УДК 535.51

О.В. ВЕКО, Е.М. ОВСИЮК, В.М. РЕДЬКОВ

О 4-СПИНОРАХ ДЖОНСА ПОЛНОСТЬЮ ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА

Известное теоретико-групповое описание способов построения 4-тензоров из комплексного 4-спинора позволяет ввести определение для 4-спиноров Джонса для полностью поляризованного света и связать этот объект с 4-вектором и антисимметричным 4-тензором Стокса для такого света. Это обобщает известную в литературе ситуацию, когда для описания полностью поляризованного света используются, как правило, только 4-вектор Стокса и 2-мерные спиноры Джонса.

1. Введение и постановка задачи

Для аналитического описания состояния поляризации света используются 4 параметра Стокса [1]. При любом линейном оптическом процессе параметры Стокса падающего пучка линейно преобразуются в параметры Стокса вышедшего пучка с помощью матрицы Мюллера [2]; любой оптический элемент описывается своей матрицей Мюллера. Поляризация света может описываться также в рамках формализма Джонса [3-6]; при этом состояние поляризации света задается 2-мерным комплексным вектором, линейные оптические элементы описываются 2-мерными матрицами Джонса. В литературе обсуждается множество возможных типов матриц Мюллера [7]. В частности, теория матриц Мюллера недеполяризующих оптических систем развивалась в работах П.И. Ламекина [8-15]: были описаны собственные поляризации всех типов недеполяризующих оптических систем; в рамках формализма матриц Мюллера построена общая классификация недеполяризующих оптических систем; построены полярные формы матриц Мюллера недеполяризующих систем.

В последние годы много внимания уделяется другим аспектам теории матриц Мюллера. Известно, что при описании полностью или частично поляризованного света существенную роль может играть группа псевдоортогональных преобразований, изоморфная группе Лоренца. Это означает, что техника оперирования с преобразованиями Лоренца, хорошо развитая в релятивистской физике [16-19], может сыграть существенную эвристическую роль при анализе вопросов оптики поляризованного света. А.А. Богушем и другими были инициированы исследования теории матриц Мюллера с акцентом на их групповой структуре, в частности, на группе псевдоортогональных преобразований, изоморфных группе Лоренца [20-29]. При этом была описана общая факторизованная структура возможных матриц Мюллера, показана эффективность применения параметризации Федорова в теории матриц Мюллера лоренцевского типа, выполнен теоретико-групповой анализ степени неопределенности матрицы Мюллера оптического элемента из результатов одного поляризационного измерения, построена классификация возможных вырожденных матриц Мюллера с нулевым определителем.

Стоит отметить, что 2-мерный формализм Джонса пригоден только для описания полностью поляризованного света, в то время как формализм Стокса применим также и для описания частично поляризованного света. Следует обратить внимание на то, что 4-векторы Стокса полностью и частично поляризованного света являются аналогами изотропных и времениподобных 4-векторов в рамках специальной теории относительности.

В настоящей работе известная теоретико-групповая задача о способах построения 4-тензоров из комплексного 4-спинора переформулируется как задача о связях между 4-спинорным (типа Джонса) и тензорным (типа Стокса) описаниями поляризованного света. В данной работе мы ограничиваемся рассмотрением полностью поляризованного света (предварительный анализ проблемы был частично выполнен в [23]).

Исходим из разложения биспинора второго ранга $\Psi\otimes\Psi$ по тензорам [29]

$$U = \Psi \otimes \Psi = \left(-i\Phi + \gamma^b \Phi_b + i\sigma^{ab}\Phi_{ab} + \gamma^5 \tilde{\Phi} + i\gamma^b\gamma^5 \tilde{\Phi}_b\right) E^{-1}\,; \tag{1}$$

для матриц Дирака будем использовать спинорный базис. Обратные к (1) соотношения имеют вид:

$$\Phi_a = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}[\,E\gamma_a U\,], \qquad \tilde{\Phi}_a = \frac{1}{4i}\,\mathrm{Sp}[\,E\gamma^5\gamma_a U\,],$$

$$\Phi = \frac{i}{4}\,\mathrm{Sp}[\,EU\,],\ \ \tilde{\Phi} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}[\,E\gamma^5 U\,], \Phi^{mn} = -\frac{1}{2i}\,\mathrm{Sp}[\,E\sigma^{mn}U\,]. \tag{2}$$

Находим явный вид 4-вектора:

$$\Phi_0 = \frac{1}{2}(\xi^1\eta_{\dot 2} - \xi^2\eta_{\dot 1}), \qquad \Phi_1 = \frac{1}{2}(\xi^1\eta_{\dot 1} - \xi^2\eta_{\dot 2}),$$

$$\Phi_2 = \frac{i}{2}(\xi^1\eta_{\dot 1} + \xi^2\eta_{\dot 2}), \qquad \Phi_3 = -\frac{1}{2}(\xi^1\eta_{\dot 2} + \xi^2\eta_{\dot 1})\,; \tag{3}$$

4-псевдовектора и двух скаляров:

$$\tilde{\Phi}_a = 0, \qquad \Phi = 0, \qquad \tilde{\Phi} = 0 \tag{4}$$

и антисимметричного тензора:

$$\Phi^{01} = \frac{i}{4}(\xi^1\xi^1 - \xi^2\xi^2 + \eta_{\dot 1}\eta_{\dot 1} - \eta_{\dot 2}\eta_{\dot 2}), \qquad \Phi^{23} = \frac{1}{4}(\xi^1\xi^1 - \xi^2\xi^2 - \eta_{\dot 1}\eta_{\dot 1} + \eta_{\dot 2}\eta_{\dot 2}),$$

$$\Phi^{02} = -\frac{1}{4}(\xi^1\xi^1 + \xi^2\xi^2 + \eta_{\dot 1}\eta_{\dot 1} + \eta_{\dot 2}\eta_{\dot 2}), \qquad \Phi^{31} = -\frac{1}{4i}(\xi^1\xi^1 + \xi^2\xi^2 - \eta_{\dot 1}\eta_{\dot 1} - \eta_{\dot 2}\eta_{\dot 2}),$$

$$\Phi^{03} = -\frac{i}{2}(\xi^1\xi^2 + \eta_{\dot 1}\eta_{\dot 2}), \qquad \Phi^{12} = -\frac{1}{2}(\xi^1\xi^2 - \eta_{\dot 1}\eta_{\dot 2}). \tag{5}$$

Собирая результаты вместе, имеем

$$\Psi = \begin{vmatrix} \xi^{\alpha} \\ \eta_{\dot{\alpha}} \end{vmatrix}, \Psi \otimes \Psi \quad \Rightarrow \quad \Phi = 0\,, \tilde{\Phi} = 0\,, \tilde{\Phi}_a = 0\,, \Phi_a \neq 0\,, \Phi_{mn} \neq 0\,. \qquad (6)$$

Поскольку исходный 4-спинор определяется четырьмя комплексными величинами (восемью вещественными), то 10 величин в наборе $\Phi_a \neq 0\,, \Phi_{mn} \neq 0$ не могут быть независимыми – должны существовать дополнительных условия. Отмечаем также, чтобы в (6) иметь вещественные вектор и тензор, нужно накладывать дополнительные ограничения.

Рассмотрим ограничение следующего вида:

$$\underline{\eta^{(+)} = +i\,\sigma^2\,\xi^*} \quad \Rightarrow \quad \eta_{\dot{1}} = +\,\xi^{2*}\,,\ \eta_{\dot{2}} = -\,\xi^{1*}\,; \qquad (7)$$

что приводит к выражениям:

$$\Phi_0^+ = -\frac{1}{2}(\xi^1\xi^{1*} + \xi^2\xi^{2*}) < 0\,, \qquad \Phi_3^+ = \frac{1}{2}(\xi^1\xi^{1*} - \xi^2\,\xi^{2*})\,,$$

$$\Phi_1^+ = \frac{1}{2}(\xi^1\xi^{2*} + \xi^2\xi^{1*})\,, \qquad \Phi_2^+ = \frac{i}{2}(\xi^1\xi^{2*} - \xi^2\xi^{1*})\,; \qquad (8)$$

$$(\Phi^{01})^+ = \frac{i}{4}[\xi^1\xi^1 - \xi^2\xi^2 + \xi^{2*}\xi^{2*} - \xi^{1*}\xi^{1*})\,,$$

$$(\Phi^{23})^+ = \frac{1}{4}(\xi^1\xi^1 - \xi^2\xi^2 - \xi^{2*}\xi^{2*} + \xi^{1*}\xi^{1*})\,,$$

$$(\Phi^{02})^+ = -\frac{1}{4}(\xi^1\xi^1 + \xi^2\xi^2 + \xi^{2*}\xi^{2*} + \xi^{1*}\xi^{1*})\,,$$

$$(\Phi^{31})^+ = -\frac{1}{4i}(\xi^1\xi^1 + \xi^2\xi^2 - \xi^{2*}\xi^{2*} - \xi^{1*}\xi^{1*})\,,$$

$$(\Phi^{03})^+ = -\frac{i}{2}(\xi^1\,\xi^2 - \xi^{2*}\xi^{1*}), \qquad (\Phi^{12})^+ = -\frac{1}{2}(\xi^1\xi^2 + \xi^{2*}\xi^{1*})\,. \qquad (9)$$

Существует другая симметричная возможность дополнительных условий:

$$\eta^{(-)} = -i\,\sigma^2\,\xi^* \quad \Rightarrow \quad \eta_{\dot{1}} = -\xi^{2*}\,,\ \eta_{\dot{2}} = +\xi^{1*}\,; \qquad (10)$$

которая дает $\Phi_a^- = -\Phi_a^+\,, (\phi^{ab})^- = (\Phi^{ab})^+$.

2. Полностью поляризованный свет

Поскольку нулевая компонента 4-вектора Стокса равна интенсивности пучка света и должна быть положительной, случай (10) можно применять для описания стоксового 4-вектора и сопутствующего 4-тензора поляризации света:

$$\Psi = \begin{vmatrix} \xi \\ \eta = -i\sigma^2\xi^* \end{vmatrix}, \qquad \Psi \otimes \Psi \Rightarrow S_a \neq 0\,,\ S_{mn} \neq 0\,, \qquad (11)$$

$$S_0 = \frac{1}{2}(\xi^1\xi^{1*} + \xi^2\xi^{2*}) > 0\,, \qquad S_3 = -\frac{1}{2}(\xi^1\xi^{1*} - \xi^2\xi^{2*})\,,$$

$$S_1 = -\frac{1}{2}(\xi^1\xi^{2*} + \xi^2\xi^{1*})\,, \qquad S_2 = -\frac{i}{2}(\xi^1\xi^{2*} - \xi^2\xi^{1*})\,, \qquad (12)$$

$$a_1 = S^{01} = \frac{i}{4}\Big[(\xi^1\xi^1 - \xi^2\xi^2) + (\xi^{2*}\xi^{2*} - \xi^{1*}\xi^{1*})\Big],$$

$$b_1 = S^{23} = \frac{1}{4}\Big[(\xi^1\xi^1 - \xi^2\xi^2) - (\xi^{2*}\xi^{2*} - \xi^{1*}\xi^{1*})\Big],$$

$$a_2 = S^{02} = -\frac{1}{4}\Big[(\xi^1\xi^1 + \xi^2\xi^2) + (\xi^{2*}\xi^{2*} + \xi^{1*}\xi^{1*})\Big],$$

$$b_2 = S^{31} = -\frac{1}{4i}\Big[(\xi^1\xi^1 + \xi^2\xi^2) - (\xi^{2*}\xi^{2*} + \xi^{1*}\xi^{1*})\Big],$$

$$a_3 = S^{03} = -\frac{i}{2}(\xi^1\xi^2 - \xi^{2*}\xi^{1*})\,, \qquad b_3 = S^{12} = -\frac{1}{2}(\xi^1\xi^2 + \xi^{2*}\xi^{1*})\,. \qquad (13)$$

Для этого случая вычислим главный инвариант для 4-вектора

$$S_0 S_0 - S_j S_j = 0\,; \qquad (14)$$

следовательно, S_a может рассматриваться как стоксов 4-вектор для полностью поляризованного света. В свою очередь, сопутствующий 4-тензор S^{mn} нужно рассматривать как стоксов тензор поляризации для полностью поляризованного света.

Вычислим два инварианта тензора S^{mn}:

$$I_1 = -\frac{1}{2}\, S^{mn}S_{mn} = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = 0\,, \qquad I_2 = \frac{1}{4}\,\varepsilon_{abmn}S^{ab}S^{mn} = \mathbf{ab} = 0\,. \qquad (15)$$

Для дальнейшего удобно ввести следующую параметризацию исходного биспинора Джонса Ψ с помощью четырех вещественных величин:

$$\Psi = \begin{vmatrix} N\,e^{i\alpha} \\ +M\,e^{i\beta} \\ -M\,e^{-i\beta} \\ N\,e^{-i\alpha} \end{vmatrix}, \qquad \Psi \otimes \Psi \Rightarrow S_a \neq 0,\ S_{mn} \neq 0\,. \qquad (16)$$

Тогда из (12) следуют формулы для 4-вектора Стокс в виде:

$$S_0 = M^2 + N^2\,, \qquad S_3 = M^2 - N^2\,,$$

$$S_1 = -2MN\cos(\alpha - \beta)\,, \qquad S_2 = 2MN\sin(\alpha - \beta)\,; \qquad (17)$$

т.е. изотропный вектор Стокса зависит только от трех параметров $M, N, \alpha - \beta$; четвертый параметр $(\alpha + \beta)$ может быть любым – он не влияет на явный вид 4-вектора Стокса:

$$\Psi = \left| \begin{array}{cccc} e^{+i(\alpha+\beta)/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{+i(\alpha+\beta)/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\alpha+\beta)/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i(\alpha+\beta)/2} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} N\, e^{+i(\alpha-\beta)/2} \\ +M\, e^{-i(\alpha-\beta)/2} \\ -M\, e^{+i(\alpha-\beta)/2} \\ N\, e^{-i(\alpha-\beta)/2} \end{array} \right|$$

или кратко

$$\Psi = e^{i\gamma_5(\alpha+\beta)/2}\, \Psi^{(0)} . \qquad (18)$$

Выражения для компонент 4-вектора Стокса определяются полностью только 4-спинором $\Psi^{(0)}$. Обратные к (22) формулы выглядят так:

$$M = \sqrt{\frac{S_0 + S_3}{2}}\,, \qquad N = \sqrt{\frac{S_0 - S_3}{2}}\,, \qquad e^{i(\alpha-\beta)} = \frac{-S_1 + iS_2}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}. \qquad (19)$$

Найдем в этой параметризации явный вид 4-тензора Стокса:

$$a_1 = -\frac{1}{2}(N^2 \sin 2\alpha - M^2 \sin 2\beta)\,, \qquad b_1 = +\frac{1}{2}(N^2 \cos 2\alpha - M^2 \cos 2\beta)\,,$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}(N^2 \cos 2\alpha + M^2 \cos 2\beta)\,, \qquad b_2 = -\frac{1}{2}(N^2 \sin 2\alpha + M^2 \sin 2\beta)\,,$$

$$a_3 = +NM \sin(\alpha+\beta)\,, \qquad b_3 = -NM \cos(\alpha+\beta)\,. \qquad (20)$$

Легко убеждаемся в справедливости равенств

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \frac{(N^2 + M^2)^2}{4}\,, \qquad \mathbf{ab} = 0\,,$$

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \frac{(N^2 + M^2)^2}{2}\,, \qquad a_3^2 + b_3^2 = M^2 N^2\,. \qquad (21)$$

Эти соотношения позволяют найти величины M, N:

$$M^2 = +\sqrt{\frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}{2}} \pm \sqrt{\frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}{2} - \sqrt{a_3^2 + b_3^2}}\,,$$

$$N^2 = +\sqrt{\frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}{2}} \mp \sqrt{\frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}{2} - \sqrt{a_3^2 + b_3^2}}\,; \qquad (22)$$

обращаем внимание на существование двух разных решений. Если сопоставить эти формулы с (19), то понятно, что решения $M > N$ соответствуют положительным $S_3 > 0$, а решения $M < N$ соответствуют отрицательным $S_3 < 0$.

Полезно ввести комплексный 3-вектор Стокса $\mathbf{s} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$:

$$s_1 = a_1 + ib_1 = \frac{i}{2}(\xi^1\, \xi^1 - \xi^2\, \xi^2)\,,$$

$$s_2 = a_2 + ib_2 = -\frac{1}{2}(\xi^1\,\xi^1 + \xi^2\,\xi^2)\,, s_3 = a_3 + ib_3 = -i\,\xi^1\,\xi^2\,; \qquad (23)$$

он преобразуется как 3-вектор относительно комплексной группы вращений $SO(3.C)$. Это означает, что в дополнение к спинорной технике Джонса и мюллеровского векторного формализма, можно применять и комплексный 3-мерный векторный формализм, базирующийся на группе $SO(3.C)$. Из (23) следуют равенства

$$s_1 + is_2 = -i\,\xi^2\xi^2, \qquad s_1 - is_2 = +i\,\xi^1\xi^1, \qquad s_3 = -i\ \xi^1\,\xi^2\,; \qquad (24)$$

в параметризации (16) они выглядят так:

$$s_1 + is_2 = -i\,M^2 e^{2i\beta}\,, \qquad s_1 - is_2 = +i\,N^2 e^{2i\alpha}, \qquad s_3 = -i\ \ MNe^{i(\alpha+\beta)}\,; \qquad (25)$$

т.е.

$$e^{i\alpha} = \pm\sqrt{\frac{-s_2 - is_1}{N^2}}\,, \qquad e^{i\beta} = \pm\sqrt{\frac{-s_2 + is_1}{M^2}}\,. \qquad (26)$$

Отметим два соотношения

$$\frac{s_1 - is_2}{s_1 + is_2} = -\frac{N^2}{M^2}\,e^{2i(\alpha-\beta)}\,, \qquad e^{i(\alpha+\beta)} = \frac{i}{MN}\,s_3\,. \qquad (27)$$

Втрое соотношение в (27) означает, что вместе с ненаблюдаемым физически фактором $e^{i(\alpha+\beta)}$ также ненаблюдаемым является фаза комплексной величины s_3.

Выражения для M, N из (22) можно представить в более краткой форме:

$$M^2 = +\sqrt{\frac{\mathbf{ss}^*}{2}} \pm \sqrt{\frac{\mathbf{ss}^*}{2} - \sqrt{s_3 s_3^*}}\,, \qquad N^2 = +\sqrt{\frac{\mathbf{ss}^*}{2}} \mp \sqrt{\frac{\mathbf{ss}^*}{2} - \sqrt{s_3 s_3^*}}\,. \qquad (28)$$

Формулы говорят о том, что при заданном 4-векторе Стокса (есть процедура измерения его компонент) он однозначно фиксируется параметрами $N, M, \Delta = \alpha - \beta$, но при этом может существовать множество различных сопутствующих 4-тензоров Стокса, и свобода в их выборе определяется параметром $\alpha + \beta$. Другими словами, измеренный 4-вектор Стокса фиксирует у 4-спинора Джонса только три параметра из четырех, соответственно существует множество 4-векторов Стокса, ограниченных этой дополнительной однопараметрической неопределенностью в 4-спиноре Джонса.

Наиболее простой выбор частного случая 4-тензора Джонса достигается при $\beta = -\alpha$:

$$\Psi^{(0)} = \begin{vmatrix} N\,e^{+i\alpha} \\ +M\,e^{-i\alpha} \\ -M\,e^{+i\alpha} \\ N\,e^{-i\alpha} \end{vmatrix}, \qquad (29)$$

$$a_1^{(0)} = -\frac{1}{2}(N^2 + M^2)\sin 2\alpha\,, \qquad b_1^{(0)} = +\frac{1}{2}(N^2 - M^2)\cos 2\alpha\,,$$

$$a_2^{(0)} = -\frac{1}{2}(N^2 + M^2)\cos 2\alpha\,, \qquad b_2^{(0)} = -\frac{1}{2}(N^2 - M^2)\sin 2\alpha\,,$$

$$a_3^{(0)} = 0\,, \qquad b_3^{(0)} = -NM\,, \qquad s_3 = -iMN\,. \tag{30}$$

Зависимость тензора Стокса от дополнительного параметра $\alpha + \beta$ можно пояснить, обратившись к формулам (2)

$$\Phi_a = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}[\,E\gamma_a U\,]\,, \qquad \Phi^{mn} = -\frac{1}{2i}\,\mathrm{Sp}[\,E\sigma^{mn} U\,]\,.$$

Ниже используем обозначения $\sigma = (\alpha + \beta)/2$, $\exp[i\gamma^5\sigma] = \Gamma_\sigma$. С учетом симметричности матриц γ^5 и Γ_σ получаем

$$S_a = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}[\,E\gamma_a(\Gamma_\sigma\Psi^0 \otimes \Gamma_\sigma\Psi^0)\,] = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}[\,\Gamma_\sigma E\gamma_a\Gamma_\sigma(\Psi^0 \otimes \Psi^0)\,]\,,$$

$$S^{mn} = -\frac{1}{2i}\,\mathrm{Sp}[\,E\sigma^{mn}(\Gamma_\sigma\Psi^0 \otimes \Gamma_\sigma\Psi^0)\,] = -\frac{1}{2i}\,\mathrm{Sp}[\,\Gamma_\sigma E\sigma^{mn}\Gamma_\sigma(\Psi^0 \otimes \Psi^0)\,]\,.$$

Учитывая антикоммутируемость матрицы γ^5 с γ_a и коммутируемость с E, находим:

$$S_a = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}[\,\Gamma_\sigma\Gamma_\sigma^{-1}E\gamma_a(\Psi^0 \otimes \Psi^0)\,] = \Phi_a^{(0)}\,,$$

$$S^{mn} = -\frac{1}{2i}\,\mathrm{Sp}[\,\Gamma_\sigma\Gamma_\sigma E\sigma^{mn}(\Psi^0 \otimes \Psi^0)\,]\,. \tag{31}$$

Отсюда с учетом $\Gamma_\sigma\Gamma_\sigma = \Gamma_{2\sigma}$, имеем

$$S^{mn} = -\frac{1}{2i}\,\mathrm{Sp}[\,\Gamma_{2\sigma}E\sigma^{mn}(\Psi^0 \otimes \Psi^0)\,] \neq (\Phi^{mn})^{(0)}\,,$$

$$(S^{mn})^{(0)} = -\frac{1}{2i}\,\mathrm{Sp}[\,E\sigma^{mn}(\Psi^0 \otimes \Psi^0)\,]\,. \tag{32}$$

Отметим следующее: исходный 4-спинор в (1) определяется 4 независимыми комплексными параметрами (или 4 комплексными функциями). Соответствующие ему тензоры содержат 4 + 6 = 10 параметров; условия изотропности комплексного 4-вектора и тензора накладывают дополнительные условия, но их явно недостаточно, чтобы оставить только 4 независимых величины. Можно показать, что тензорное условие связи

$$S^{ab}S_b = 0 \tag{33}$$

эквивалентно следующему

$$S_0\,\mathbf{a} = \mathbf{S} \times \mathbf{b}\,. \tag{34}$$

Построенные выше релятивистские 4-спиноры Джонса являются обобщением нерелятивистских 2-мерных спиноров Джонса, которые обычно применяются в литературе.

Возможность введения комплексных 4-спиноров Джонса для частично поляризованного света в аналогичном подходе будет детально исследована в отдельной работе (частичный анализ этой проблемы приведен в [23]).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Stokes, G.G.*** On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources / G.G. Stokes // Trans. Cambridge Phil. Soc. – 1852. – Vol. 9. – P. 399–416.
2. ***Mueller, H.*** Memorandum on the polarization optics of the photo-elestic shutter; Report № 2 of the OSRD project OEMsr576, Boston, MA, USA, 1943.
3. ***Jones, R.C.*** New calculus for the treatment of optical systems. I. Description and discussion of the calculus / R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 488–493.
4. ***Hurwitz, H.*** A new calculus for the treatment of optical systems. II. Proof of three general equivalence theorems / H. Hurwitz, R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 493–499.
5. ***Jones, R.C.*** A new calculus for the treatment of optical systems. III. The Sohncke Theory of optical activity / R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 500–503.
6. ***Jones, R.C.*** A new calculus for the treatment of optical systems, IV / R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1942. – Vol. 32. – P. 486–493.
7. ***Снопко, В.Н.*** Поляризационные характеристики оптического излучения и методы их измерения / В.Н. Снопко. – Минск : Наука и техника, 1992. – 334 с.
8. ***Lamekin, P.I.*** Intrinsic polarization states of corner reflectors / P.I. Lamekin // Sov. J. Opt. Tech. – 1987. – Vol. 54. P. 658–661.
9. ***Ламекин, П.И.*** Необходимые и достаточные условия недеполяризуемости оптических систем / П.И. Ламекин // Оптика и спектроскопия. – 1996. – Т. 81, вып. 1. – С. 164–168.
10. ***Ламекин, П.И.*** Преобразование степени поляризации излучения оптическими системами / П.И. Ламекин // Оптический журнал. – 1997. – № 6. – С. 50–55.
11. ***Lamekin, P.I.*** Polar forms of Mueller matrices of nondepolarizing optical systems / P.I. Lamekin // Optics and Spectroscopy. – 2000. – Vol. 88. – № 5. – P. 737–742.
12. ***Lamekin, P.I.*** Polarization Eigenstates of Nondepolarizing Optical Systems / P.I. Lamekin // Optics and Spectroscopy. – 2001. – Vol. 91. – № 5. – P. 741–748.
13. ***Lamekin, P.I.*** Formalism of Mueller matrices and its application to calculation of phase-shifting devices / P.I. Lamekin, Yu.V. Sivaev, K.G. Predko // Optics of Crystals: Proceedings of SPIE / V.V. Shepelevich, N.N. Egorov (Eds.). – 2000. – Vol. 4358. – P. 289–293.
14. ***Lamekin, P.I.*** Mueller matrices of nondepolarizing optical systems: the theory and a new method of determination / P.I. Lamekin // Optics of Crystals:

Proceedings of SPIE / V.V. Shepelevich, N.N. Egorov (Eds.). – 2000. – Vol. 4358. – P. 294–302.
15. ***Ламекин, П.И.*** Кратные собственные значения и собственные состояния поляризации матриц Мюллера частичных поляризаторов / П.И. Ламекин // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 5(8). – С. 128–132.
16. ***Федоров, Ф.И.*** Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1958. – 380 с.
17. ***Федоров, Ф.И.*** Теория гиротропии / Ф.И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1976. – 456 с.
18. ***Федоров, Ф.И.*** Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
19. ***Березин, А.В.*** Кватернионы в релятивистской физике / А.В. Березин, Ю.А. Курочкин, Е.А. Толкачев. – Минск : Наука и техника, 1989. – 211 с.
20. ***Bogush, A.A.*** On Unique Parametrization of the Linear Group and Its Subgroups by Using the Dirac Algebra Basis / A.A. Bogush, V.M. Red'kov // NPCS. – 2008. – Vol. 11. – № 1. – P. 1–24
21. Бикватерионы и матрицы Мюллера / А.А. Богуш [и др.] // Доклады НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51. – № 5. – С. 71–76.
22. ***Богуш, А.А.*** Матрицы Мюллера в поляризационной оптике / А.А. Богуш // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 96–102 .
23. ***Red'kov, V.M.*** Lorentz group and polarization of the light / V.M. Red'kov // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2011. – Vol. 21. – P. 203–220.
24. ***Овсиюк, Е.М.*** Транзитивность в теории группы трехмерных вращений и формализм Стокса-Мюллера в поляризационной оптике / Е.М. Овсиюк // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаучыя навукі : матэматыка, фізіка, біялогія. – 2011. – № 1(37). – С. 69–75.
25. ***Редьков, В.М.*** Транзитивность в теории группы Лоренца и формализм Стокса-Мюллера в поляризационной оптике / В.М. Редьков, Е.М. Овсиюк // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка, матэматыка. – 2012. – № 1. – С. 18–23.
26. ***Овсиюк, Е.М.*** О нахождении параметров матриц Мюллера лоренцевского типа по результатам поляризационных измерений / Е.М. Овсиюк // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2012. – № 2(40). – С. 59–71.
27. ***Овсиюк, Е.М.*** Полугруппы Мюллера ранга 1 и 2. / Е.М. Овсиюк, О.В. Веко, В.М. Редьков // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2(11). – С. 34–40.
28. ***Ovsiyuk, E.M.*** Degenerate 4-dimensional matrices with semi-group structure and polarization optics / E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // XLVIII Всероссийская конференция по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники посвящается 100-летию профессора Терлецкого Я.П. Россия, г. Москва, 15-18 мая 2012 г. // Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика. 2012.
29. ***Редьков, В.М.*** Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск : Белорусская наука, 2009. – 495 с.

Поступила в редакцию 08.11.2012 г.