УДК 517.925.42

И.Н. СИДОРЕНКО

О СУЩЕСТВОВАНИИ ДВУКРАТНОГО ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА В СИСТЕМЕ ЛЬЕНАРА

Одной из фундаментальных задач качественной теории является задача нахождения максимального числа предельных циклов с учетом их взаимного расположения. При этом актуальной является задача нахождения систем, у которых возможны кратные предельные циклы. В связи с этой задачей рассматривается система Льенара с линейной силой упругости и потенциалом силы трения в виде полинома пятой степени. Целью работы является получение оценки параметра, при котором рассматриваемая система имеет двукратный предельный цикл. Предложен алгоритм определения верхней и нижней границ значений параметра системы Льенара, при котором наблюдается бифуркация рождения (исчезновения) двукратного предельного цикла.

Введение

Задача оценки максимального числа предельных циклов известна как вторая часть шестнадцатой проблемы Гильберта [1]. Методы качественного исследования динамических систем, использующие теорию бифуркаций для получения полной картины должны определить: множество всех бифуркационных значений параметров (или доказать их отсутствие); область значений этих параметров; качественную структуру динамической системы при каких-либо частных значениях параметров. На основании этих сведений, используя соображения непрерывности, можно определить качественную структуру для любой точки во всем пространстве параметров изучаемой системы [2]. Однако использование теории бифуркаций не всегда является эффективным. В простейших случаях, связанных с оценкой числа предельных циклов, рождающихся из особой точки типа негрубого фокуса или от петли сепаратрисы, теория бифуркаций дает ответ, исходя из условий устойчивости фокуса или устойчивости петли и характера поворота векторного поля системы при изменении параметра. В тех случаях, когда наблюдаются сложные бифуркации, требующие сведения о глобальном поведении траекторий, связанных с вопросами существования сепаратрис, идущих из седла в седло, а также рождением полуустойчивых предельных циклов из сгущения траекторий, однозначный ответ удается получить очень редко. Обычно в таких случаях удается оценить количество предельных циклов с точностью до их четного числа.

Целью работы является получение оценки параметра, при котором система Льенара пятой степени с линейной восстанавливающей силой имеет двукратный предельный цикл.

2. Предварительные результаты

Для точной оценки числа предельных циклов используется функция Дюлака-Черкаса.

Определение. *Функция* $\Psi(x,y)\in C^1(\Omega)$ *называется функцией Дюлака-Черкаса для системы*

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\ \frac{dy}{dt}=Q(x,y), \tag{1}$$

$$P(x,y),Q(x,y)\in C^1(\Omega),$$

в области $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, *если существует такое действительное число* $k\neq 0$, *что справедливо неравенство*

$$\Phi=k\Psi\ div\,\varphi+\frac{\partial\Psi}{\partial x}P+\frac{\partial\Psi}{\partial y}Q>0(<0),\ \forall(x,y)\in\Omega,\ \varphi=(P,Q). \tag{2}$$

Справедлива

Теорема 1.[3,4] *Пусть в односвязной области* $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ *система* (1) *имеет единственную особую точку – антиседло* A, $div\,\varphi(A)\neq 0$, $\varphi=(P,\ Q)$. *Пусть также для системы* (1) *существует функция Дюлака-Черкаса* $\Psi(x,y)\in C^1(\Omega)$, *при этом уравнение* $\Psi(x,y)=0$ *определяет гнездо из* q *вложенных друг в друга овалов. Тогда в каждой из* $q-1$ *двусвязных областей, ограниченных соседними овалами, система* (1) *имеет точно один предельный цикл, а в целом в области* Ω *не более* q *предельных циклов.*

Известно [4], что для системы Льенара

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x),\ \frac{dy}{dt}=-g(x) \tag{3}$$

в полосе $\Omega_x=\{(x,y):x\in[\alpha,\beta],y\in\mathbb{R}\}$ функцию Дюлака-Черкаса Ψ всегда можно найти в виде многочлена переменной y степени $n-1$, т.е.

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(x) y^{n-i}$$

такую, что соответствующая функция Φ из (2) зависит только от x. При этом функция Φ является линейной комбинацией функций переменной x,

$$\Phi = \Phi(x, C) = \sum_{j=1}^{n} C_j \Phi_j(x), \; C = (C_1, C_2, ..., C_n). \tag{4}$$

Для существования положительной на отрезке $[\alpha, \beta]$ функции Φ в семействе (4) необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$L = \max_{|C_j| \le 1} \min_{x \in [\alpha, \beta]} \Phi(x, C) > 0. \tag{5}$$

Максимин (5) можно приближенно найти, решив соответствующую задачу оптимизации

$$\Phi(x_i, C) \ge L, \; L \to \max, \; |C_j| \le 1 \tag{6}$$

на сетке узлов $x_i \in [\alpha, \beta]$, $i = \overline{1, N0}$, сведя ее к стандартной задаче линейного программирования. Выбор сетки узлов, числа $k < 0$ и числа n осуществляется в соответствии с конкретной задачей.

Основная часть

3. Оценка бифуркационного значения параметра

Рассмотрим классическую систему Льенара пятой степени

$$\frac{dx}{dt} = y - \varepsilon\left(x^5 + a_3 x^3 + a_1 x\right), \; \frac{dy}{dt} = -x, \tag{7}$$

где $\varepsilon > 0$, a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$. В работе [5] показано, что максимальное число предельных циклов для системы (7) равно двум. В работе [6] предложены критерии существования и отсутствия предельных циклов у систем Льенара (3) с линейной восстанавливающей силой ($g(x) = x$) и потенциалом трения в виде полинома, в котором отсутствуют мономы с четными степенями. В частности, в работе [6] доказана

Теорема 2. [6] *Система (7) при* $\varepsilon = 1$ *и* $a_3 = 2.17$ *имеет точно два предельных цикла.*

Отметим некоторые общие результаты известные для системы Льенара (7), полученные при помощи исследования нулей интегралов Абеля:

1) Для $\varepsilon > 0$ в работе [5] доказано, что система (7) имеет два предельных цикла, если $a_3 < -2.5$.

2) Альсхольм [7] доказал, что при $a_3 < -2.3178$ система имеет два предельных цикла.

3) Одани [8] уточнил результат Альсхольма: $a_3 < -\sqrt{5} \approx 2.23607$.

Рассмотрим систему Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y - \varepsilon\left(x^5 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x\right), \; \frac{dy}{dt} = -x \tag{8}$$

и применим для ее исследования метод функций Дюлака-Черкаса. Параметр a_3 в системе (8) является параметром, поворачивающим векторное поле. Получим оценки для параметра a_3, при котором система (8) имеет двукратный предельный цикл.

Зафиксируем параметры $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$. Тогда для системы (8) можно определить функцию Андронова-Хопфа $a_3 = AH(x)$, равную тому значению параметра a_3, при котором система (8) имеет предельный цикл, проходящий через точку $(x, 0)$. Используя гипотезу Смейла для рассматриваемой системы, можно определить прогнозную функцию Андронова-Хопфа $a_3 = AHp(x)$ [9], равную тому значению параметра a_3, при котором нечетная часть функции $F(x)$ имеет положительный корень. Прогнозная функция Андронова-Хопфа в известных ситуациях дает нужное приближение функции $a_3 = AH(x)$ (рисунок 1) и определяется уравнением

$$a_3 = \frac{1 - x^4}{x^2}.$$

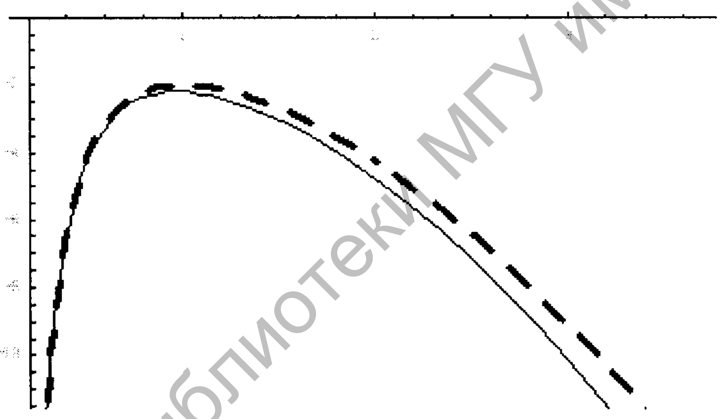

Рис. 1. Реальная и прогнозная (изображена пунктиром) функции Андронова-Хопфа для системы (8)

Для решения поставленной задачи, выберем значение параметра a_3, при котором система (8) имеет два предельных цикла. Такое значение можно выбрать, используя построенную функцию Андронова-Хопфа (рисунок 1). Далее увеличиваем значение параметра a_3 с некоторым шагом до тех пор, пока для доказательства существования двух предельных циклов применима функция Дюлака-Черкаса. В результате получается нижняя граница для значения бифуркационного параметра a_3. Затем выбираем значения a_3 таким образом, чтобы система (8) не имела предельных циклов и уменьшаем, его до тех пор, пока для доказательства отсутствия предельных циклов у рассматриваемой системы применим метод функций Дюлака-Черкаса. Полученное значение будет являться верхней границей для значения параметра a_3.

Справедлива

Теорема 3. *Система (8) имеет точно два предельных цикла при* $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = -2.13$, $\varepsilon = 0.1$ *в полосе* $\Omega_x = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-2,2],\ y \in \mathbb{R}\}$.

Доказательство. Будем искать функции $\Phi(x,C)$, $\Psi(x,y,C)$ при $n = 14$, $k = -5/4$ на равномерной сетке $x_i \in [-2,\ 2]$, $i = \overline{1,901}$. Для этого решим соответствующую задачу оптимизации

$$\Phi(x_i, C) \ge L,\ \ L \to \max,\ |C_j| \le 1,\ i = \overline{1,\ 901},\ j = \overline{1,14}. \qquad (9)$$

В результате найдем решение задачи (9) (C^*, L^*), при этом $L^* \approx 0.000036 > 0$, т.е. функция $\Phi(x, C^*)$ положительна при $x \in [-2;2]$, а уравнение $\Psi(x,\ y,\ C^*) = 0$ определяет в этой области два овала (рисунок 2). Таким образом, из теоремы 1 следует, что система (8) имеет точно два предельных цикла в полосе $x \in [-2;2]$.

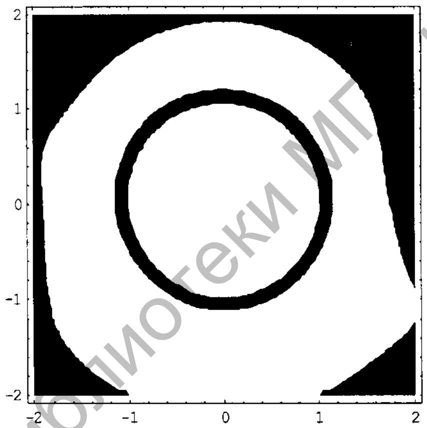

Рис. 2. Овалы кривой $\Psi = 0$ для системы (8) при $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = -2.13$, $\varepsilon = 0.1$

Теорема 4. *Система (8) не имеет предельных циклов при* $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = -2.05$, $\varepsilon = 0.1$.

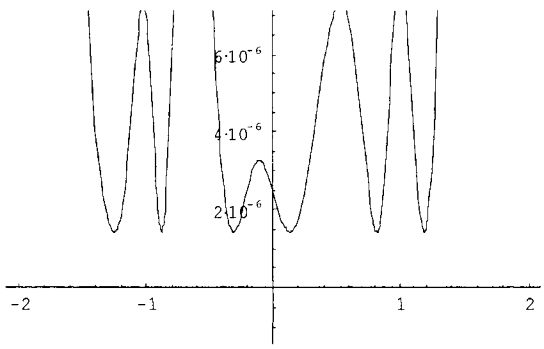

Рис. 3. График функции

Для доказательства отсутствия предельных циклов ищем функции $\Phi(x,C)$, $\Psi(x,y,C)$ при $n=9$, $k=-1$. Решая задачу (6) на равномерной сетке $x_i \in [-2;2]$, $i=\overline{1,1001}$, получаем, что $\Phi(x,C^*)>0$, для всех x, а уравнение $\Psi(x,y,C)=0$ не определяет овалов во всей плоскости, что по теореме 1 доказывает отсутствие предельных циклов у рассматриваемой системы.

Теорема 5. *Значение параметра a_3, при котором в системе Льенара (8) с $a_1=1$, $a_2=0.5$, $\varepsilon=0.1$ происходит бифуркация рождения (исчезновения) двукратного предельного цикла принадлежит промежутку* $(-2.05,-2.03)$.

Доказательство теоремы следует из теорем 3, 4 и предложенного алгоритма.

Заключение

Следует отметить, что применяемые в работах [5 – 8] методы и полученные критерии справедливы только в случае, если потенциал силы трения *F*(*x*) является нечетным полиномом 5-й степени, т.е. только для семейств систем Льенара (7). В то время, как метод функций Дюлака-Черкаса позволяет производить оценку числа предельных циклов и бифуркационных значений параметров систем Льенара в случае, когда *F*(*x*) является произвольным полиномом 5-й степени.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Hilbert, D.*** Mathematische probleme. English transl. / D. Hilbert / D. Bull. Amer. Math. Soc. – 1902. – Vol. 8. – P. 437–479.
2. ***Баутин, Н.Н.*** Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М. : Наука, 1976. – 496 с.
3. ***Черкас, Л.А.*** Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости / Л.А. Черкас // Дифференциальные уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 5. – С. 689–699.
4. ***Гринь, А.А.*** Функция Дюлака для систем Льенара / А.А. Гринь, Л.А. Черкас // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2000. – № 4. – С. 29–38.
5. ***Рычков, Г.С.*** Максимальное число предельных циклов системы $\dot{y}=-x, \dot{x}=y-\sum_{i=0}^{2} a_i x^{2i+1}$ равно двум / Г.С. Рычков // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11. – С. 155–171.
6. ***Gasul, A.*** New criteria for the existence and non-existence of limit cycles in Lienard differential systems / A. Gasul, H. Giacomini, J. Llibre // Dynamical Systems: An International Journal. – 2009. – V. 24. – N. 2. – P. 171–185.
7. ***Alsholm, P.*** Existence of limit cycles for generalized Lienard equations / P. Alsholm // J. Math. Anal. Appl. – 1992. – V. 171. – P. 242–255.
8. ***Odany, K.*** Existence of exactly N periodic solutions for Lienard systems / K. Odany // Funkcialaj Ekvacioj. – 1996. – V. 39. – P. 217–234.
9. ***Сидоренко, И.Н.*** Предельные циклы кубической системы Льенара с квадратичной функцией трения / И.Н. Сидоренко, Л.А. Черкас // Дифференциальные уравнения. – 2008. – № 2(44). – С. 217–221.

Поступила в редакцию 03.12.2012 г.