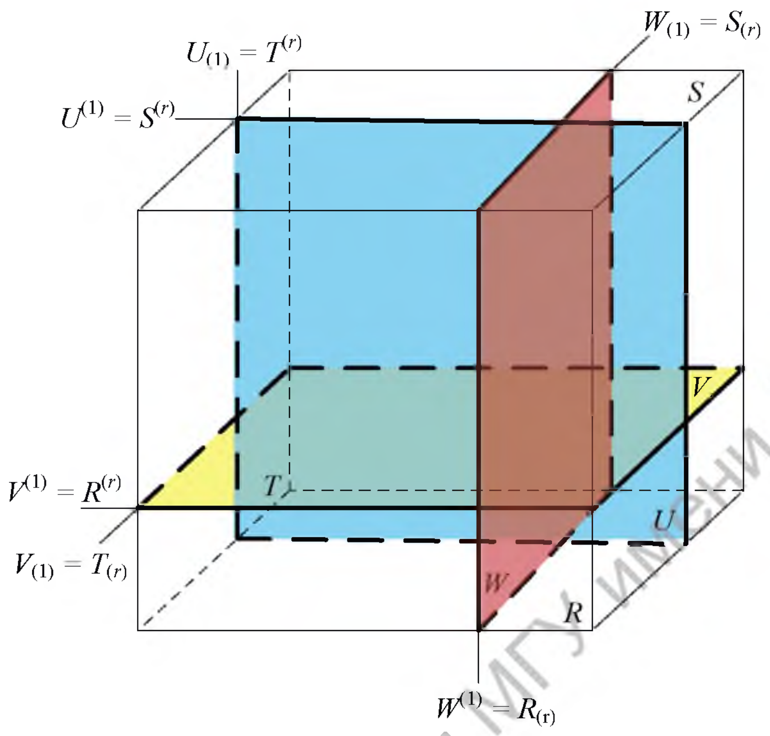
Далее считаем $n \geq 3$.

Пусть

$$A \in \mathbf{\Sigma}^{[1]}_{n\times n\times n}(P) \cap {}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P).$$

Выберем произвольно $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и пусть R, S и T – первые сечения соответственно ориентаций (i), (j) и (k) кубической матрицы A; U, V и W – r-е сечения соответственно ориентаций (i), (j) и (k) этой же кубической матрицы A.

Далее для наглядности будем пользоваться следующим изображением указанных сечений кубической матрицы A.



Первая строка $U^{(1)}$ матрицы U является r-й строкой $S^{(r)}$ матрицы S, то есть

$$U^{(1)} = S^{(r)}. \tag{3.1}$$

Так как $A \in \Sigma^{[1]}_{n\times n\times n}(P)$, то $S = R$, откуда

$$S^{(r)} = R^{(r)}, \tag{3.2}$$

но r-я строка $R^{(r)}$ матрицы R совпадает с первой строкой $V^{(1)}$ матрицы V:

$$R^{(r)} = V^{(1)}. \tag{3.3}$$

Из (3.1) – (3.3) следует

$$U^{(1)} = V^{(1)}. \tag{3.4}$$

Первый столбец $U_{(1)}$ матрицы U является r-й строкой $T^{(r)}$ матрицы T:

$$U_{(1)} = T^{(r)}. \tag{3.5}$$

Снова, так как $A \in \Sigma^{[1]}_{n\times n\times n}(P)$, то T – симметрическая матрица, откуда

$$T^{(r)} = T_{(r)}. \tag{3.6}$$

Но r-й столбец $T_{(r)}$ матрицы T является первым столбцом $V_{(1)}$ матрицы V:

$$T_{(r)} = V_{(1)}. \tag{3.7}$$

Из (3.5) – (3.7) следует

$$U_{(1)} = V_{(1)}. \tag{3.8}$$

Так как $A \in {}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$, то ${}^{-1}\mathrm{A} \in \mathbf{\Sigma}_{(n-1)\times(n-1)\times(n-1)}(P)$. Тогда из (3.4) и (3.8) ввиду замечания перед доказываемой теоремой, следует

$$U = V. \tag{3.9}$$

Так как S – симметрическая матрица, то

$$S^{(r)} = S_{(r)}, \tag{3.10}$$

а так как $S = R$, то

$$S_{(r)} = R_{(r)}. \tag{3.11}$$

Кроме того,

$$R_{(r)} = W^{(1)}. \tag{3.12}$$

Из (3.1), (3.10) – (2.12) следует

$$U^{(1)} = W^{(1)}. \tag{3.13}$$

Так как $T = S$, то

$$T_{(r)} = S_{(r)}. \tag{3.14}$$

Кроме того,

$$S_{(r)} = W_{(1)}. \tag{3.15}$$

Из (3.5), (3.6), (3.14) и (3.15) следует

$$U_{(1)} = W_{(1)}. \tag{3.16}$$

Из (3.13) и (3.16), ввиду замечания перед доказываемой теоремой, следует

$$U = W. \tag{3.17}$$

Из (3.9) и (3.17), ввиду произвольного выбора $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, следует

$$A \in \mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P).$$

Таким образом, доказано включение

$$\mathbf{\Sigma}^{[1]}_{n\times n\times n}(P) \cap {}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P) \subseteq \mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P).$$

Пусть теперь $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$. Ясно, что

$$A \in {}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P).$$

Для наглядности снова обратимся к приведенному выше рисунку, считая, что на нём изображена указанная кубическая матрица.

Выберем произвольно $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Так как $A \in \mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$, то согласно предложению 2.1, $U = V$, откуда следует равенство первых столбцов этих матриц: $U_{(1)} = V_{(1)}$. Из рисунка видно, что

$$U_{(1)} = T^{(r)},\ V_{(1)} = T_{(r)},$$

откуда и из предыдущего равенства следует $T^{(r)} = T_{(r)}$. Следовательно, матрица T – симметрическая.

А так как $T = R = S$, то матрицы R и S – также являются симметрическими. Таким образом,

$$A \in \boldsymbol{\Sigma}^{[1]}_{n\times n\times n}(P)$$

и более того,

$$A \in \boldsymbol{\Sigma}^{[1]}_{n\times n\times n}(P) \cap {}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{n\times n\times n}(P).$$

Тем самым доказано включение

$$\boldsymbol{\Sigma}_{n\times n\times n}(P) \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^{[1]}_{n\times n\times n}(P) \cap {}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{n\times n\times n}(P),$$

а значит и требуемое равенство. Теорема доказана.

Согласно теореме 3.1, у любой кубической матрицы A из $\boldsymbol{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$ первые сечения ориентаций (i), (j) и (k) являются симметрическими. В действительности верно, как отмечалось в замечании 2.1, следующее более общее утверждение.

Предложение 3.1. *Если у кубической матрицы порядка n для любого $r = 1, 2, \ldots, n$ r-е сечения ориентаций (i), (j) и (k) совпадают, то у этой кубической матрицы все сечения любой ориентации являются симметрическими матрицами.*

Это легко показать, если в фрагменте доказательства теоремы 3.1, касающегося установления симметричности матрицы T, заменить эту матрицу любым q-м сечением (a_{ijq}) ориентации (k), где $q \in \{2, \ldots, n\}$, оставив всё остальное без изменений. В результате будет установлена симметричность этого сечения (a_{ijq}). А так как для матрицы $A = (a_{ijk}) \in \boldsymbol{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$ q-е сечения (a_{qjk}), (a_{iqk}) и (a_{ijq}) ориентаций (i), (j) и (k) совпадают, то симметрическими будут и сечения (a_{qjk}) и (a_{iqk}).

Сформулируем еще одно

Предложение 3.2. *Кубическая матрица, у которой все сечения любой ориентации являются симметрическими матрицами, сама является симметрической.*

Доказательство. Пусть $A = (a_{ijk})$ – кубическая матрица, у которой все сечения любой ориентаций являются симметрическими матрицами.

Для элемента a_{rst} имеем:

$$a_{rst} = a_{rts} \text{ (в } r\text{-м сечении ориентаций } (i)); \quad (3.18)$$

$$a_{rst} = a_{tsr} \text{ (в } s\text{-м сечении ориентаций } (j)); \quad (3.19)$$

$$a_{rst} = a_{srt} \text{ (в } t\text{-м сечении ориентаций } (k)). \quad (3.20)$$

Для элемента a_{rts} имеем

$$a_{rts} = a_{str} \text{ (в } t\text{-м сечении ориентаций } (j)). \quad (3.21)$$

Для элемента a_{tsr} имеем

$$A_{tsr} = a_{trs} \text{ (в } t\text{-м сечении ориентаций } (i)). \qquad (3.22)$$

Из (3.18) – (3.22) вытекает

$$a_{rst} = a_{rts} = a_{tsr} = a_{srt} = a_{str} = a_{trs}$$

для любых $r, s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Следовательно, $A = (a_{ijk})$ – симметрическая кубическая матрица. Предложение доказано.

Предложения 2.1, 3.1 и 3.2 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.2. *Для любой кубической матрицы A порядка $n \geq 2$ следующие утверждения равносильны*:

1) *у A r-е сечения ориентаций (i), (j) и (k) совпадают для любого $r = 1, 2, \ldots, n$*;

2) *у A все сечения любой ориентации являются симметрическими матрицами*;

3) *A – симметрическая*.

Замечание 3.1. Теорема 3.1 дает способ конструирования всех кубических матриц из $\Sigma_{n\times n\times n}(P)$ для любого n.

Вначале фиксируем множество $\Sigma_{2\times 2\times 2}(P)$, которое согласно лемме 2.1, совпадает с множеством всех кубических матриц второго порядка вида (1.1).

Затем для любой кубической матрицы из $\Sigma_{2\times 2\times 2}(P)$ и любой симметрической матрицы третьего порядка строится кубическая матрица третьего порядка, у которой первые сечения ориентаций (i), (j) и (k) совпадают с выбранной симметрической матрицей третьего порядка, а кубическая подматрица, получающаяся удалением этих первых сечений, совпадает с выбранной кубической матрицей из $\Sigma_{2\times 2\times 2}(P)$. Согласно теореме 3.1, множество всех таких кубических матриц совпадает с множеством $\Sigma_{3\times 3\times 3}(P)$.

Далее с помощью кубических матриц из $\Sigma_{3\times 3\times 3}(P)$ и симметрических матриц четвёртого порядка аналогично конструируется множество $\Sigma_{4\times 4\times 4}(P)$.

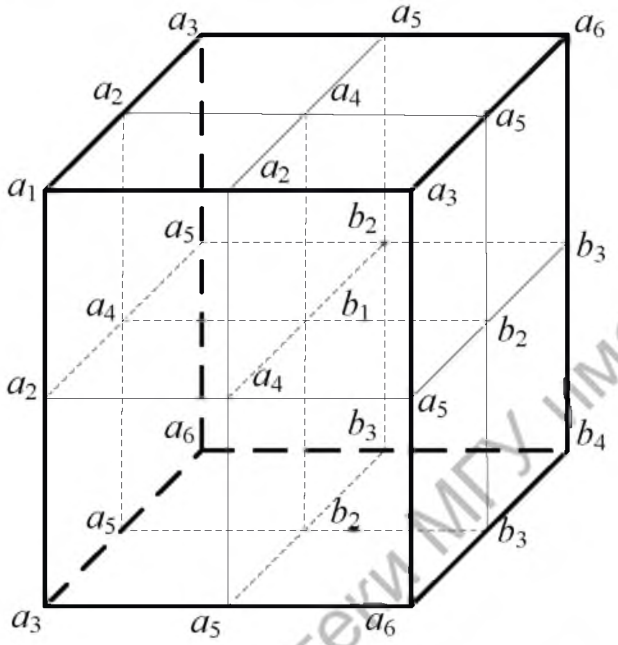
После того, как построено множество $\Sigma_{(n-1)\times(n-1)\times(n-1)}(P)$, с помощью кубических матриц из этого множества и симметрических матриц n-го порядка строится множество $\Sigma_{n\times n\times n}(P)$.

Возможны и другие способы “сборки” кубических матриц из множества $\Sigma_{n\times n\times n}(P)$.

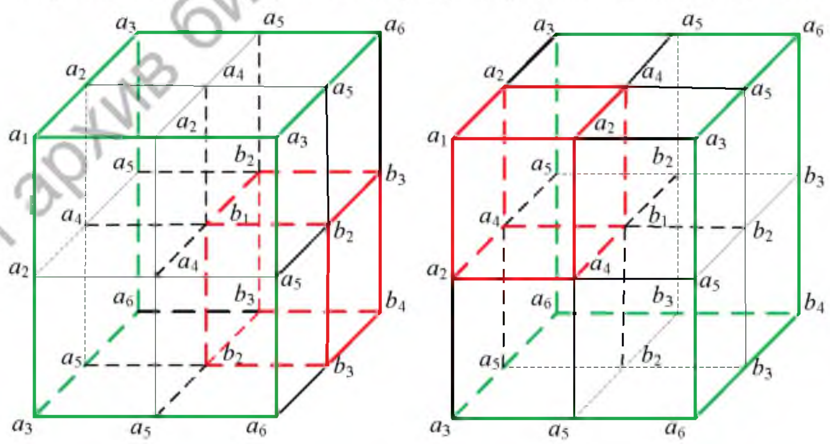
Замечание 3.2. “Сборку” кубических матриц из множества $\Sigma_{n\times n\times n}(P)$ можно начинать не с множества $\Sigma_{2\times 2\times 2}(P)$, а с множества $\Sigma_{1\times 1\times 1}(P) = P$. Схема при этом та же, что и описанная выше. Для любого элемента d из $\Sigma_{1\times 1\times 1}(P) = P$ и любой симметрической матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ второго порядка строится кубическая матрица второго порядка, у которой первые сечения ориентаций (i), (j) и (k) совпадают с выбранной симметрической матрицей второго порядка, а кубическая подматрица, получающаяся удалением этих первых сечений, совпадает с выбранным элементом d из $\Sigma_{1\times 1\times 1}(P) = P$. В результате получается кубическая матрица (1.1). Множество всех таких кубических матриц совпадает с множеством $\Sigma_{2\times 2\times 2}(P)$.

4. Примеры

Пример 4.1. На рисунке ниже показан общий вид кубической матрицы из $\Sigma_{3\times 3\times 3}(P)$.



На следующем рисунке указаны два способа "сборки" кубической матрицы, из которых первый соответствует теореме 3.1. Кубическая матрица второго порядка, с которой начинается "сборка" окрашена красным цветом; а пристраиваемые грани – матрицы третьего порядка окрашены зелёным цветом.

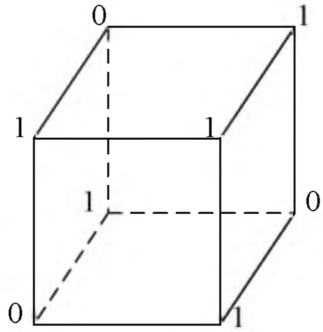


Следующий пример показывает, что множество всех кубических матриц A порядка n над P, обладающих свойством

$$\det{}^{(i)}A = \det{}^{(j)}A = \det{}^{(k)}A$$

шире множества $\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$.

Пример 4.2. Для кубической матрицы

$A =$ 

выпишем все ее сечения

$$(a_{1jk}) = (a_{i1k}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (a_{ij1}),$$

$$(a_{2jk}) = (a_{i2k}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (a_{ij2}).$$

Следовательно, $A \notin \mathbf{\Sigma}_{2\times 2\times 2}(P)$.

С другой стороны,

$$\det(a_{1jk}) = \det(a_{i1k}) = \det(a_{ij1}) = 1,$$

$$\det(a_{2jk}) = \det(a_{i2k}) = \det(a_{ij2}) = -1,$$

откуда следует

$$\det{}^{(i)}A = \det(a_{1jk})\det(a_{2jk}) = 1(-1) = -1,$$

$$\det{}^{(j)}A = \det(a_{i1k})\det(a_{i2k}) = 1(-1) = -1,$$

$$\det{}^{(k)}A = \det(a_{ij1})\det(a_{ij2})) = 1(-1) = -1.$$

Таким образом, кубическая матрица A обладает свойством

$$\det{}^{(i)}A = \det{}^{(j)}A = \det{}^{(k)}A,$$

но не принадлежит множеству $\mathbf{\Sigma}_{2\times 2\times 2}(P)$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Соколов, Н.П.*** Пространственные матрицы и их приложения / Н.П. Соколов. – М. : Наука, 1960. – 300 с.

2. ***Соколов, Н.П.*** Введение в теорию пространственных матриц / Н.П. Соколов. – Киев : Наукова думка, 1972. – 175 с.
3. ***Гальмак, А.М.*** О вектор-матрицах и пространственных матрицах / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 110). – С. 75–86.

Поступила в редакцию 26.11.2014 г.
Контакты: (+375 222) 46-40-19 (Гальмак)

Summary

The article deals with cubic matrices of order $n \geq 2$ over an arbitrary ring P whose r-th sections of orientations (i), (j), (k) for any $r = 1,2, \dots n$ are the same. A set of all such cubic matrices coincide with a set $\mathbf{\Sigma}_{n \times n \times n}(P)$ of all symmetric cubic matrices of order n over P. Criteria of symmetry of a cubic matrix are given. One of the possible ways for the formation of all cubic matrices $\mathbf{\Sigma}_{n \times n \times n}(P)$ is described. It is shown that a set of all cubic matrices of order n over P whose determinants of orientations (i), (j), (k) coincide are wider than a set $\mathbf{\Sigma}_{n \times n \times n}(P)$.