МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 511.42

В.И. БЕРНИК, А.В. ЛУНЕВИЧ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ И ЦЕЛЫМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ НА ПЛОСКОСТИ

В данной работе доказана регулярность множества точек (α_1, α_2) с действительными алгебраическими координатами и регулярность множества точек (β_1, β_2) с целыми действительными алгебраическими координатами произвольной степени.

Введение

Пусть задано натуральное число $Q > 1$ и некоторый прямоугольник на плоскости $I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2$, где I_1, I_2 – некоторые интервалы в $\mathbb{R}$. Многие задачи теории совместных диофантовых приближений зависят от следующей задачи. При каком соотношении Q и $|I_1|, |I_2|$ можно утверждать, что внутри прямоугольника $I_1 \times I_2$ находятся точки (α_1, α_2), где α_1, α_2 – действительные корни одного и того же минимального многочлена $P(x)$ и $H(P) \leq Q, \deg(P) = n \geq 1$.

В дальнейшем будем считать, что Q достаточно большое натуральное число, а числа $c_1, c_2 \ldots$ зависят только от степени многочлена и не зависят от Q.

Зависимость между корнями полиномов и их коэффициентами очень сложная. Хорошо известен факт, что существуют полиномы больше четвертой степени, корни которых нельзя выразить в радикалах. В работе [1] Бейкер и Шмидт ввели понятие регулярной системы и доказали, что действительные алгебраические числа образуют регулярную систему.

В данной статье мы обобщаем результаты работ Бейкера, Шмидта, Берника, Бересневича на распределение пар действительных алгебраических чисел (α, β) на плоскости.

Определение 1. Счетное множество Γ, состоящее из точек $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$ на плоскости вместе с положительной функцией *N*, определенной на Γ, называется (v_1, v_2)-регулярной системой (N, Γ), если для любого прямоугольника $П = I_1 \times I_2$ найдется такое число $T_0(П)$, что при $T > T_0$ выполнены следующие условия.

1. Прямоугольники

$$\begin{cases} |x-\gamma_1| < T^{-v_1}, & v_1 > 0, \\ |y-\gamma_2| < T^{-v_2}, & v_2 > 0, \end{cases}$$

не пересекаются.

2. $\#\{\overline{\gamma} \in Г \cap П : N(\overline{\gamma}) \leq T^{v_1+v_2}\} \geq c_1 T^{v_1+v_2} \mu П$.

В данной работе доказаны две теоремы.

Теорема 1. *Пусть $Г$ – множество, состоящее из точек $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ с алгебраическими координатами, где α_1 и α_2 – корни одного и того же многочлена, $H(\overline{\alpha}) = H(\alpha_1) = H(\alpha_2)$, $\deg \overline{\alpha} = \deg \alpha_1 = \deg \alpha_2 \leq n$. Тогда множество $Г$ вместе с функцией $N(\overline{\alpha}) = \left(H(\overline{\alpha})\right)^{n+1}$ образует (v_1, v_2)-регулярную систему, где*

$$v_1 + v_2 = n + 1, \qquad v_1 > 0, v_2 > 0.$$

Теорема 2. *Пусть $Г$ – множество, состоящее из точек $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ с целыми алгебраическими координатами, где β_1 и β_2 – корни одного и того же многочлена, $H(\overline{\beta}) = H(\beta_1) = H(\beta_2)$, $\deg \overline{\beta} = \deg \beta_1 = \deg \beta_2 \leq n$. Тогда множество $Г$ вместе с функцией $N(\overline{\beta}) = \left(H(\overline{\beta})\right)^{n}$ образует (v_1, v_2)-регулярную систему, где*

$$v_1 + v_2 = n, \qquad v_1 > 0, v_2 > 0.$$

Основой доказательства теорем 1 и 2 является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(Q, \delta_0, I_1, I_2)$ обозначает множество пар $(x, y) \in I_1 \times I_2$, для которых система неравенств*

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-v}, \\ |P(y)| < Q^{-v}, \\ min\{|P'(x)|, |P'(y)|\} < \delta_0 Q \end{cases} \qquad (1)$$

имеет решение в полиномах $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, где $2v = n - 1$. Тогда при достаточно малой величине $\delta_0 = \delta_0(n)$ имеем

$$\mu \mathcal{L}_n < \frac{1}{4}|I_1||I_2|.$$

В процессе доказательства теоремы 3 будут возникать множества $\mathcal{L}_{n,i}$ и $\mathcal{L}_{n,i,j}$ (их количество не превосходит $s = s(n)$), аналогичные $\mathcal{L}_n$, но с другими условиями на $\min\{|P'(x)|, |P'(y)|\}$. Для каждого из них мы получим оценки

$$\mu\mathcal{L}_{n,i} \leq \frac{1}{4s}|I_1||I_2|,$$
$$\mu\mathcal{L}_{n,i,j} \leq \frac{1}{4s}|I_1||I_2|,$$

из которых будет следовать оценка для $\mu\mathcal{L}_n$.

2. Вспомогательные леммы

Для многочлена $P(x)$ с корнями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ пусть $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ эти же корни, но с другой нумерацией и

$$S(\alpha_i) = \left\{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha_i| = \min_{1 \leq j \leq n} |x - \alpha_j|\right\},$$

$$S(\beta_s) = \left\{y \in \mathbb{R} : |y - \beta_s| = \min_{1 \leq t \leq n} |y - \beta_t|\right\}.$$

Везде далее полагаем, что $i = s = 1$ и для каждой из двух нумераций корней многочлена $P(x)$ выполняется соответствующее условие:

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1 - \alpha_3| \leq \cdots \leq |\alpha_1 - \alpha_n|,$$
$$|\beta_1 - \beta_2| \leq |\beta_1 - \beta_3| \leq \cdots \leq |\beta_1 - \beta_n|.$$

А также везде далее будем считать, что $I_1, I_2 \subset \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Лемма 1. *Пусть* $x \in S(\alpha_1)$. *Тогда*

$$|x - \alpha_1| \leq n\frac{|P(x)|}{|P'(x)|},$$

$$|x - \alpha_1| \leq 2^{n-1}\frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_1)|}.$$

Первое неравенство следует из тождества

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - \alpha_i},$$

а второе доказано в [2].

Лемма 2. *Пусть* $\delta, K_0, \eta_1, \eta_2$ *– действительные положительные числа,* P_1, P_2 *– два многочлена с целыми коэффициентами степени* $n \geq 1$ *без общих корней,* $\max\{H(P_1), H(P_2)\} < K$, *где* $K > K_0$. *Пусть* $I_1, I_2 \in \mathbb{R}, |I_1| = K^{-\eta_1}, |I_2| = K^{-\eta_2}$. *Если при некоторых* $\tau_1, \tau_2 > 0$, *для всех пар* $(x, y) \in I_1 \times I_2$ *выполнены неравенства:*

$$max\{P_1(x), P_2(x)\} < K^{-\eta_1},$$

$$max\{P_1(y), P_2(y)\} < K^{-\eta_2},$$

то

$\tau_1 + 1 + 2\max\{\tau_1 + 1 - \eta_1, 0\} + \tau_2 + 1 + 2\max\{\tau_2 + 1 - \eta_2, 0\} < 2n + \delta.$

Лемма 2 доказывается аналогично лемме 3 из [3].

3. Доказательство теоремы 3. Сведение к многочленам второй степени.

В неравенствах (1) рассмотрим отдельно случаи, когда

$$2n^{3/2}Q^{-\frac{v-1}{2}} \leq min\{|P'(x)|, |P'(y)|\} < \delta_0 Q \tag{2}$$

и

$$min\{|P'(x)|, |P'(y)|\} < 2n^{3/2}Q^{-\frac{v-1}{2}}, \tag{3}$$

так как способы доказательств для обоих случаев различаются.

Вначале предположим, что верна оценка (2).

Покажем, как из (2) получить двусторонние оценки для $|P'(\alpha_1)|$ и $|P'(\beta_1)|$. По формуле Лагранжа

$$P'(x) = P'(\alpha_1) + P''(\xi_1)(x - \alpha_1), \;\; \xi_1 \in (x, \alpha_1). \tag{4}$$

Из оценки (2) и леммы 1 имеем:

$$|x - \alpha_1| < nQ^{-v+\frac{v-1}{2}} \cdot 2^{-1}n^{-3/2} = 2^{-1}n^{-1/2}Q^{-\frac{v+1}{2}},$$

$$|P''(\xi_1)(x - \alpha_1)| < 2n^2 \cdot 2^{-1}n^{-1/2}Q^{-\frac{v+1}{2}} = n^{3/2}Q^{-\frac{v-1}{2}}.$$

При $|P'(\alpha_1)| < n^{3/2}Q^{-\frac{v-1}{2}}$ равенство (4) противоречиво. Аналогично противоречиво равенство

$$P'(y) = P'(\beta_1) + P''(\xi_1)(y - \beta_1), \;\; \xi_1 \in (y, \beta_1)$$

при $|P'(\beta_1)| < n^{3/2}Q^{-\frac{v-1}{2}}$. Поэтому при условии (2) систему неравенств (1) заменяем системой неравенств:

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-v}, \\ |P(y)| < Q^{-v}, \\ n^{3/2}Q^{-\frac{v-1}{2}} < |P'(\alpha_1)| < 2\delta_0 Q, \\ n^{3/2}Q^{-\frac{v-1}{2}} < |P'(\beta_1)|, \end{cases} \tag{5}$$

в которой без потери общности считаем, что сверху числом $\delta_0 Q$ ограничена производная в α_1.

Обозначим множество решений системы неравенств (5) через $\sigma_0(P)$. После получения оценки $\mu\sigma_0(P)$ рассмотрим систему неравенств:

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-v}, \\ |P(y)| < Q^{-v}, \\ min\{|P'(x)|, |P'(y)|\} < 2n^{3/2}Q^{-\frac{v-1}{2}}. \end{cases} \tag{6}$$

Обозначим через $\mathcal{L}_{n,1}$ множество пар $(x, y) \in I_1 \times I_2$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-v}, \\ |P(y)| < Q^{-v}, \\ Q^{1/4} \le min\{|P'(\alpha_1)|, |P'(\beta_1)|\} \le 2\delta_0 Q \end{cases} \tag{7}$$

имеет хотя бы одно решение в полиномах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$. Из леммы 1 следует, что множество решений (7) содержится в прямоугольнике:

$$\begin{aligned} &|x-\alpha_1| < 2^{n-1}Q^{-v}|P'(\alpha_1)|^{-1}, \\ &|y-\beta_1| < 2^{n-1}Q^{-v}|P'(\beta_1)|^{-1}, \end{aligned} \tag{8}$$

который обозначим $\sigma(P)$.

Предложение 1. *Для достаточно малой величины δ_0 и достаточно большого Q справедлива оценка* $\mu\mathcal{L}_{n,1} < \frac{1}{16}|I_1||I_2|$.

Доказательство. Определим множество $\sigma_1(P)$ следующим образом:

$$\sigma_1(P) := \left\{(x,y) \in I_1 \times I_2 : \begin{array}{ll} |x-\alpha_1| < c_3 Q^{-1/2}|P'(\alpha_1)|^{-1}, & \\ |y-\beta_1| < c_3 Q^{-1/2}|P'(\beta_1)|^{-1}, & c_3 > 1 \end{array}\right\}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) получаем

$$\mu\sigma(P) \leq 2^{2n-2}c_3{}^{-2}Q^{-n+2}\mu\sigma_1(P). \qquad (10)$$

Разложим P в ряд Тейлора на промежутках из $\sigma_1(P)$:

$$P(x) = P'(\alpha_1)(x-\alpha_1) + \frac{1}{2}P''(\xi_3)(x-\alpha_1)^2, \ \ \xi_3 \in (x, \alpha_1),$$

$$P(y) = P'(\beta_1)(x-\beta_1) + \frac{1}{2}P''(\xi_4)(y-\beta_1)^2, \ \ \xi_4 \in (y, \beta_1).$$

Используя (7) и (9), оценим каждое слагаемое в разложениях. При достаточно больших Q и c_3 будем иметь:

$$\begin{cases} P(x) < 2c_3Q^{-1/2}, \\ P(y) < 2c_3Q^{-1/2}, \end{cases} \qquad (11)$$

где $(x, y) \in \sigma_1(P)$.

Зафиксируем вектор $\mathbf{b_1} = (a_n, \dots, a_3)$, состоящий из коэффициентов многочлена $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, и обозначим через $\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b_1})$ подкласс многочленов с одним и тем же вектором $\mathbf{b_1}$. Далее воспользуемся методом существенных и несущественных прямоугольников.

Прямоугольник $\sigma_1(P_1) \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b_1})$ будем называть **существенным**, если для любого другого прямоугольника $\sigma_1(P_2)$, $P_2 \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b_1})$ выполняется неравенство

$$\mu\big(\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)\big) < \frac{1}{2}\mu\sigma_1(P_1).$$

Если же в подклассе $\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b_1})$ найдется прямоугольник $\sigma_1(P_2)$, $P_2 \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b_1})$ такой, что

$$\mu\big(\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)\big) > \frac{1}{2}\mu\sigma_1(P_1),$$

то прямоугольник $\sigma_1(P_1)$ будем называть **несущественным**.

Вначале рассмотрим существенные прямоугольники $\sigma_1(P_1)$. Более половины существенного прямоугольника свободно от точек других прямоугольников (в смысле меры Лебега), поэтому

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q, \boldsymbol{b}_1)} \mu\sigma_1(P) \leq 4|I_1||I_2|.$$

Используя последнее неравенство, (10) и $\#\mathbf{b_1} < (2Q+1)^{n-2} < (4Q)^{n-2}$, получаем при достаточно большом Q неравенство

$$\sum_{\boldsymbol{b_1}} \sum_{P\in\mathcal{P}_n(Q,\boldsymbol{b_1})} \mu\sigma(P) < 2^{2n-2}c_3{}^{-2}Q^{-n+2}\cdot(4Q)^{n-2}\cdot 4|I_1||I_2| = 2^{4n-2}c_3^{-2}|I_1||I_2|$$

и, взяв $c_3 = 2^{2n+1.5}$, получаем оценку

$$\sum_{\boldsymbol{b_1}} \sum_{P\in\mathcal{P}_n(Q,\boldsymbol{b_1})} \mu\sigma(P) \le \frac{1}{32}|I_1||I_2|. \qquad (12)$$

Рассмотрим несущественные прямоугольники $\sigma_1(P)$. Для многочленов $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b_1})$ на пересечении $\sigma_1(P_1,P_2) = \sigma_1(P_1)\bigcap\sigma_1(P_2)$, мера которого не менее $\frac{1}{2}\mu\sigma_1(P_1)$, выполняются неравенства (11). Поскольку $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b_1})$, то многочлен $R(x) = P_1(x) - P_2(x)$ является квадратным и удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} |R(x)| < 4c_3Q^{-1/2}, \\ |R(y)| < 4c_3Q^{-1/2}, \\ min\{|R'(x)|, |R'(y)|\} < 4\delta_0 Q, \\ H(R) \le 2Q. \end{cases} \qquad (13)$$

Многочлен $R(x)$ имеет вид

$$R(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \text{ и } R'(x) = 2a_2x + a_1.$$

Без потери общности можно считать, что $|R'(x)| < |R'(y)|$.

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} a_2x^2 + a_1x + a_0 = \Theta_1(x)4c_3Q^{-1/2}, \\ a_2y^2 + a_1y + a_0 = \Theta_2(y)4c_3Q^{-1/2}, \\ 2a_2x + a_1 = \Theta_3(x)4\delta_0 Q, \end{cases}$$

где Θ_i – некоторые непрерывные функции, такие, что $|\Theta_i(x)| < 1$.

Найдем из этой системы a_2 по методу Крамера:

$$a_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ 2x & 1 & 0 \end{vmatrix} = x^2\cdot\begin{vmatrix} y & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - x\cdot\begin{vmatrix} y^2 & 1 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} y^2 & y \\ 2x & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= x^2 - 2x^2 + y^2 - 2xy = y^2 - 2xy - x^2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \Theta_1(x)4c_3Q^{-1/2} & x & 1 \\ \Theta_2(y)4c_3Q^{-1/2} & y & 1 \\ \Theta_3(x)4\delta_0 Q & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \Theta_1(x)4c_3Q^{-1/2} - \Theta_2(y)4c_3Q^{-1/2} + \Theta_3(x)4\delta_0 Q(x-y),$$

$$a_2 = \frac{\Theta_1(x)4c_3Q^{-1/2} - \Theta_2(y)4c_3Q^{-1/2} + \Theta_3(x)4\delta_0 Q(x-y)}{y^2 - 2xy - x^2}.$$

Вырежем из $I_1 \times I_2$ множество пар (x, y), удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} |x-y| \le \delta_1, \\ |y^2 - 2xy - x^2| \le \delta_1, \end{cases}$$

которое обозначим $\mathcal{B}_{\delta_1}$. Множество $(I_1 \times I_2) \setminus \mathcal{B}_{\delta_1}$ обозначим $\mathcal{A}_{\delta_1}$.

Тогда $|a_2| < \dfrac{8\delta_0 Q}{\delta_1}$ при $(x, y) \in \mathcal{A}_{\delta_1}$ и достаточно большом Q.

Покажем, что из $(x, y) \in \mathcal{A}_{\delta_1}$ следует $|\alpha_1 - \alpha_2| > \dfrac{\delta_1}{2}$.

Пользуясь методом от противного, предположим, что $(x, y) \in \mathcal{A}_{\delta_1}$ и

$$|\alpha_1 - \alpha_2| < \frac{\delta_1}{2}.$$

Так как $|\alpha_1 - \alpha_2| < \dfrac{\delta_1}{2}$ и $(x, y) \in \mathcal{A}_{\delta_1}$, то $|x - \alpha_1| > \dfrac{\delta_1}{4}$ или $|y - \alpha_2| > \dfrac{\delta_1}{4}$, из чего с учетом (9) и леммы 1 следует, что

$$|R'(\alpha_1)| \le 32c_3Q^{-1/2}\delta_1^{-1}$$

или

$$|R'(\alpha_2)| \le 32c_3Q^{-1/2}\delta_1^{-1}.$$

Но $|R'(\alpha_1)| = |R'(\alpha_2)| = \sqrt{D(R)}$ ($D(R)$ – дискриминант многочлена R) и, следовательно, $\sqrt{D(R)} \le 32c_3Q^{-1/2}\delta_1^{-1}$. При достаточно большом Q имеем $D(R) = 0$.

Если $D(R) = 0$, то система (13) примет вид

$$\begin{cases} |a_2'x + a_1'| \le 2\sqrt{c_3}Q^{-1/4}, \\ |a_2'y + a_1'| \le 2\sqrt{c_3}Q^{-1/4}, \\ max\{a_1', a_2'\} \le \sqrt{\dfrac{8\delta_0 Q}{\delta_1}}, \end{cases} \tag{14}$$

где $(a_2'x + a_1')^2 = R(x)$.

При достаточно большом Q все точки (x, y), удовлетворяющие (14), принадлежат $\mathcal{B}_{\delta_1}$, что противоречит предположению $(x,y) \in \mathcal{A}_{\delta_1}$. Поэтому далее считаем, что

$$|\alpha_1 - \alpha_2| > \frac{\delta_1}{2}.$$

Оценим снизу $|R'(\alpha_1)|$ и $|R'(\beta_1)|$:

$$\begin{aligned} |R'(\alpha_1)| &= a_2|\alpha_1 - \alpha_2| > \frac{\delta}{2}a_2, \\ |R'(\beta_1)| &= a_2|\beta_1 - \beta_2| > \frac{\delta}{2}a_2. \end{aligned} \tag{15}$$

Тогда

$$\begin{cases} |x - \alpha_1| \le 2 \cdot 4c_3Q^{-1/2}|R'(\alpha_1)|^{-1} \le 16c_3\delta_1^{-1}a_2^{-1}Q^{-1/2}, \\ |y - \beta_1| \le 2 \cdot 4c_3Q^{-1/2}|R'(\beta_1)|^{-1} \le 16c_3\delta_1^{-1}a_2^{-1}Q^{-1/2}, \end{cases} \tag{16}$$

где $(x,y) \in \sigma_1(P_1, P_2)$ и

$$\mu\sigma_1(P_1, P_2) \le 2^{10}{c_3}^2\delta^{-2}a_2^{-2}Q^{-1}. \tag{17}$$

Теперь оценим коэффициенты a_1 и a_0. Из (16) и $(x,y) \in \mathcal{A}_{\delta_1}$ следует, что корни α_1, α_2 ограничены:

$$|\alpha_1| \le c_5,$$

$$|\alpha_2| \le c_6.$$

Тогда, используя формулы Виета, при достаточно большом Q получаем:

$$\begin{aligned} |\alpha_1 + \alpha_2| &= \left|\frac{a_1}{a_2}\right| \le c_5 + c_6 = c_7 \Rightarrow |a_1| \le c_7|a_2| \le c_9|a_2|, \\ |\alpha_1 \cdot \alpha_2| &= \left|\frac{a_0}{a_2}\right| \le c_5 \cdot c_6 = c_8 \Rightarrow |a_0| \le c_8|a_2| \le c_9|a_2|, \end{aligned} \tag{18}$$

где $c_9 = \max\{c_7, c_8\}$.

Из (17), (18) следует цепочка неравенств

$$\sum_{a_2a_1a_0} \mu\sigma_1(P) \le 2 \cdot \sum_{a_2a_1a_0} \mu\sigma_1(P_1, P_2) \le \sum_{a_2a_1a_0} 2^{11}{c_3}^2\delta_1^{-2}a_2^{-2}Q^{-1} + \mu\mathcal{B}_{\delta_1} \le$$

$$\le \sum_{a_2} 2^{11}{c_3}^2\delta_1^{-2}c_9^2Q^{-1} + \mu\mathcal{B}_{\delta_1} \le 2^{14}{c_3}^2\delta_1^{-3}c_9^2\delta_0 + \mu\mathcal{B}_{\delta_1}.$$

Взяв $\delta_1 = \delta_0^{1/4}$ и подходящее δ_0, получим

$$2^{13}{c_3}^2c_9^2\delta_0^{1/4} + \mu\mathcal{B}_{\delta_1} < \frac{1}{32}|I_1||I_2|. \tag{19}$$

Складывая оценки (12) и (19), имеем

$$\mu\mathcal{L}_{n,1} < \frac{1}{16}|I_1||I_2|. \tag{20}$$

4. Индукция и доказательство теоремы для неприводимых многочленов степени *n*.

В данном разделе все полиномы предполагаются неприводимыми.

Пусть производные удовлетворяют следующим условиям:

при $2 \le k_1 \le n-2$

$$Q^{-\frac{k_1-2}{4}} \le |R'(\alpha_1)| \le Q^{-\frac{k_1-3}{4}},$$

$$Q^{-\frac{k_2-2}{4}} \le |R'(\beta_1)| \le Q^{-\frac{k_2-3}{4}},$$

где $k_1 \ge k_2$,

а при $k_1 = n-1, k_2 = n-1$

$$n^{3/2}Q^{-\frac{n-3}{4}} \le |R'(\alpha_1)| \le Q^{-\frac{n-2}{4}},$$

$$n^{3/2}Q^{-\frac{n-3}{4}} \le |R'(\beta_1)| \le Q^{-\frac{n-2}{4}}.$$

Определим прямоугольники

$$\sigma_{k_1k_2}(P) := \left\{(x,y) \in I_1 \times I_2 \colon \begin{matrix} |x-\alpha_1| < c_5Q^{-k_1/2}|P'(\alpha_1)|^{-1}, & \\ |y-\beta_1| < c_5Q^{-k_2/2}|P'(\beta_1)|^{-1}, & c_5 > 1 \end{matrix}\right\}.$$

Как и прежде без потери общности будем считать, что $|R'(\alpha_1)| < |R'(\beta_1)|$.

Зафиксируем вектор $\mathbf{b_k} = (a_n, \dots, a_{k+2})$. Множество многочленов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ с одним и тем же вектором $\mathbf{b_k}$ обозначим $P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b_k})$. При достаточно большом Q будем пользоваться оценкой $\#\mathbf{b_k} < 2^{2n}Q^{n-k_1-1}$. Оценим $|P(x)|, |P'(x)|, |P(y)|, |P'(y)|$ при $(x, y) \in \sigma_{k_1k_2}(P), \xi_5 \in (x, \alpha_1)$, $\xi_6 \in (x, \alpha_1), \xi_7 \in (x, \beta_1)$:

$$|P(x)| < |P'(\alpha_1)| + \frac{1}{2}|P''(\xi_5)||x - \alpha_1|^2 < 2c_{10}Q^{-k_1/2},$$

$$|P'(x)| < |P'(\alpha_1)| + |P''(\xi_6)||x - \alpha_1| < 2Q^{-\frac{k_1-3}{4}},$$

$$|P(y)| < |P'(\beta_1)| + \frac{1}{2}|P''(\xi_7)||y - \beta_1|^2 < 2c_{10}Q^{-k_2/2},$$

$$|P'(y)| < |P'(\beta_1)| + |P''(\xi_6)||x - \beta_1| < 2Q^{-\frac{k_2-3}{4}}.$$

Прямоугольники $\sigma_{k_1k_2}(P), P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b_k})$ поделим на существенные и несущественные. В случае существенных прямоугольников из оценок $\#\mathbf{b_k}$,

$$\mu\sigma(P) < 2^{2n-2}c_{10}^{-2}Q^{-n+\frac{k_1+k_2}{2}+1}\mu\sigma_{k_1k_2}(P),$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q, \boldsymbol{b_k})} \mu\sigma_{k_1k_2}(P) \le 4|I_1||I_2|$$

имеем

$$\sum_{\boldsymbol{b_k}} \sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q, \boldsymbol{b_k})} \mu\sigma(P) \le 2^{4n}c_{10}^{-2}Q^{\frac{k_2-k_1}{2}}|I_1||I_2| \le \frac{1}{32}|I_1||I_2| \quad (21)$$

при достаточно большой величине c_{10}.

В случае несущественных прямоугольников на пересечении $\sigma_{k_1k_2}(P_1) \cap \sigma_{k_1k_2}(P_2)$, $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b_k})$ получаем для многочлена $R(x) = P_1(x) - P_2(x)$ оценки

$$\begin{cases} |R(x)| \le 4c_{10}Q^{-k_1}, \\ |R(y)| \le 4c_{10}Q^{-k_2}, \\ |R'(x)| \le 4Q^{-\frac{k_1-3}{4}}, \\ |R'(y)| \le 4Q^{-\frac{k_2-3}{4}}, \end{cases} \tag{22}$$

где $\deg R \le k_1 + 1, H(R) \le 2Q$.

Обозначим через $\mathcal{L}_{n,k_1,k_2}$ $(2 \le k_1 \le n-2, k_1 \ge k_2)$ множество пар (x, y), для которых выполняются неравенства (22).

По предположению индукции

$$\mu \bigcup_{\substack{2\le k_1 \le n-1, \\ k_2 \le max\,\{k_1, n-2\}}} \mathcal{L}_{n,k_1,k_2} \le \frac{1}{32}|I_1||I_2|. \tag{23}$$

Предложение 2. *При достаточно большом Q верно неравенство*

$$\mu\mathcal{L}_{n,n-1,n-1} \le \frac{1}{32}|I_1||I_2|.$$

Доказательство. Система (22) при $k_1 = k_2 = n - 1 = 2v$ имеет вид

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-v}, \\ |P(y)| < Q^{-v}, \\ n^{3/2}Q^{-\frac{2v-2}{4}} \le |P'(\alpha_1)| < Q^{-\frac{2v-3}{4}}, \\ n^{3/2}Q^{-\frac{2v-2}{4}} \le |P'(\beta_1)| < Q^{-\frac{2v-3}{4}}, \end{cases} \tag{24}$$

где $\deg P = n$.

Будем говорить, что многочлен P принадлежит прямоугольнику U, если внутри него существуют пары (x, y), для которых выполняются неравенства (24). Разделим прямоугольник $I_1 \times I_2$ на квадраты $U_{i,j} = U_i \times U_j$, $U_i \in I_1$, $U_j \in I_2$ со стороной $|U_i| = |U_j| = Q^{-u_1}$, $1 \le u \le \frac{v+1}{2}$. Рассмотрим такие квадраты $U_{i,j}$, каждому из которых принадлежит не более одного неприводимого многочлена с условиями (24). Обозначим через $u_1(P)$ множество пар $(x,y) \in S(\alpha_1) \times S(\beta_1)$, для которых выполняется (24). По лемме 1 имеем

$$\mu u_1(P) < 2^{2n-2}n^{-3}Q^{-(v+1)}.$$

Так как количество квадратов не превосходит $|I_1||I_2|Q^{2u}$, то

$$\sum_{U_{i,j}} \sum_{P\in U_{i,j}} \mu u_1(P) \leq 2^{2n-2} n^{-3} Q^{2u_1-(v+1)} |I_1||I_2| \leq \frac{1}{32}|I_1||I_2| \quad (25)$$

при достаточно большом Q.

Покажем, что два и более неприводимых многочлена не могут принадлежать одному квадрату $U_{i,j}$. Оценим значения $|P(x)|, |P(y)|$ при $(x, y) \in U_{i,j}$. По определению $P \in U_{i,j}$, существует пара (x_0, y_0), такая, что

$$|P(x_0)| < Q^{-v}, |P(y_0)| < Q^{-v}.$$

Тогда по лемме 1 $|x_0 - \alpha_1| < 2^{n-1} n^{-3/2} Q^{-\frac{v+1}{2}}$. Для любой точки $x_0 \in U_i$ выполняется неравенство

$$|x - \alpha_1| \leq |x - x_0| + |x_0 - \alpha_1| < Q^{-u} + 2^{n-1} Q^{-\frac{v+1}{2}} < 2Q^{-u}$$

для достаточно большого Q. Из разложения

$$P(x) = P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \frac{1}{2} P''(\xi_8)(x - \alpha_1)^2, \ \ \xi_8 \in (x, \alpha_1)$$

получаем

$$|P(x)| < 2Q^{-\frac{2v-3}{4} - u} + 4n^2 Q^{1-2u}.$$

Положим $u_1 = \dfrac{v+1}{2} - \gamma_1, \gamma_1 > 0$. Тогда при $Q > Q_0(\gamma_1)$ и достаточно малом γ_1

$$|P(y)| < 2Q^{-v+\frac{1}{4}+\gamma_1} + 4n^2 Q^{-v+2\gamma_1} < 4Q^{-v+\frac{1}{4}+\gamma_1}, \quad (26)$$

аналогично при $y \in U_j$

$$|P(x)| < 4Q^{-v+\frac{1}{4}+\gamma_1}. \quad (27)$$

Применим к двум многочленам, удовлетворяющим (26) и (27), лемму 3 с $\tau_1 = \tau_2 = v - \dfrac{1}{4} - \gamma_1, \eta_1 = \eta_2 = \dfrac{v+1}{2} - \gamma_1$. Получим неравенство

$$2(\tau_1 + 1 + 2(\tau_1 + 1 - \eta_1)) = 2\left(v + \frac{3}{4} - \gamma_1 + 2\left(v + \frac{3}{4} - \gamma_1 - \frac{v+1}{2} + \gamma_1\right)\right) =$$

$$= 4v + \frac{5}{2} - 2\gamma_1 = 2n + \frac{1}{2} - 2\gamma_1 < 2n + \delta_1,$$

которое противоречиво при $\gamma_1 = \delta = 0.1$.

Складывая оценки (23) и (25), получаем

$$\mu \bigcup_{\substack{2\le k_1\le n-1,\\ k_2\le k_1}} \mathcal{L}_{n,k_1,k_2} \le \frac{1}{16}|I_1||I_2| \qquad (28)$$

при достаточно большом Q.

Предложение 3. *Мера всех пар (x, y), для которых существует многочлен $P(x)$, такой, что верна следующая система неравенств*

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-v}, \\ |P(y)| < Q^{-v}, \\ min\{|P'(x)|, |P'(y)|\} < n^{3/2}Q^{-\frac{2v-2}{4}}, \end{cases}$$

не превосходит

$$\frac{1}{16}|I_1||I_2|. \qquad (29)$$

Доказательство данного предложения аналогично рассуждениям из [4, раздел 6].

Предложение 4. *Мера всех пар (x, y), для которых существует приводимый многочлен $P(x)$, такой, что верна следующая система неравенств*

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-v}, \\ |P(y)| < Q^{-v}, \\ min\{|P'(x)|, |P'(y)|\} < 4\delta_0 Q, \end{cases}$$

не превосходит

$$\frac{1}{16}|I_1||I_2|. \qquad (30)$$

Доказательство предложения 4 для многочленов степени $n \ge 3$ аналогично доказательству [4, раздел 7].

Складывая оценки (20), (28), (29), (30), мы окончательно получаем

$$\mu\mathcal{L}_n < \frac{1}{4}|I_1||I_2|,$$

что доказывает теорему 3.

Из теоремы 3, как в [5], получаем доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 мы получаем по индукции методом Бюжо [6].

Заключение

Таким образом, мы показали, что множество точек на плоскости с алгебраическими координатами и множество точек плоскости с целыми алгебраическими координатами произвольной степени образуют регулярные системы. Это позволяет находить оценки сверху и снизу размерности Хаусдорфа множества пар точек $(x,y) \in I_1 \times I_2$, для которых существует бесконечно много полиномов с целыми коэффициентами, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-v_1}, \\ |P(x)| < Q^{-v_2}, \\ H(P) = Q, \end{cases}$$

где $Q \in N, \deg P \leq n, v_1 + v_2 > n - 1$, I_1 и I_2 – некоторые интервалы в $\mathbb{R}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Baker, A.*** Diophantine approximation and Hausdor dimension / A. Backer, W. Scmidt. Proc. London Math. Soc., 21:3 (1970), 1–11.
2. ***Спринджук, В.Г.*** Проблема Малера в метрической теории чисел / В.Г. Спринджук. – Минск : Наука и техника, 1967.
3. ***Берник, В.И.*** Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений, Acta Arithm. 42:3 (1983), 219–253.
4. ***Берник, В.И.*** Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах / В.И. Берник, Ф. Гётце, Д.В. Коледа. – Минск, 2013.
5. ***Budarina, N.*** Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p-adic fields / N. Budarina, D. Dickinson, V. Bernik. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (2010), 149, 193.
6. ***Bugeaud, Y.*** Approximation by Algebraic Numbers / Y. Bugeaud. Tracts in Mathematics, 160, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, xvi+274 pp.

Поступила в редакцию 23.06.2014 г.