МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 512.548

А.М. ГАЛЬМАК

ОБ ОПЕРАЦИИ $[\ ]_{l,T,J}$

Для любого целого $l \geq 2$, любого непустого множества J и любой полугруппы A на декартовом произведении $T \times A^J$, где T – подмножество симметрической группы $\mathbf{S}_J$ всех биекций множества J на себя, A^J – множество всех функций с областью определения J и со значениями в полугруппе A, определяется и изучается l-арная операция $[\ ]_{l,T,J}$. Частными случаями этой l-арной операции являются изучавшиеся ранее автором l-арные операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, $[\ ]_{l,\sigma,J}$ и $[\ ]_{l,T,k}$, а также две полиадические операции Э. Поста, которые он определил на упорядоченных наборах подстановок и упорядоченных наборах матриц соответственно.

1. Введение

Полиадические операции на декартовых степенях множеств впервые появились у Э. Поста [1]. Конструкция, которую он использовал при построении своих m-арных операций, допускает различные обобщения. Некоторые из них реализованы в серии работ автора, результаты из которых с соответствующими ссылками включены в книгу [2]. Здесь же отметим только статью [3], в которой для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ на k-й декартовой степени A^k полугруппы A определена l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, частными случаями которой являются упомянутые выше операции Э. Поста. Подробному изучению свойств операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ и некоторых ее обобщений посвящена книга [2].

Так как любой элемент $(a_1, \dots, a_k)$ конечной декартовой степени A^k произвольного множества A можно отождествить с некоторой функцией $f: j \to a_j$ с областью определения $J = \{1, \dots, k\}$ и со значениями во множестве A, то можно считать, что l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ определена на множестве функций A^J. В связи со сказанным возникает задача обобщения операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ на случай произвольной области определения J. Для решения этой задачи в [4] для любого целого $l \geq 2$, произвольного множества J и любой биекции σ этого множества на себя на декартовой степени A^J произвольного группоида A была определена l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,J}$, которая, как несложно заметить, совпадает с операцией $[\ ]_{l,\sigma,k}$, если $J = \{1, \dots, k\}$, A – полугруппа. Свойства операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$ изучались в [5 – 7], а так же в книге [8].

Еще одним обобщением операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является l-арная операция $[\ ]_{l,T,k}$ из [9], которая определяется для любых целых $l \geq 2$, $k \geq 2$ на подмножестве $T \times A^k$ декартова произведения

$$\mathbf{S}_k \times A^k = \{(\sigma, \mathbf{a}) = (\sigma, (a_1, \ldots, a_k)) \mid \sigma \in \mathbf{S}_k, a_1, \ldots, a_k \in A\},$$

где $\mathbf{S}_k$ – симметрическая группа всех подстановок множества $\{1, ..., k\}$, A – произвольная полугруппа. Если $T = \{\sigma\}$, $\sigma^l = \sigma$, то операцию $[\ ]_{l, \{\sigma\}, k}$ можно отождествить с l-арной операцией $[\ ]_{l, \sigma, k}$. Указанное отождествление позволяет рассматривать операцию $[\ ]_{l, T, k}$ как обобщение операции $[\ ]_{l, \sigma, k}$.

Отмеченные выше переходы от операции $[\ ]_{l, \sigma, k}$ к операциям $[\ ]_{l, \sigma, J}$ и $[\ ]_{l, T, k}$ наводят на мысль о возможности определения еще одной l-арной операции $[\ ]_{l, T, J}$, которая при $J = \{1, ..., k\}$ должна совпадать с операцией $[\ ]_{l, T, k}$, а при $T = \{\sigma\}$ должна отождествляться с операцией $[\ ]_{l, \sigma, J}$. Основная цель данной статьи – определение операции $[\ ]_{l, T, J}$ и изучение ее свойств.

Мы предполагаем известными определения l-арной полугруппы, l-арной группы, косого элемента l-арной группы, абелевой и полуабелевой l-арных операций. В случае необходимости можно обратиться к [10 – 12] или к главе 1 книги [2].

Будем использовать стандартные обозначения: $\mathbf{S}_J$ – множество всех биекций (подстановок) произвольного множества J на себя; $\mathbf{SF}_J$ – финитарная симметрическая группа всех подстановок из $\mathbf{S}_J$, имеющих конечный носитель; $\mathbf{A}_J$ – множество всех четных подстановок из $\mathbf{SF}_J$; $\mathbf{B}_J$ – множество всех нечетных подстановок из $\mathbf{SF}_J$; A^J – множество всех отображений множества J во множество A. Сведения о подстановках произвольных множеств можно почерпнуть из [13, 14].

2. Операция $[\ ]_{l, \mathbf{S}_J, J}$

Пусть A – группоид, J – произвольное непустое множество, σ – подстановка из $\mathbf{S}_J$. Определим на A^J бинарную операцию $x \overset{\sigma}{\circ} y$, полагая

$$(x \overset{\sigma}{\circ} y)(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(\sigma(j)),\ j \in J.$$

Определение 2.1. Для любого $l \geq 2$, любого непустого множества J и любого группоида A определим на множестве

$$\mathbf{S}_J \times A^J = \{(\sigma, \mathbf{a}) \mid \sigma \in \mathbf{S}_J, \mathbf{a} \in A^J\}$$

l-арную операцию $[\ ]_{l, \mathbf{S}_J, J}$ следующим образом:

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \ldots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l, \mathbf{S}_J, J} = (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{y}), \tag{2.1}$$

где

$$\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_l, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma_1}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma_2}{\circ} (\ \ldots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma_{l-2}}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma_{l-1}}{\circ} \mathbf{x}_l)) \ldots)). \tag{2.3}$$

Отметим, что умножение подстановок в правой части (2.2) осуществляется по правилу $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_l(j) = \sigma_l(\ldots\sigma_2(\sigma_1(j))\ldots)$.

При $l = 2$ определение 2.1 определяет на $\mathbf{S}_J \times A^J$ бинарную операцию

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2)]_{2, \mathbf{S}_J, J} = (\sigma_1\sigma_2, \mathbf{x}_1 \overset{\sigma_1}{\circ} \mathbf{x}_2).$$

Заметим, что в определении операции $[\,]_{l, \mathbf{S}_J, J}$ подстановки $\sigma_1, ..., \sigma_l$ не обязательно все различные. Кроме того, в определении операции $[\,]_{l, \mathbf{S}_J, J}$ можно считать $l = 1$. В этом случае имеем один набор $(\sigma_1, \mathbf{x}_1)$, а также

$$\sigma = \sigma_1, \mathbf{y}(j) = \mathbf{x}_1(j), (\sigma, \mathbf{y}) = (\sigma_1, \mathbf{x}_1).$$

Таким образом, $[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)]_{1, \mathbf{S}_J, J} = (\sigma_1, \mathbf{x}_1)$.

Теорема 2.1. *Значение функции* $\mathbf{y}$, *определяемой равенством* (2.3), *принимает в каждой точке* $j \in J$ *значение*

$$\mathbf{y}(j) = \mathbf{x}_1(j)(\mathbf{x}_2(\sigma_1(j))(... (\mathbf{x}_{l-1}(\sigma_1 ... \sigma_{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma_1 ... \sigma_{l-1}(j))) ...)).$$

Доказательство. Для $(\sigma_i, \mathbf{x}_i) \in \mathbf{S}_J \times A^J$, $i = 1, ..., l$ положим

$$\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma_{l-1}}{\circ} \mathbf{x}_l = \mathbf{y}_{l-1}, \mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma_{l-2}}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma_{l-1}}{\circ} \mathbf{x}_l) = \mathbf{y}_{l-2}, ...$$

$$..., \mathbf{x}_2 \overset{\sigma_2}{\circ} (... (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma_{l-2}}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma_{l-1}}{\circ} \mathbf{x}_l)) ...) = \mathbf{y}_2.$$

Используя определение операции $\overset{\sigma}{\circ}$ и (2.3), получим

$$\mathbf{y}_{l-1}(j) = (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma_{l-1}}{\circ} \mathbf{x}_l)(j) = \mathbf{x}_{l-1}(j)\mathbf{x}_l(\sigma_{l-1}(j)),$$

$$\mathbf{y}_{l-2}(j) = (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma_{l-2}}{\circ} \mathbf{y}_{l-1})(j) = \mathbf{x}_{l-2}(j)\mathbf{y}_{l-1}(\sigma_{l-2}(j)) =$$

$$= \mathbf{x}_{l-2}(j)(\mathbf{x}_{l-1}(\sigma_{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma_{l-1}(\sigma_{l-2}(j)))) = \mathbf{x}_{l-2}(j)(\mathbf{x}_{l-1}(\sigma_{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma_{l-2}\sigma_{l-1}(j))),$$

....

$$\mathbf{y}_2(j) = (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma_2}{\circ} \mathbf{y}_3)(j) = \mathbf{x}_2(j)\mathbf{y}_3(\sigma_2(j)) =$$

$$= \mathbf{x}_2(j)(\mathbf{x}_3(\sigma_2(j)) ... (\mathbf{x}_{l-1}(\sigma_3 ... \sigma_{l-2}(\sigma_2(j)))\mathbf{x}_l(\sigma_3 ... \sigma_{l-1}(\sigma_2(j)))) ...) =$$

$$= \mathbf{x}_2(j)(\mathbf{x}_3(\sigma_2(j)) ... (\mathbf{x}_{l-1}(\sigma_2 ... \sigma_{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma_2 ... \sigma_{l-1}(j))) ...),$$

$$\mathbf{y}(j) = (\mathbf{x}_1 \overset{\sigma_1}{\circ} \mathbf{y}_2)(j) = \mathbf{x}_1(j)\mathbf{y}_2(\sigma_1(j)) =$$

$$= \mathbf{x}_1(j)(\mathbf{x}_2(\sigma_1(j))(\mathbf{x}_3(\sigma_2(\sigma_1(j))) ... (\mathbf{x}_{l-1}(\sigma_2 ... \sigma_{l-2}(\sigma_1(j)))\mathbf{x}_l(\sigma_2 ... \sigma_{l-1}(\sigma_1(j)))) ...)) =$$

$$= \mathbf{x}_1(j)(\mathbf{x}_2(\sigma_1(j))(\mathbf{x}_3(\sigma_1\sigma_2(j)) ... (\mathbf{x}_{l-1}(\sigma_1 ... \sigma_{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma_1 ... \sigma_{l-1}(j))) ...)).$$

Следовательно, верно доказываемое равенство. Теорема доказана.

Теорема 2.1 позволяет доказать следующее

Предложение 2.1. *Если A – полугруппа, то для любого $m \geq 2$, всех i и l таких, что $1 \leq i+1 \leq i+l \leq m$ и любых*

$$\mathbf{u}_1 = (\sigma_1, \mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{u}_m = (\sigma_m, \mathbf{x}_m) \in \mathbf{S}_J \times A^J$$

верно равенство

$$[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_m]_{m, \mathbf{S}_J, J} = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_i [\mathbf{u}_{i+1} \dots \mathbf{u}_{i+l}]_{l, \mathbf{S}_J, J} \mathbf{u}_{i+l+1} \dots \mathbf{u}_m]_{m-l+1, \mathbf{S}_J, J}.$$

Полагая в предложении 2.1 $J = \{1, 2, \ , k\}$, получим предложение 1.1 [9].

Теорема 2.2. Если A – *полугруппа, то для любого $l \geq 2$ операция $[\ ]_{l, \mathbf{S}_J, J}$ ассоциативна, то есть универсальная алгебра $< \mathbf{S}_J \times A^J, [\ ]_{l, \mathbf{S}_J, J} >$ является l-арной полугруппой с l-арной операцией* (2.1), *где $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_l$,*

$$\mathbf{y}(j) = \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma_1(j)) \dots \mathbf{x}_{l-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(j)), j \in J.$$

Доказательство. Полагая в предложении 2.1 $m = 2l-1$, $i = 0, 1, \dots, l-1$, получим

$$[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{2l-1}]_{2l-1, \mathbf{S}_J, J} = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_i [\mathbf{u}_{i+1} \dots \mathbf{u}_{i+l}]_{l, \mathbf{S}_J, J} \mathbf{u}_{i+l+1} \dots \mathbf{u}_{2l-1}]_{l, \mathbf{S}_J, J}$$

для любых $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2l-1} \in \mathbf{S}_J \times A^J$, то есть

$$[[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_l]_{l, \mathbf{S}_J, J} \mathbf{u}_{l+1} \dots \mathbf{u}_{2l-1}]_{l, \mathbf{S}_J, J} =$$

$$= [\mathbf{u}_1 [\mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_{l+1}]_{l, \mathbf{S}_J, J} \mathbf{u}_{l+2} \dots \mathbf{u}_{2l-1}]_{l, \mathbf{S}_J, J} = \dots = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{l-1} [\mathbf{u}_l \dots \mathbf{u}_{2l-1}]_{l, \mathbf{S}_J, J}]_{l, \mathbf{S}_J, J}.$$

Следовательно, $< \mathbf{S}_J \times A^J, [\ ]_{l, \mathbf{S}_J, J} >$ – l-арная полугруппа. Для получения равенства из формулировки теоремы используется теорема 2.1, а также тот факт, что A – полугруппа. Теорема доказана.

Полагая в теореме 2.2 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим теорему 2.1 [9].

Соответствующие следствия из теоремы 2.2 можно сформулировать для множеств $J = \mathbb{N}$ и $J = \mathbb{Z}$.

3. ОПЕРАЦИЯ $[\ ]_{l, T, J}$

Определим на множестве $\mathbf{S}_J$ l-арную операцию $(\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_l)_l = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_l$, которая, как несложно заметить, является ассоциативной. Другими словами, $< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$ – l-арная полугруппа. Так как $\mathbf{S}_J$ – группа, то $< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$ – l-арная группа.

Ясно, что если $T \subseteq \mathbf{S}_J$, то $T \times A^J \subseteq \mathbf{S}_J \times A^J$, где

$$T \times A^J = \{(\sigma, \mathbf{a}) \mid \sigma \in T, \mathbf{a} \in A^J\}.$$

Имеет место

Предложение 3.1. *Если подмножество $T \subseteq \mathbf{S}_J$ замкнуто относительно l-арной операции $(\ )_l$, A – группоид, то множество $T \times A^J$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l, \mathbf{S}_J, J}$, то есть $< T \times A^J, [\ ]_{l, \mathbf{S}_J, J} >$ – l-арный* *подгруппоид l-арного группоида* $< \mathbf{S}_J \times A^J, [\,]_{l, \mathbf{S}_J, J} >$. *Если же A – полугруппа, то* $< T \times A^J, [\,]_{l, \mathbf{S}_J, J} >$ *– l-арная подполугруппа l-арной полугруппы* $< \mathbf{S}_J \times A^J, [\,]_{l, \mathbf{S}_J, J} >$.

Замечание 3.1. Если T – подполугруппа группы $\mathbf{S}_J$, то множество T замкнуто относительно l-арной операции $(\,)_l$, то есть $< T, (\,)_l >$ – l-арная подполугруппа l-арной группы $< \mathbf{S}_J, (\,)_l >$.

Из предложения 3.1, ввиду замечания 3.1, вытекает

Следствие 3.1. *Если T – подполугруппа группы* $\mathbf{S}_J$, *то множество* $T \times A^J$ *замкнуто относительно операции* $[\,]_{l, \mathbf{S}_J, J}$, *то есть* $< T \times A^J, [\,]_{l, \mathbf{S}_J, J} >$ *– l-арный подгруппоид l-арного группоида* $< \mathbf{S}_J \times A^J, [\,]_{l, \mathbf{S}_J, J} >$. *Если же A – полугруппа, то* $< T \times A^J, [\,]_{l, \mathbf{S}_J, J} >$ *– l-арная подполугруппа l-арной полугруппы* $< \mathbf{S}_J \times A^J, [\,]_{l, \mathbf{S}_J, J} >$.

Для группоида A, целого $l \geq 2$ и подмножества $T \subseteq \mathbf{S}_J$ определим на $\mathbf{S}_J \times A^J$ частичную l-арную операцию $[\,]_{l, T, J}$ следующим образом: для любых l элементов

$$(\sigma_i, \mathbf{x}_i) \in \mathbf{S}_J \times A^J, i = 1, \ldots, l$$

положим

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \ldots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l, T, J} = [(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \ldots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l, \mathbf{S}_J, J},$$

если $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l \in T$; если же по крайней мере одна из подстановок $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l$ не принадлежит T, то элемент $[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \ldots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l, T, J}$ считается неопределенным.

Ясно, что при $T = \mathbf{S}_J$ операция $[\,]_{l, T, J}$ определена на всем множестве $\boldsymbol{S}_J \times A^J$ и совпадает с операцией $[\,]_{l, \mathbf{S}_J, J}$.

Замечание 3.2. Если $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l \in T$, то согласно определению операции $[\,]_{l, T, J}$

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \ldots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l, T, J} = (\sigma, \mathbf{y}),$$

где σ и $\mathbf{y}$ определяются с помощью (2.2) и (2.3) соответственно.

Замечание 3.3. Если подмножество $T \subseteq \mathbf{S}_J$ замкнуто относительно l-арной операции $(\,)_l$, то, согласно определению операции $[\,]_{l, T, J}$, она определена для любых l элементов множества $T \times A^J$, а ее результат принадлежит этому же множеству. Поэтому в этом случае операции $[\,]_{l, \mathbf{S}_J, J}$ и $[\,]_{l, T, J}$ определены на всем указанном множестве и совпадают на нем.

Замечание 3.3 позволяет объединить предложение 3.1 и следствие 3.1 в виде одной теоремы.

Теорема 3.1. *Если A – группоид (полугруппа), подмножество* $T \subseteq \mathbf{S}_J$ *замкнуто относительно l-арной операции* $(\,)_l$, *в частности, T – подполуг-*

руппа группы $\mathbf{S}_J$, *то* $< T \times A^J, [\ ]_{l,T,J} >$ *– l-арный группоид (l-арная полугруппа).*

Замечание 3.4. l-Арный группоид (l-арную полугруппу) $< T \times A^J, [\ ]_{l,T,J} >$ из теоремы 3.1 можно рассматривать как l-арный подгруппоид l-арного группоида (l-арную подполугруппу l-арной полугруппы) $< \mathbf{S}_J \times A^J, [\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J} >$ так как, согласно замечанию 3.3, операции $[\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J}$ и $[\ ]_{l,T,J}$ на множестве $T \times A^J$ совпадают.

Полагая в теореме 3.1 $T = \mathbf{A}_J$, получим

Следствие 3.2. *Если A – группоид (полугруппа), то для любого* $l \geq 2$ *универсальная алгебра* $< \mathbf{A}_J \times A^J, [\ ]_{l,\mathbf{A}_J,J} >$ *является l-арным группоидом (l-арной полугруппой).*

Так как для любого нечетного $l \geq 3$ множество $\mathbf{B}_J$ замкнуто относительно l-арной операции $(\ )_l$, то, полагая в теореме 3.1 $T = \mathbf{B}_J$, получим

Следствие 3.3. *Если A – группоид (полугруппа), то для любого нечетного* $l \geq 3$ *универсальная алгебра* $< \mathbf{B}_J \times A^J, [\ ]_{l,\mathbf{B}_J,J} >$ *является l-арным группоидом (l-арной полугруппой). В частности,* $<\mathbf{B}_J \times A^J, [\ ]_{3,\mathbf{A}_J,J} >$ *– тернарный группоид (тернарная полугруппа).*

Полагая в следствиях 3.2 и 3.3 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, A – полугруппа, получим соответственно следствия 2.2 и 2.3 из [9].

4. ОПЕРАЦИЯ $[\ ]_{l,\{\sigma\},J}$

Если для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_J$ выполняется условие $\sigma^l = \sigma$, то $< \{\sigma\}, (\ )_l >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$. Поэтому, полагая в теореме 3.1 $T = \{\sigma\}$, получим следующий результат.

Теорема 4.1. *Если A – группоид (полугруппа), подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $< \{\sigma\} \times A^J, [\ ]_{l,\{\sigma\},J} >$ *– l-арный группоид (l-арная полугруппа).*

Следующая лемма позволяет отождествить l-арную операцию $[\ ]_{l,\{\sigma\},J}$, и l-арную операцию $[\ ]_{l,\sigma,J}$, которая была определена и изучалась в [4, 8].

Лемма 4.1. *Если A – группоид, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то отображение* φ: $(\sigma, \mathbf{a}) \to \mathbf{a}$ *является изоморфизмом l-арного группоида* $< \{\sigma\} \times A^J, [\ ]_{l,\{\sigma\},J} >$ *на l-арный группоид* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$.

Теперь ассоциативность l-арной операции $[\ ]_{l,\{\sigma\},J}$ в теореме 4.1 является следствием теоремы 2.5.1 [8] и леммы 4.1.

Не только теорема 4.1, но и многие другие результаты об операции $[\ ]_{l,\{\sigma\},J}$, могут быть получены и как следствие соответствующих результатов об операции $[\ ]_{l,T,J}$, и как следствие соответствующих результатов об операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$ с использованием леммы 4.1. Верно и обратное: с помощью леммы 4.1 многие результаты из книги [8] об операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$, могут быть получены как следствие соответствующих результатов об операции $[\ ]_{l,T,J}$ при $T = \{\sigma\}$.

Большинство результатов из [8] об операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$ и из [9] об операции $[\ ]_{l,T,k}$ могут быть обобщены на случай операции $[\ ]_{l,T,J}$. Из-за ограниченности объема данной публикации приведем в следующих разделах примеры только некоторых таких обобщений.

5. НЕАБЕЛЕВОСТЬ $< \mathbf{S}_J \times A^J, [\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J} >$

Теорема 5.1. *Пусть l-арная подполугруппа $< T, (\ )_l >$ l-арной группы $<\mathbf{S}_J, (\ )_l>$ содержит нетождественную подстановку, группоид A содержит единицу и элемент, отличный от этой единицы. Тогда l-арный группоид $< T \times A^J, [\ ]_{l,T,J} >$ не является абелевым.*

Так как для множества J, мощность $|J|$ которого больше 1, группа $\mathbf{S}_J$ содержит нетождественную подстановку, то из теоремы 5.1 вытекает

Следствие 5.1. *Если группоид A содержит единицу и отличный от нее элемент, то для любого множества J, мощность которого больше 1, l-арный группоид $< \mathbf{S}_J \times A^J, [\ ]_{l,\mathbf{S}_J,J} >$ не является абелевым.*

Следствие 5.2. *Если группоид A содержит единицу и отличный от нее элемент, то для любого множества A, мощность которого больше 1, l-арный группоид $< \mathbf{FS}_J \times A^J, [\ ]_{l,\mathbf{FS}_J,J} >$ не является абелевым.*

Так как для любого множества J, содержащего более двух элементов, группа $\mathbf{A}_J$ содержит нетождественную подстановку, то из теоремы 5.1 вытекает

Следствие 5.3. *Если группоид A содержит единицу и отличный от нее элемент, то для любого множества J, мощность которого больше 2, l-арный группоид $< \mathbf{A}_J \times A^J, [\ ]_{l,\mathbf{A}_J,J} >$* не является абелевм.

Считая в теореме 5.1 A полугруппой, получим следующий результат.

Теорема 5.2. *Пусть l-арная подполугруппа $< T, (\ )_l >$* l-арной группы *$< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$ содержит нетождественную подстановку, полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от этой единицы. Тогда l-арная полугруппа $< T \times A^J, [\ ]_{l,T,J} >$ не является абелевой.*

Теоремам 5.1 и 5.2, ввиду замечания 3.1, соответствуют следующие две теоремы.

Теорема 5.3. *Пусть подполугруппа T группы $\mathbf{S}_J$ содержит нетождественную подстановку, группоид A содержит единицу и элемент, отличный от этой единицы. Тогда l-арный группоид $< T \times A^J, [\ ]_{l,T,J} >$* не является абелевым.

Теорема 5.4. *Пусть подполугруппа T группы $\mathbf{S}_J$ содержит нетождественную подстановку, полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от этой единицы. Тогда l-арная полугруппа $< T \times A^J, [\ ]_{l,T,J} >$ не является абелевой.*

Для теорем 5.2, 5.3 и 5.4 можно сформулировать следствия, аналогичные следствиям 5.1 – 5.3.

Замечание 5.1. Если в теореме 5.1 в качестве l-арной подполугруппы $< T, (\ )_l >$ l-арной группы $< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$ взять одноэлементную l-арную полугруппу $< \{\sigma\}, (\ )_l >$, где подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, и применить лемму 4.1, то получится теорема 2.3.1 [8].

Если в теореме 5.2 в качестве l-арной подполугруппы $< T, (\ )_l >$ l-арной группы $< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$ взять одноэлементную l-арную полугруппу $< \{\sigma\}, (\ )_l >$, где подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то получится

Теорема 5.5. *Если нетождественная подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от этой единицы, то l-арная полугруппа* $< \{\sigma\} \times A^J, [\ ]_{l, \{\sigma\}, J} >$ не является абелевой.

Применив к теореме 5.5 лемму 4.1, получим

Следствие 5.4. *Если нетождественная подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от этой единицы, то l-арная полугруппа $< A^J, [\ ]_{l, \sigma, J} >$ не является абелевой.*

6. l-АРНАЯ ГРУППА $< T \times A^J, [\ ]_{l, T, J} >$

Следующая теорема доказывается аналогично теоремам 3.6.2 [2] и 3.1 [9].

Теорема 6.1. *Пусть $< T, (\ )_l >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$, A – группа. Тогда $< T \times A^J, [\ ]_{l, T, J} >$ – l-арная группа. В частности, $< \mathbf{S}_J \times A^J, [\ ]_{l, \mathbf{S}_J, J} >$ – l-арная группа.*

Замечание 6.1. Если в теореме 6.1 в качестве l-арной подгруппы $< T, (\ )_l >$ l-арной группы $< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$ взять одноэлементную l-арную группу $< \{\sigma\}, (\ )_l >$, где подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, и применить лемму 4.1, то получится теорема 2.7.1 [8]. В свою очередь, из этой теоремы при $J = \{1, 2, \ , k\}$ вытекает теорема 3.6.2 [2].

Из теоремы 6.1 вытекает также следующее

Следствие 6.1. *Если T – подгруппа группы $\mathbf{S}_J$, A – группа, то $< T \times A^J, [\ ]_{l, T, J} >$ – l-арная группа.*

Полагая в следствии 6.1 $T = \mathbf{SF}_J$, получим

Следствие 6.2. *Если A – группа, то для любого $l \geq 2$ универсальная алгебра $< \mathbf{SF}_J \times A^J, [\ ]_{l, \mathbf{SF}_J, J} >$ является l-арной группой.*

Полагая в следствии 6.1 $T = \mathbf{A}_J$, получим

Следствие 6.3. *Если A – группа, то для любого $l \geq 2$ универсальная алгебра $< \mathbf{A}_J \times A^J, [\ ]_{l, \mathbf{A}_J, J} >$ является l-арной группой.*

Полагая в теореме 6.1 $T = \mathbf{B}_J$, и, считая l нечетным, получим

Следствие 6.4. *Для любой группы A и любого нечетного $l \geq 3$ универсальная алгебра $< \mathbf{B}_J \times A^J, [\ ]_{l, \mathbf{B}_J, J} >$ является l-арной группой. В частности, $< \mathbf{B}_J \times A^J, [\ ]_{3, \mathbf{B}_J, J} >$ – тернарная группа.*

Теоремы 5.2 и 6.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 6.2. *Пусть l-арная подгруппа $< T, (\ )_l >$ l-арной группы $< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$ содержит нетождественную подстановку, A – неединичная группа. Тогда l-арная группа $< T \times A^J, [\ ]_{l, T, J} >$ не является абелевой.*

Следствие 6.5. *Если A – неединичная группа, то для любого множества J, мощность которого больше 1, l-арная группа $< \mathbf{S}_J \times A^J, [\ ]_{l, \mathbf{S}_J, J} >$ не является абелевой.*

Следствие 6.6. *Если A – неединичная группа, то для любого множества J, мощность которого больше 1, l-арная группа $< \mathbf{FS}_J \times A^J, [\ ]_{l, \mathbf{FS}_J, J} >$ не является абелевой.*

Следствие 6.7. *Если l – неединичная группа, то для любого множества J, мощность которого больше 2, l-арная группа $< \mathbf{A}_J \times A^J, [\ ]_{l, \mathbf{A}_J, J} >$ не является абелевой.*

Теореме 6.2, ввиду замечания 3.1, соответствует следующая теорема.

Теорема 6.3. *Пусть T – неединичная подгруппа группы $\mathbf{S}_J$, A – неединичная группа. Тогда l-арная группа $< T \times A^J, [\ ]_{l, T, J} >$ не является абелевой.*

Для теоремы 6.3 можно сформулировать следствия, аналогичные следствиям 6.5 – 6.7.

В следующей теореме указывается явный вид косых элементов в l-арной группе $< T \times A^J, [\ ]_{l, T, J} >$.

Теорема 6.4. *Пусть $< T, (\ )_l >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$, A – группа. Тогда для любого элемента* $(\sigma, \mathbf{a})$ l-арной группы $< T \times A^J, [\ ]_{l, T, J} >$ элемент

$$(\sigma^{2-l}, \mathbf{u}), \tag{6.1}$$

где функция $\mathbf{u} \in A^J$ определяется равенством

$$\mathbf{u}(\sigma^{l-1}(j)) = (\mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1}, j \in J, \tag{6.2}$$

является косым, то есть $\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\sigma^{2-l}, \mathbf{u})$.

Следствие 6.8. *Пусть T – подгруппа группы $\mathbf{S}_J$, A – группа. Тогда для любого элемента* $(\sigma, \mathbf{a})$ *l-арной группы $< T \times A^J, [\ ]_{l, T, J} >$ элемент* (6.1) *со второй компонентой $\mathbf{u} \in A^J$, определяемой равенством* (6.2), *является косым.*

Замечание 6.2. Так как $\overline{\sigma} = \sigma^{2-l}$, то равенство $\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\sigma^{2-l}, \mathbf{u})$ из формулировки теоремы 6.4 принимает вид $\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\overline{\sigma}, \mathbf{u})$. Кроме того, с помощью замены $s = \sigma^{l-1}(j)$ равенство (6.2) в теореме 6.4 можно переписать в виде

$$\mathbf{u}(s) = (\mathbf{a}(\sigma^{-1}(s)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma^{2-l}(s)))^{-1}, s \in J.$$

Для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_J$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, имеем $\sigma^{2-l} = \sigma$. Поэтому, полагая в теореме 6.4 $T = \{\sigma\}$, где $\sigma^l = \sigma \in \mathbf{S}_J$, и используя тождественность подстановки σ^{l-1}, получим следующий результат.

Теорема 6.5. *Пусть подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, A *– группа. Тогда для любого элемента* $(\sigma, \mathbf{a})$ l*-арной группы* $< \{\sigma\} \times A^J, [\ ]_{l, \{\sigma\}, J} >$ *элемент* $(\sigma, \mathbf{u})$, *где функция* $\mathbf{u} \in A^J$ *определяется равенством*

$$\mathbf{u}(j) = (\mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1}, j \in J,$$

является косым, то есть $\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\sigma, \mathbf{u})$.

Замечание 6.3. Если к теореме 6.5 применить лемму 4.1, то получится предложение 2.7.2 [8]. В свою очередь, из этого предложения при $J = \{1, 2, \ , k\}$ вытекает предложение 3.6.3 [2].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Post, E.L.*** Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
2. ***Гальмак, А.М.*** Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
3. ***Гальмак, А.М.*** Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
4. ***Гальмак, А.М.*** Об операции $[\ ]_{l, \sigma, J}$ / А.М. Гальмак // Междунар. научно-практ. конф., посвящ. 100-летию МГУ имени А.А. Кулешова: сборник научных статей, Могилев, 20–22 февраля 2013 г. – С. 79–83.
5. ***Гальмак, А.М.*** Тернарные алгебры функций. / А.М. Гальмак, В.К. Лапковский // Междунар. научно-практ. конф., посвящ. 100-летию МГУ имени А.А. Кулешова : сборник материалов, Могилев, 20–22 февраля 2013 г. – С. 149–150.
6. ***Кулаженко Ю.И.*** О центрах l-арных группоидов / Ю.И. Кулаженко // Веснік ВДУ імя П.М. Машэрава. – Витебск. – 2013. – № 3. – С. 5–11.
7. ***Кулаженко Ю.И.*** О полуцентрах l-арных группоидов / Ю.И. Кулаженко // Проблемы физики, математики и техники. – № 2(15). – 2013. – С. 76–80.
8. ***Гальмак, А.М.*** Полиадические операции на множествах функций / А.М. Гальмак, Ю.И. Кулаженко. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2013. – 192 с.
9. ***Гальмак, А.М.*** Обобщенные полиадические операции / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – Гомель. – 2013. – № 2. – С. 50–57.
10. ***Гальмак, А.М.*** n-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.
11. ***Гальмак, А.М.*** n-Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.
12. ***Русаков, С.А.*** Алгебраические n-арные системы / С.А. Русаков. – Минск : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
13. ***Супруненко, Д.А.*** Группы подстановок / Д.А. Супруненко. – Минск : Навука і тэхніка, 1996. – 366 с.
14. ***Wielandt, H.*** Unendliche Permutationsgruppen / H. Wielandt. – Vorlesungen an der Universität Tübingen WS 1959 – 1960. – Tübingen, 1960. – S. 1–45.

Поступила в редакцию 28.08.2013 г.