УДК 512.542

Р.В. БОРОДИЧ

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ АБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В ГРУППАХ С ОПЕРАТОРАМИ

В работе изучаются свойства пересечений не p-нильпотентных абнормальных максимальных подгрупп в группах с операторами. В связи с этим доказывается, что при p>2 в не p-разрешимой группе существует не p-нильпотентная абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа, а также приводится критерий p-разрешимости группы.

Все группы, рассматриваемые в статье, предполагаются конечными. В теории конечных групп важное место занимают объекты, экстремально расположенные в группе. К таким объектам в первую очередь относят максимальные подгруппы. Знание их строения, взаимодействия между собой и способа вложения в группу позволяют судить о многих свойствах самих групп. Основополагающим результатом этого направления явилась работа Г. Фраттини [1], получившая развитие во многих направлениях (см. монографии [2] и [3]). Одно из направлений теории пересечений связано с исследованием пересечений максимальных подгрупп, не принадлежащих заданному классу групп. Эта задача рассматривалась в работах М.В. Селькина [3], А.Н. Скибы [4], В.В. Шлыка [5], А. Гилотти и У. Тиберио [6] и многих других авторов. К данному направлению относится и настоящая работа.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (то есть пересечение всех подгрупп из G, сопряженных с подгруппой M).

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f : A \mapsto End(G)$, где $End(G)$ – гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть, $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Обозначим через $\Phi(G,A)$ пересечение ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп, а через $\Delta(G,A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп.

Для пересечения всех абнормальных максимальных подгрупп группы G будем использовать ставшее традиционным обозначение $\Delta(G)$ (подгруппа Гашюца).

Через $\Phi_{\Delta}^{p}(G,A)$ обозначим подгруппу, равную пересечению не p-нильпотентных абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп группы G, некоторые свойства которой в случае единичной группы операторов A рассматривались в работе [5].

В случае отсутствия в группе G указанных подгрупп будем полагать, что соответствующие пересечения совпадают с самой группой G.

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A, а также не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе (см. работу [7]).

Лемма 1. *Пусть группа G имеет группу операторов A и $N \lhd G$. Тогда* $\Phi_{\Delta}^{p}(G,A)N/N \subseteq \Phi_{\Delta}^{p}(G/N,A)$.

Доказательство. Если M/N – абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа из G/N, не принадлежащая формации p-нильпотентных групп, тогда M – абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа группы G, не принадлежащая формации p-нильпотентных групп. Следовательно, $\Phi_{\Delta}^{p}(G,A)N/N \subseteq \Phi_{\Delta}^{p}(G/N,A)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что* $(|G|,|A|)=1$. *Если* $\Delta(G,A) \subset \Phi_{\Delta}^{p}(G,A)$, *то выполняются следующие утверждения:*

1) $G=\Phi_{\Delta}^{p}(G,A)M$, *где* M *– p-нильпотентная абнормальная максимальная подгруппа группы G;*

2) если G разрешима, то $G = QM$, где Q – нормальная q-подгруппа группы G, q – простое число и M – p-нильпотентная абнормальная максимальная подгруппа группы G.

Доказательство. Так как $\Delta(G,A) \subset \Phi_{\Delta}^{p}(G,A)$, то найдется p-нильпотентная абнормальная максимальная подгруппа M, такая, что $\Phi_{\Delta}^{p}(G,A)M$. Следовательно, $G = M\Phi_{\Delta}^{p}(G,A)$.

Докажем второе утверждение. Пусть G – разрешимая группа. Рассмотрим $G/\Delta(G,A)$. Так как $\Phi_{\Delta}^{p}(G,A)/\Delta(G,A)$ разрешима, то в $\Phi_{\Delta}^{p}(G,A)/\Delta(G,A)$ найдется неединичная характеристическая q-подгруппа $Q/\Delta(G,A)$ для некоторого простого $q \in \pi(\Phi_{\Delta}^{p}(G,A)/\Delta(G,A))$. Если предположить, что $Q/\Delta(G,A)$ содержится во всех p-нильпотентных абнормальных максимальных подгруппах, то $Q/\Delta(G,A) \subseteq \Phi_{\Delta}(G,A)/\Delta(G,A)$. Получили противоречие. Значит, найдется p-нильпотентная абнормальная максимальная подгруппа $M/\Delta(G,A)$, такая, что $M/\Delta(G,A)\cdot Q/\Delta(G,A) = G/\Delta(G,A)$. Отсюда получаем, что $G = MQ$. Если предположить, что M не принадлежит формации p-нильпотентных групп, то $M \supseteq Q$ и $G = M$, значит M p-нильпотентна. Далее $Q = Q_1\Delta(G,A)$, где Q_1 – силовская q-подгруппа в Q.

По обобщенной лемме Фраттини

$$G = QN_G(Q_1) = Q_1\Delta(G, A)N_G(Q_1) = \Delta(G, A)N_G(Q_1).$$

Предположим, что $N_G(Q_1) \neq G$. Тогда $N_G(Q_1)$ содержится в некоторой абнормальной максимальной подгруппе K группы G и $G = \Delta(G, A)K = K$. Получили противоречие. Следовательно, Q_1 – нормальная q-подгруппа группы G. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$ и $G = O_p(\Phi^p_\Delta(G, A))M$, где M – p-нильпотентная максимальная подгруппа. Тогда*

1) $T = O_p(\Phi^p_\Delta(G, A)) \cap M$ – нормальная подгруппа группы G;

2) $\Phi^p_\Delta(G/T, A) = \Phi^p_\Delta(G, A)/T$;

3) если $B/O_{p'}(G) = \Phi^p_\Delta(G/O_{p'}(G), A)$, то $B \supseteq \Phi^p_\Delta(G, A)$.

Доказательство. 1) Очевидно, что $T \lhd M$ и $N_G(T) \supseteq M$. Так как M – максимальная подгруппа группы G, то $N_G(T) = M$ или $N_G(T) = G$. Учитывая, что $N_{O_p(\Phi^p_\Delta(G,A))}(T) \supset T$, получаем $N_G(T) = G$.

2) Согласно лемме 1 $\Phi^p_\Delta(G, A)/T \subseteq \Phi^p_\Delta(G/T, A)$. Докажем обратное включение. Покажем, что если L – абнормальная не p-нильпотентная максимальная подгруппа группы G, то L / T – также абнормальная не p-нильпотентная максимальная подгруппа.

Абнормальность очевидна. Предположим, что L / T является p-нильпотентной подгруппой. Тогда существует p'-холлова подгруппа R в L, такая, что $RT/T \lhd L/T$. Если H – p'-холлова подгруппа из M, то можно считать, что $R \subseteq H$. Так как $H \lhd M$, то H централизует T и R централизует T. Учитывая, что R – характеристическая подгруппа в RT, $RT \lhd L$, следовательно, $R \lhd L$ и L p-нильпотентна. Противоречие.

3) Пусть $x \in \Phi^p_\Delta(G, A)$, то x содержится в каждой абнормальной не p-нильпотентной максимальной подгруппе. Допустим x содержится в каждой абнормальной максимальной подгруппе K, такой, что $K \supseteq O_{p'}(G)$ и $K/O_{p'}(G)$ не p-нильпотентна. Отсюда следует, что

$$xO_{p'}(G) \in \Phi^p_\Delta(G/O_{p'}(G), A) = B/O_{p'}(G) \text{ и } x \in B.$$

Лемма 4. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$, $O_{p'}(G)=1$, $O_p(M)=1$, $G = O_p(\Phi^p_\Delta(G, A))M$, где*

$O_p(\Phi^p_\Delta(G,A)) \cap M = 1$ и M – p-нильпотентная абнормальная максимальная подгруппа. Тогда $\Phi^p_\Delta(G,A)$ имеет нормальную силовскую p-подгруппу или G является бипримарной группой.

Доказательство. Пусть P – силовская p-подгруппа подгруппы $\Phi^p_\Delta(G,A)$. По лемме X.I.5, из [8] $O_{p'}(N_G(P)) \subseteq O_{p'}(G) = 1$. По лемме Фраттини, $G = \Phi^p_\Delta(G,A)N_G(P)$. Учитывая, что $O_p(\Phi^p_\Delta(G,A)) \subseteq \Phi^p_\Delta(G,A)$ и $G/O_p(\Phi^p_\Delta(G,A))$ p-нильпотентна, имеем, что $N_G(P) = G$ или $N_G(P)$ – p-нильпотентная подгруппа. Пусть $N_G(P)$ – p-нильпотентная подгруппа. Так как $O_{p'}(N_G(P)) = 1$, то $N_G(P)$ – p-подгруппа группы G. Пусть S – силовская p-подгруппа группы G, такая, что $P = \Phi^p_\Delta(G,A) \cap S \lhd S$. Тогда $N_G(P) = S$ и $G = \Phi^p_\Delta(G,A)S$. Отсюда следует, что p'-холлова подгруппа H из M является p'-холловой подгруппой группы G, и подгруппы $\Phi^p_\Delta(G,A)$, а значит, $\Phi^p_\Delta(G,A) = HP$. Докажем, что S – максимальная подгруппа группы G. Допустим, что $R \supset S$, где R – максимальная подгруппа группы G. Если предположить, что R не p-нильпотентна, то из $R \supseteq \Phi^p_\Delta(G,A)S = G$ получаем противоречие. Итак, R является p-нильпотентной подгруппой, $R = R_{p'}S$, где $R_{p'}$ – нормальная холловская p'-подгруппа из R. Получаем, что $R_{p'} \subseteq \Phi^p_\Delta(G,A)$ и $O_p(\Phi^p_\Delta(G,A))$ централизует $R_{p'}$. Так как G является p-скованной группой, то $C_G(O_p(\Phi^p_\Delta(G,A))) \subseteq O_p(\Phi^p_\Delta(G,A))$ и $R_{p'} = 1$. Отсюда $R = S$. По лемме 9.9 из [9] получаем, что G является бипримарной группой.

Напомним, что группа G называется π-замкнутой, если она содержит инвариантную π-холловскую подгруппу.

Лемма 5. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|) = 1$, $K \subseteq N \lhd G$, $K \lhd G$, N и K – A-допустимые подгруппы группы G и $K \subseteq \Delta(G,A)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если N/K π-замкнута, то и N π-замкнута;

2) $F_p(N/K) = F_p(N)/K$.

Доказательство. Пусть N/K имеет нормальную S_π-подгруппу H/K. Так как $K \subseteq \Delta(G,A)$, то K нильпотентна. Нетрудно заметить, что

$S_{\pi'}$-подгруппа R из K является $S_{\pi'}$-подгруппой в H. По теореме Шура-Цассенхауза H содержит S_{π}-подгруппу S и любые две такие подгруппы сопряжены в H. По лемме Фраттини $G = N_G(S)H$. С учетом того, что $H = SR$, получаем $G = N_G(S)R$. Так как S есть S_{π}-подгруппа в N, а подгруппа N A-допустима, то S A-допустима. Тогда подгруппа $N_G(S)$ A-допустима и является абнормальной подгруппой группы G. Следовательно, $N_G(S)$ содержится в некоторой абнормальной максимальной A-допустимой подгруппе M из G. Поэтому $G = MR$. Так как $R \subseteq \Delta(G, A) \subseteq M$, то $G = M$. Получили противоречие. Следовательно, S нормальна в G.

Второе утверждение леммы является следствием первого при $\pi = p'$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация и группа* G *имеет группу операторов* A*, такую, что* $(|G|,|A|) = 1$. *Если* N *– нормальная* A*-допустимая подгруппа группы* G *и* $N/N \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$. *Тогда* N *представима в виде прямого произведения* $N = N_1 \times N_2$, *множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $N_2 \subseteq \Delta(G, A)$.

Доказательство. Пусть $D = N \cap \Delta(G, A)$, $\omega = \pi(\mathfrak{F})$. Так как N/D является ω-группой, то по лемме 5 подгруппа N представима в виде $N = N_1 \times N_2$, где N_1 – S_{ω}-подгруппа из N. Так как $N_2 \subseteq \Delta(G, A)$, то $N/D \simeq N_1/D_1 \in \mathfrak{F}$, где $D_1 = N_1 \cap \Delta(G, A)$. Пусть $p \in \omega$. Так как $N_1/D_1 \in \mathfrak{F}$, то, используя лемму 5 и лемму 4.5 из [2], получаем, что

$$(N_1/D_1)/F_p(N_1/D_1) = N_1/D_1/F_p(N_1)/D_1 N_1/F_p(N_1) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(N_1)$, то по лемме 4.5 из [2] подгруппа N_1 входит в $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация, содержащая* N, *и группа* G *имеет группу операторов* A*, такую, что* $(|G|,|A|) = 1$. *Если* N *–*

нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G,A) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.

В случае, когда $\mathfrak{F}$ – формация нильпотентных групп, получаем следующее

Следствие 2.2. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|) = 1$. Если N – нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G,A)$ нильпотентна, то и подгруппа N нильпотентна.*

Теорема 2. *Пусть группа G не p-разрешима, $p > 2$ и имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|) = 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) G имеет, по крайней мере, одну абнормальную не p-нильпотентную максимальную A-допустимую подгруппу;

2) $\Phi_{\Delta}^{p}(G,A) = \Delta(G,A)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех p-нильпотентных групп. Так как G не p-разрешима, то $K = G^{\mathfrak{F}} \notin \mathfrak{F}$. Можно считать, что $O_p(G) = 1$. Пусть P – силовская p-подгруппа из K. По теореме Томпсона в P найдется такая характеристическая, а, следовательно, A-допустимая подгруппа $R \neq 1$, что $N_K(R) \notin \mathfrak{F}$. Так как R – A-допустимая подгруппа, то по лемме 1 $N_G(R)$ – A-допустимая подгруппа. Далее $N_K(R) \subseteq N_G(R)$, значит, $N_G(R) \notin \mathfrak{F}$. В силу того, что $O_p(G) = 1$, получаем $N_G(P) \neq G$. По лемме 17.1 из [2] $N_G(P)$ – абнормальная подгруппа. Из того, что $N_G(P) \subseteq N_G(R)$, имеем, что $N_G(R)$ – абнормальная подгруппа. Так как любая подгруппа, содержащая $N_G(R)$, является абнормальной и не p-нильпотентной, то в качестве абнормальной не p-нильпотентной максимальной A-допустимой подгруппы выберем наибольшую A-допустимую подгруппу, содержащую $N_G(R)$.

Докажем второе утверждение. Пусть G не p-разрешима. Если в G нет p-нильпотентных максимальных A-допустимых подгрупп, то $\Phi_{\Delta}^{p}(G,A) = \Delta(G,A)$. Так как G не p-разрешима, то G имеет по крайней мере одну абнормальную не p-нильпотентную максимальную A-допустимую подгруппу, следовательно, $\Phi_{\Delta}^{p}(G,A) \neq G$.

В G существует p-нильпотентная абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа M, такая, что $\Phi_{\Delta}^{p}(G,A) \not\subset M$. В противном случае, если любая p-нильпотентная абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа из G, содержит $\Phi_\Delta^p(G,A)$, то $\Delta(G,A)=\Phi_\Delta^p(G,A)$. Отсюда следует, что $G=M\Phi_\Delta^p(G,A)$. Имеем, что

$$G/\Phi_\Delta^p(G,A)\simeq M/M\cap\Phi_\Delta^p(G,A) \quad (1)$$

является p-нильпотентной, в частности, p-разрешимой.

Пусть P – A-допустимая силовская p-подгруппа из $\Phi_\Delta^p(G,A)$. По лемме Фраттини, $G=\Phi_\Delta^p(G,A)N_G(P)$. Тогда $N_G(P)=G$ или $N_G(P)$ p-нильпотентна.

Если $N_G(P)=G$, то $P\lhd G$, следовательно, $P\lhd\Delta(G,A)$, а, значит, $\Delta(G,A)$ p-разрешима. Тогда из (1) G p-разрешима. Противоречие. Получаем, что $N_G(P)$ является A-допустимой p-нильпотентной подгруппой. Если $\Phi_\Delta^p(G,A)$ p-нильпотентна, то G по (1) является p-разрешимой. Получаем противоречие, которое показывает, что $\Phi_\Delta^p(G,A)$ не p-нильпотентна.

На основании работы [10] в $\Phi_\Delta^p(G,A)$ существует характеристическая подгруппа P^* из P такая, что $N_{\Phi_\Delta^p(G,A)}(P^*)/C_{\Phi_\Delta^p(G,A)}(P^*)$ – не p-группа. Так как $N_G(P^*)\supseteq N_G(P)$, то $G=\Phi_\Delta^p(G,A)N_G(P^*)$.

Возможны ситуации: $N_G(P^*)=G$ или $N_G(P^*)$ p-нильпотентна. Но во втором случае $N_{\Phi_\Delta^p(G,A)}(P^*)$ p-нильпотентна и $N_{\Phi_\Delta^p(G,A)}(P^*)/C_{\Phi_\Delta^p(G,A)}(P^*)$ – p-группа, противоречие. Остается предположить, что $N_{\Phi_\Delta^p(G,A)}(P^*)/$ $/C_{\Phi_\Delta^p(G,A)}(P^*)$ – не p-группа и P^* нормальна в G.

Пусть P^* максимальная среди всех таких подгрупп. Положим $\overline{G}=G/P^*$. Пусть $\overline{P_0}$ – характеристическая подгруппа в $\overline{P}$. Тогда P_0 характеристична в P и содержит P^*. Следовательно, $N_{\overline{\Phi}_\Delta^p(G,A)}(P_0)/C_{\overline{\Phi}_\Delta^p(G,A)}(P_0)$ – p-группа.

Но $N_{\overline{\Phi}_\Delta^p(G,A)}(\overline{P_0})=N_{\Phi_\Delta^p(G,A)}(P_0)/P^*$ и $C_{\Phi_\Delta^p(G,A)}(P_0)P^*/P^*\subseteq C_{\overline{\Phi}_\Delta^p(G,A)}(\overline{P_0})$, где $\overline{P_0}=P_0/P^*$. Из этого получаем, что $N_{\overline{\Phi}_\Delta^p(G,A)}(\overline{P_0})/C_{\overline{\Phi}_\Delta^p(G,A)}(\overline{P_0})$ – p-группа. Следовательно, на основании работы [10] $\overline{\Phi}_\Delta^p(G,A)$ p-нильпотентна.

Так как $\overline{\Phi}_{\Delta}^{p}(G,A)=\Phi_{\Delta}^{p}(G,A)/P^{*}$ и P^{*} – p-группа, то $\Phi_{\Delta}^{p}(G,A)$ p-разрешима и, следовательно, G p-разрешима. Последнее противоречие показывает, что $\Phi_{\Delta}^{p}(G,A)=\Delta(G,A)$. Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$ и $p>2$. Тогда либо $\Phi_{\Delta}^{p}(G,A)=\Delta(G,A)$, либо G является p-разрешимой группой.*

Если положить $A=1$, то из теоремы 2 вытекает результат В.В. Шлыка из [5].

Теорема 3. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$ и $\Phi_{\Delta}^{p}(G,A)$ не является p-нильпотентной группой для некоторого нечетного $p\in\pi(G)$. Тогда $G=O_p(\Phi_{\Delta}^{p}(G,A))M$, где M – абнормальная p-нильпотентная максимальная A-допустимая подгруппа.*

Доказательство. Ввиду теоремы 2 заключаем, что G является p-разрешимой группой. Пусть $D=\Phi_{\Delta}^{p}(G,A)$. Так как D не p-нильпотентна, то на основании работы [10] существует характеристическая подгруппа P^{*} в силовской p-подгруппе P группы D, такая, что $N_D(P)/C_D(P)$ не является p-группой. Можно считать, что P^{*} – максимальная подгруппа с указанными выше свойствами.

Учитывая, что $N_G(P^{*})$ – абнормальная подгруппа в G, то $N_G(P^{*})=G$. Отсюда следует, что $P^{*}\subseteq O_p(D)$. Предположим, что $P^{*}\subset O_p(D)$. Тогда $N_D(O_p(D))/C_D(O_p(D))$ – p-группа, а, значит, $D/C_D(O_p(D))$ – p-группа. Из $C_D(O_p(D))\subseteq O_p(D)$ получаем, что $D/O_p(G)$ – p-группа, значит, D – p-группа. Получили противоречие. Следовательно, $P^{*}=O_p(D)$.

Если $D/O_p(D)$ p-нильпотентна, то в $D/O_p(D)$ имеется нормальная холловская p'-подгруппа $K/O_p(D)$. Тогда K нормальна в G и $O_p(D)$ нормальна в K. По теореме Шура-Цассенхауза, существует холловская p'-подгруппа L из K, такая, что $K=O_p(D)L$. По лемме Фраттини, $G=KN_G(L)$.

Если $O_p(D)\subseteq\Phi_{\Delta}^{p}(G,A)$, то $G=KN_G(L)=O_p(D)LN_G(L)=N_G(L)$. Следовательно, L нормальна в G. Но L – холловская p'-подгруппа из D, значит, D p-нильпотентна, противоречие. Следовательно,

$O_p(D) \not\subset \Phi_\Delta^p(G, A)$ и получаем, что $G = O_p(D)M$, где M абнормальная p-нильпотентная максимальная подгруппа группы G. Теорема доказана.

В случае единичности группы операторов из теоремы 2 получаем

Следствие 3.1. *Пусть подгруппа $\Phi_\Delta^p(G)$ не является p-нильпотентной группой для некоторого нечетного $p \in \pi(G)$. Тогда $G = O_p(\Phi_\Delta^p(G))M$, где M – абнормальная p-нильпотентная максимальная подгруппа.*

Напомним [11], что если G – p-разрешимая группа, то арифметическим p-рангом $\bar{r}_p(G)$ называют наибольший из всех порядков p-главных факторов группы G. Класс p-разрешимых групп со свойством $(|G|, \bar{r}_p(G)) = 1$ является насыщенной формацией.

Теорема 4. *Пусть G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если G – p-разрешимая группа, такая, что $(|G|, \bar{r}_p(G)) = 1$, тогда подгруппа $\Phi_\Delta^p(G)$ либо является p-нильпотентной, либо имеет нормальную силовскую p-подгруппу.*

Доказательство. Предположим, что G – группа минимального порядка, для которой подгруппа $\Phi_\Delta^p(G)$ не является p-нильпотентной. По теореме 3 $G = O_p(\Phi_\Delta^p(G))M$, где M – абнормальная p-нильпотентная максимальная подгруппа.

По лемме 3 если $T = O_p(\Phi_\Delta^p(G)) \cap M$, то $\Phi_\Delta^p(G/T) = \Phi_\Delta^p(G)/T$. Если $\Phi_\Delta^p(G)/T$ является p-нильпотентной подгруппой группы G/T, то, используя доказательство леммы 3, получаем, что $\Phi_\Delta^p(G)$ – p-нильпотентная подгруппа группы G. Противоречие. Следовательно, $\Phi_\Delta^p(G)/T$ не p-нильпотентна. Учитывая, что $\Phi_\Delta^p(G/T) = \Phi_\Delta^p(G)/T$ и $(|G|, \bar{r}_p(G))$, предположим, что $|G/T| < |G|$. Следовательно, $\Phi_\Delta^p(G/T)$ имеет силловскую p-подгруппу P/T, нормальную в G/T. Отсюда $P \lhd G$. Не ограничивая общности, можно считать, что $T = 1$. Так как $T = O_p(\Phi_\Delta^p(G)) \cap M = 1$ и M – максимальная подгруппа группы G, то $O_p(\Phi_\Delta^p(G))$ – минимальная нормальная подгруппа группы G, являющаяся элементарной абелевой подгруппой.

Докажем, что $O_{p'}(G) = 1$. Предположим, что $O_{p'}(G) \neq 1$. Если $\Phi_\Delta^p(G/O_{p'}(G)) = B/O_{p'}(G)$ p-нильпотентна, то B p-нильпотентна и по лемме 3 $\Phi_{\Delta}^{p}(G)$ также p-нильпотентна, что противоречит предположению. Значит, $B/O_{p'}(G)$ не является p-нильпотентной и из минимальности группы G силловская p-подгруппа из $B/O_{p'}(G)$ является нормальной. В частности, $\Phi_{\Delta}^{p}(G)O_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ имеет силловскую p-подгруппу $PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$, нормальную в $G/O_{p'}(G)$. Отсюда $PO_{p'}(G) \lhd G$. По лемме Фраттини, $G = O_{p'}(G)N_G(P)$. Если $N_G(P) = G$, то получаем противоречие с выбором группы G. Значит, $N_G(P) \neq G$. Но так как $G = \Phi_{\Delta}^{p}(G)N_G(P)$, то получаем, что $N_G(P)$ p-нильпотентна, а, значит, $G/O_{p'}(G)$ также p-нильпотентна. Значит, что G является p-нильпотентной. Противоречие. Остается заключить, что $O_{p'}(G) = 1$.

Так как $G = O_p(\Phi_{\Delta}^{p}(G))M$, то $O_p(\Phi_{\Delta}^{p}(G)) \subseteq O_p(G)$ и $O_p(G) = O_p(\Phi_{\Delta}^{p}(G))(O_p(G) \cap M)$.

Пусть $D = O_p(G) \cap M$. Если $N_G(D) = M$, то M нормализует p-группу и по лемме X.I.6. из [8] получаем, что $O_{p'}(M) \subseteq O_{p'}(G)$. Получили противоречие, так как M является p-нильпотентной подгруппой и $O_{p'}(G) = 1$. Следовательно, $N_G(D) = G$, а значит $D \lhd G$.

Рассмотрим группу G/D. По аналогии с рассмотренным выше приемом несложно показать, что $\Phi_{\Delta}^{p}(G/D)$ не может быть p-нильпотентной и в силу минимальности группы G, если $D \neq 1$, получаем, что $\Phi_{\Delta}^{p}(G/D)$ имеет нормальную силловскую p-подгруппу. Если $C/G = \Phi_{\Delta}^{p}(G/D)$, то $\Phi_{\Delta}^{p}(G)D/D \subseteq C/D$ и C/D имеет нормальную силловскую p-подгруппу. Отсюда следует, что $D = 1$. Так как $O_p(\Phi_{\Delta}^{p}(G)) = O_p(G)$ и по условию $(|G|, \bar{r}_p(G)) = 1$, то учитывая, что если $O_p(G) = p^s$, получаем, что $(|G|, s) = 1$. Также $(|M|, s) = 1$. На основании леммы I.IV 8.1 из [12] заключаем, что M является циклической подгруппой группы G. Противоречие.

Следствие 4.1. *Пусть G – p-сверхразрешимая группа, имеющая группу операторов A, такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда подгруппа $\Phi_{\Delta}^{p}(G, A)$*

либо является p-нильпотентной, либо имеет нормальную силловскую p-подгруппу.

В случае единичности группы операторов из теоремы 4 получаем результат работы [11].

Условие теоремы $(|G|, \bar{r}_p(G)) = 1$ является существенным. Существуют примеры, показывающие, что в p-разрешимой группе подгруппа $\Phi^p_\Delta(G)$ может быть не p-нильпотентной и не иметь нормальной силловской p-подгруппы см. [11].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Frattini, G.*** Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni // G. Frattini / Atti Acad. Dei Lincei 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.
2. ***Шеметков, Л.А.*** Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.
3. ***Селькин, М.В.*** Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 144 с.
4. ***Скиба, А.Н.*** О пересечении всех максимальных F-подгрупп конечной группы / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3(4). – С. 55–62.
5. ***Шлык, В.В.*** О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах / В.В. Шлык// Матем. заметки. – 1973, 14. – № 3. – С. 429–439.
6. ***Gilotti, A.*** On the intersection of maximal non-supersoluble subgroups in a finite group / A. Gilotti, U. Tiberio // Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. – 2000. – Serie 8. – Vol. 3-B. – P. 691–698.
7. ***Бородич, Р.В.*** О максимальных подгруппах близких к F-абнормальным / Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич, М.В. Селькин // Известия ГГУ. – 2012. – № 5. – С. 140–147.
8. ***Huppert, B.*** Finite Groups II / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin and New York : Springer-Verlag, 1982. – 531 p.
9. ***Huppert, B.*** Finite Groups III // B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin and New York : Springer-Verlag, 1982. – 454 p.
10. ***Thompson, J.G.*** Normal p-complements for finite groups / J.G. Thompson, // J. Algebra. – 1964. – P. 43–46.
11. ***Gilotti, A.*** On the intersection of a certain class of maximal subgroups of a finite group / A. Gilotti, U. Tiberio // Arch. Math. – 1998. – V. 71. – P. 89–94.
12. ***Huppert, B.*** Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin and New York : Springer-Verlag, 1967. 793 p.

Поступила в редакцию 20.11.2013 г.