УДК 512.548

А.М. ГАЛЬМАК

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ВЕКТОР-МАТРИЦ

Получен положительный ответ на вопрос: существует ли в частичной l-арной полугруппе $<\mathbf{M}(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k}>$ всех k-компонентных вектор-матриц над ассоциативным коммутативным кольцом P с единицей l-арные подгруппы, элементы которых обладают компонентами, отличными от квадратных матриц. При получении ответа на этот вопрос используются σ-согласованные вектор-матрицы, так как ранее автором было установлено, что если подмножество $\mathbf{M}$ множества $\mathbf{M}(k, P)$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, то $<\mathbf{M}, [\ ]_{l,\sigma,k}>$ – l-арная подполугруппа l-арной полугруппы $<\mathbf{M}_{m_1\times n_1,\dots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{l,\sigma,k}>$ всех k-компонентных вектор-матриц размера $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ над P, согласованных с подстановкой σ.

1 Введение

Вектор-матрицей размера $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ над кольцом P называется [1, определение 1] всякий упорядоченный набор $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ матриц $A_1, \dots, A_k$ размеров $m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k$ с элементами из P. Вектор-матрица, у которой все компоненты $A_1, \dots, A_k$ – квадратные матрицы одного и того же порядка n называется [1] *квадратной* вектор-матрицей порядка n.

Множество всех k-компонентных вектор-матриц фиксированного размера $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ над P будем обозначать символом $\mathbf{M}_{m_1\times n_1,\dots,m_k\times n_k}(P)$. Для обозначения множества всех k-компонентных квадратных вектор-матриц порядка n над P вместо символа $\mathbf{M}_{n\times n,\dots,n\times n}(P)$ используется символ $\mathbf{M}_n(k, P)$.

Определение вектор-матрицы обобщает понятие m-адической (m-арной) матрицы Э. Поста [2], которую он определил как упорядоченный набор $m - 1$ квадратных матриц одного и того же порядка над полем комплексных чисел.

В [1, определение 4] для всех $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in S_k$ на множестве $\mathbf{M}(k, P)$ всех k-компонентных вектор-матриц над ассоциативным кольцом P определена частичная l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ и доказано [1, теорема 1] ее ассоциативность в случае тождественности подстановки σ^{l-1}. В этом случае подмножество $\mathbf{M}_n(k, P)$ множества $\mathbf{M}(k, P)$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, то есть универсальная алгебра $<\mathbf{M}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k}>$ является l-арной полугруппой [1, предложение 4].

Возникает единственный вопрос: *существуют ли в частичной l-арной полугруппе* $< \mathbf{M}(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *l-арные подполугруппы, элементы которых не обязаны быть квадратными вектор-матрицами*? Положительный ответ на этот вопрос получен в [3, теорема 4.1]. Для этого понадобилось ввести понятие σ-согласованной вектор-матрицы [3, определение 3.2].

Во множестве $\mathbf{M}_n(k, P)$, где P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, выделим подмножество $\mathbf{GL}_n(k, P)$ всех k-компонентных квадратных вектор-матриц порядка n над P, у которых все компоненты обратимы в кольце $\mathbf{M}_n(P)$. Ясно, что обратимость компонент в $\mathbf{M}_n(P)$ можно заменить обратимостью определителей этих компонент в P.

Если σ^{l-1} – тождественная подстановка, то множество $\mathbf{GL}_n(k, P)$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, а универсальная алгебра $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ является l-арной группой [4, теорема 4.2]. Информация об этой l-арной группе имеется также в [5].

Представляет интерес следующий вопрос: *существуют ли в частичной l-арной полугруппе* $< \mathbf{M}(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *l-арные подгруппы, элементы которых обладают компонентами, отличными от квадратных матриц*? В данной работе получен положительный ответ на этот вопрос.

Используются результаты из [1, 3 – 7].

Отметим, что после Э. Поста изучением многоместных операций на множествах упорядоченных наборов матриц над произвольным полем характеристики нуль занимался А.К. Слипенко [8, 9]. Среди изучавшихся им операций имеется и n-арная операция, которую Э. Пост определил на множестве всех упорядоченных наборов, состоящих из $n - 1$ квадратных матриц над полем комплексных чисел. По-видимому, автор работ [8, 9] не знал об этом, так как в указанных работах отсутствуют ссылки на Э. Поста.

2 ПОЛНАЯ ЛИНЕЙНАЯ И СПЕЦИАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

2.1 Определение [1, определение 4]. Если $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из S_k,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1},\ \ , A_{ik}),\ i = 1,\ \ , l$$

– k-компонентные вектор-матрицы над ассоциативным кольцом P такие, что для любого $j \in \{1,\ \ , k\}$ определено произведение

$$Y_j = A_{1j} A_{2\sigma(j)} \ldots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} A_{l\sigma^{l-1}(j)}, \tag{2.1}$$

то положим

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = \{Y_1, \ldots, Y_k\}. \tag{2.2}$$

l-Арную операцию (2.2) иногда для краткости будем называть l-арным произведением.

2.2 Замечание. Если в определении 2.1 все компоненты матриц $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_l$ являются матрицами 1-го порядка, то операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ определена на декартовой степени P^k. Таким образом, операцию $[\ ]_{l,\sigma,k}$ из определения 2.1 можно считать обобщением операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ из [6, 7].

Аналогично бинарному случаю, l-арное произведение (2.2) определено не всегда, а только в тех случаях, когда для любых соседних сомножителей в правой части (2.1), число столбцов предшествующего сомножителя совпадает с числом строк последующего сомножителя.

2.3 Теорема [1, теорема 1]. *Пусть*

$$\mathbf{A}_m = (A_{m1}, \dots , A_{mk}),\ m = 1, \dots , 2l - 1$$

– k-компонентные вектор-матрицы над P, σ – подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда, если для некоторого $i = 0, 1, \dots , l - 1$ определена k-компонентная вектор-матрица

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i[\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{i+l}]_{l,\sigma,k}\ \mathbf{A}_{i+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,k},$$

то для любого $j = 0, 1, \dots , l - 1$ определена k-компонентная вектор-матрица

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_j[\mathbf{A}_{j+1} \dots \mathbf{A}_{j+l}]_{l,\sigma,k}\ \mathbf{A}_{j+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,k},$$

и верно равенство

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i[\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{i+l}]_{l,\sigma,k}\ \mathbf{A}_{i+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,k} =$$
$$= [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_j[\mathbf{A}_{j+1} \dots \mathbf{A}_{j+l}]_{l,\sigma,k}\ \mathbf{A}_{j+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,k}.$$

Согласно теореме 2.3, если P – ассоциативное кольцо, а подстановка σ^{l-1} – тождественная, то на множестве $\mathbf{M}(k, P)$ определена частичная ассоциативная l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, то есть $\mathbf{M}(k, P)$, рассматриваемое вместе с этой l-арной операцией, является частичной l-арной полугруппой.

Из теоремы 2.3 вытекает

2.4 Предложение [1, предложение 4]. *Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< \mathbf{M}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – l-арная полугруппа.*

2.5 Теорема [4, теорема 4.2]. *Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет* условию $\sigma^l = \sigma$, то $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – *l-арная группа. В частности, $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{k+1,\ (12 \dots k),\ k} >$ – $(k + 1)$-арная группа.*

l-Арную группу $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ по аналогии с бинарным случаем естественно называть полной линейной l-арной группой, соответствующей данным k и σ.

Во множестве $\mathbf{GL}_n(k, P)$ выделим подмножество $\mathbf{SL}_n(k, P)$ всех k-компонентных вектор-матриц, у которых определитель каждой компоненты равен единице кольца P. Так как множество $\mathbf{SL}_n(k, P)$ совпадает с k-й декартовой степенью специальной линейной группы $\mathbf{SL}_n(P)$, то, применяя теорему 2.9.3 [7], получим следующий результат.

2.6 Предложение. *Если подстановка $\sigma \in S_k$* удовлетворяет условию *$\sigma^l = \sigma$, то множество $\mathbf{SL}_n(k, P)$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, а универсальная алгебра $< \mathbf{SL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ является l-арной группой.*

l-Арную группу $< \mathbf{SL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ по аналогии с бинарным случаем назовем специальной линейной l-арной группой, соответствующей данным k и σ.

3 σ-СОГЛАСОВАННЫЕ ВЕКТОР-МАТРИЦЫ

Для всякой подстановки $\sigma \in S_k$ положим:

$$\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_p \sigma_{p+1} \dots \sigma_q \qquad (3.1)$$

– разложение σ в произведение независимых циклов, где $\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_q$ – все циклы длины 1;

$$X_1 = \{i_{11}, \dots, i_{1l_1}\}, \dots, X_p = \{i_{p1}, \dots, i_{pl_p}\}, X_{p+1} = \{i_{p+1}\}, \dots, X_q = \{l_q\} \qquad (3.2)$$

– σ-орбиты, соответствующие циклам $\sigma_1, \dots, \sigma_p, \sigma_{p+1}, \dots, \sigma_q$. Длина цикла σ_r ($r = 1, \dots, q$) обозначается через l_r. В частности, $l_{p+1} = \dots = l_q = 1$.

3.1 Определение [3, определение 3.1]. Упорядоченный набор пар $((m_1, \dots n_1), \dots, (m_k, n_k))$ целых положительных чисел называется σ-*согласованным* или *согласованным с подстановкой* $\sigma \in S_k$, имеющей разложение (3.1), если:

1) для каждой орбиты $X_r = \{i_{r1}, \dots, i_{rl_r}\}$, где $r = 1, \dots, p$, и любого ее элемента i_{rs}, где $s = 1, \dots, l_r$, верны равенства

$$n_{i_{rs}} = m_{\sigma(i_{rs})},\ n_{\sigma(i_{rs})} = m_{\sigma^2(i_{rs})},\ \dots,\ n_{\sigma^{l_r-2}(i_{rs})} = m_{\sigma^{l_r-1}(i_{rs})},\ n_{\sigma^{l_r-1}(i_{rs})} = m_{i_{rs}}; \qquad (3.3)$$

2) $m_{i_{p+1}} = n_{i_{p+1}},\ \dots,\ m_{i_q} = n_{i_q}$.

3.2 Определение [3, определение 3.2]. Вектор-матрица размера $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ называется σ-*согласованной* или *согласованной с подстановкой* $\sigma \in S_k$, имеющей разложение (3.1), если набор $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ согласован с подстановкой σ.

3.3 Замечание. Если условие 1) определения 3.1 распространить на одноэлементные циклы, то для орбит $X_{p+1} = \{i_{p+1}\}, \dots, X_q = \{i_q\}$ равенства (3.3) примут вид

$$n_{\sigma^{l_{p+1}-1}(i_{p+1})} = n_{\sigma^{1-1}(i_{p+1})} = n_{\sigma^0(i_{p+1})} = n_{i_{p+1}} = m_{i_{p+1}},\ \dots$$

$$\dots,\ n_{\sigma^{l_q-1}(i_q)} = n_{\sigma^{1-1}(i_q)} = n_{\sigma^0(i_q)} = n_{i_q} = m_{i_q}.$$

Таким образом, в определении 3.1 можно обойтись без условия 2), если в условии 1) считать $r = 1, \dots, q$.

3.4 Замечание. Можно показать [3], что из выполнимости условия (3.3) для некоторого $i_{rs} \in X_r$ следует его выполнимость для любого $i_{rs} \in X_r$.

Один и тот же набор $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$, соответственно, одна и та же k-компонентная вектор-матрица размера $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ могут быть согласованы с различными подстановками. Например, набор $((m, n), (n, m), (m, n), (n, m))$, соответственно, 4-компонентная вектор-матрица $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ размера $(m \times n, n \times m, m \times n, n \times m)$ согласованы и с подстановкой $(12)(34) \in S_4$, и с подстановкой $(1234) \in S_4$.

Вектор-матрицы, согласованные с одной и той же подстановкой, могут иметь разные размеры. Мы будем рассматривать σ-согласованные вектор-матрицы фиксированного размера.

Ясно, что если набор $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ согласован с подстановкой $\sigma \in S_k$, то все вектор-матрицы из $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$ также согласованы с σ.

3.5 Теорема [3, теорема 4.1]. *Пусть P – ассоциативное кольцо, упорядоченный набор $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ согласован с подстановкой $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда множество $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l, \sigma, k}$, а универсальная алгебра $< \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [\ ]_{l, \sigma, k} >$ является l-арной полугруппой.*

3.6 Теорема [3, теорема 6.1]. *Пусть P – ассоциативное кольцо, σ – подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$,* $\mathbf{M}$ *– подмножество множества* $\mathbf{M}(k, P)$, замкнутое относительно l-арной операции $[\ ]_{l, \sigma, k}$. *Тогда универсальная алгебра $< \mathbf{M}, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ является l-арной подполугруппой l-арной полугруппы $< \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [\ ]_{l, \sigma, k} >$ для некоторого набора $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$, согласованного с подстановкой σ.*

Таким образом, согласно теореме 3.6, вопрос о существовании в частичной l-арной полугруппе $< \mathbf{M}(k, P), [\ ]_{l, \sigma, k} >$ l-арных подгрупп сводится к вопросу о существовании l-арных подгрупп в l-арной полугруппе, $< \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [\ ]_{l, \sigma, k} >$, где набор $((m_1, n_1, \dots, (m_k, n_k))$ согласован с подстановкой σ, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$.

4 ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей; $A_1, A_2, \dots, A_r$ $(r \geq 2)$ матрицы размеров $m_s \times n_s$ $(1 \leq s \leq r)$ над P, где

$$n_1 = m_2, \dots, n_{r-1} = m_r; \mu \leq \min\{m_1, n_1, \dots, n_r\}.$$

Пусть также в каждой матрице A_s все элементы в строках с номерами $\mu + 1, \dots, m_k$ и столбцах с номерами $\mu + 1, \dots, n_k$ равны нулю кольца P, то есть матрицы A_s имеют блочный вид $A_s = \begin{pmatrix} B_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $1 \leq s \leq r$, где блок B_s – квадратная подматрица порядка μ, остальные блоки – нулевые матрицы соответствующих размеров. При сделанных предположениях имеет место формула

$$A_1 A_2 \dots A_r = C = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

где

$$B_1 B_2 \dots B_r = D. \quad (4.2)$$

Положим $\mu \leq min\{m_1, n_1, \dots, m_k, n_k\}$ и выделим во множестве $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$ подмножество $\mathbf{M}^{(\mu)}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$ всех вектор-матриц вида

$$\mathbf{A} = \left(A_1 = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, A_k = \begin{pmatrix} B_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \quad (4.3)$$

где $B_1, \dots, B_k$ – квадратные матрицы порядка μ над P.

$$\mathbf{M}^{(\mu)} = \{\mathbf{A} = \left(\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} B_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) | \mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \ldots, m_k \times n_k}(P), B_1 \ldots B_k \in \mathbf{M}_\mu(P)\},$$

где для сокращения записей использовано обозначение $\mathbf{M}^{(\mu)} = \mathbf{M}^{(\mu)}_{m_1 \times n_1, \ldots, m_k \times n_k}(P)$, которое иногда будет употребляться, если из контекста ясно, о чем идет речь.

4.1 Предложение. *Пусть P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, набор $((m_1, n_1), ..., (m_k, n_k))$ согласован с подстановкой σ, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, $\mu \le \min\{m_1, n_1, ..., m_k, n_k\}$. Тогда множество $\mathbf{M}^{(\mu)}$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, а универсальная алгебра $< \mathbf{M}^{(\mu)}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ является l-арной полугруппой, изоморфной l-арной полугруппе $< \mathbf{M}_\mu(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$.*

Доказательство. Заметим, что по теореме 3.5 $< \mathrm{M}_{m_1 \times n_1, \ldots, m_k \times n_k}(P)$, $[\ ]_{l,\sigma,k} >$ – l-арная полугруппа. Пусть

$$\mathbf{A}_i = \left(A_{i1} = \begin{pmatrix} B_{i1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, A_{ik} = \begin{pmatrix} B_{ik} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \ i = 1, ..., l \tag{4.4}$$

– произвольные вектор-матрицы из $\mathbf{M}^{(\mu)}$,

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = (Y_1, ..., Y_k).$$

Согласно определению операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$,

$$Y_j = A_{1j}A_{2\sigma j} \ldots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}A_{l\sigma^{l-1}(j)},\ j = 1, ..., k.$$

Если учесть тождественность подстановки σ^{l-1}, то

$$Y_j = A_{1j}A_{2\sigma j} \ldots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}A_{lj},$$

откуда, учитывая (4.1) и (4.2), получаем $Y_j = \begin{pmatrix} D_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где

$$B_{1j}B_{2\sigma j} \ldots B_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}B_{lj} = D_j,\ j = 1, ..., k. \tag{4.5}$$

Ясно, что $D_j \in \mathbf{M}_\mu(P)$. Таким образом,

$$\mathbf{A} = \left(\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} D_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \in \mathbf{M}^{(\mu)}.$$

Следовательно, множество $\mathbf{M}^{(\mu)}$ замкнуто относительно l-арной операции, а универсальная алгебра $< \mathbf{M}^{(\mu)}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ является l-арной полугруппой.

Определим отображение $f\colon \mathbf{M}^{(\mu)} \to \mathbf{M}_\mu(k, P)$ по правилу

$$f\colon \mathbf{U} = \left(\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} V_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \to f(\mathbf{U}) = (V_1, ..., V_k).$$

Ясно, что f – биекция $\mathbf{M}^{(\mu)}$ на $\mathbf{M}_\mu(k, P)$. Так как

$$f([\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_k]_{l,\sigma,k}) = f(\mathbf{A}) = f(Y_1, \dots, Y_k) = (D_1, \dots, D_k) =$$
$$= (B_{11}B_{2\sigma(1)} \dots B_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)}B_{l1}, \dots, B_{1k}B_{2\sigma(k)} \dots B_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)}B_{lk}) =$$
$$= [(B_{11}, \dots, B_{1k}) \dots (B_{l1}, \dots, B_{lk})] = [f(\mathbf{A}_1) \dots f(\mathbf{A}_k)]_{l,\sigma,k},$$

то есть

$$f([\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_k]_{l,\sigma,k}) = [f(\mathbf{A}_1) \dots f(\mathbf{A}_k)]_{l,\sigma,k},$$

то f – изоморфизм l-арной полугруппы $< \mathbf{M}^{(\mu)}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ на l-арную полугруппу $< \mathbf{M}_\mu(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$. Предложение доказано.

Для всякого подмножества $\mathbf{F}$ полугруппы $\mathbf{M}_\mu(P)$ обозначим через $\mathbf{F}^{(\mu)}$ множество всех вектор-матриц из $\mathbf{M}^{(\mu)}$ вида (4.3), у которых подматрицы $B_1, \dots, B_k$ принадлежат $\mathbf{F}$.

4.2 Теорема. *Пусть P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, набор $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ согласован с подстановкой σ, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, $\mu \le min\{m_1, n_1, \dots, m_k, n_k\}$, $\mathbf{F}$ – подгруппа группы $\mathbf{GL}_\mu(P)$. Тогда множество $\mathbf{F}^{(\mu)}$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, а универсальная алгебра $< \mathbf{F}^{(\mu)}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ является l-арной группой, изоморфной l-арной группе $< \mathbf{F}^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ – произвольные вектор-матрицы из $\mathbf{F}^{(\mu)}$, имеющие вид (4.4); $\mathbf{A}$, $Y_1, \dots, Y_k$, $D_1, \dots, D_k$ – те же, что и в доказательстве предложения 4.1. Так как в левой части (4.5) все сомножители принадлежат группе $\mathbf{F}$, то $D_j \in \mathbf{F}$ для любого $j \in 1, \dots, k$. Таким образом, $[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = \mathbf{A} \in \mathbf{F}^{(\mu)}$, то есть множество $\mathbf{F}^{(\mu)}$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$.

Сужение отображения f из доказательства предложения 4.1 на $\mathbf{F}^{(\mu)}$ является биекцией на k-ую декартову степень $\mathbf{F}^k$. А так как по доказанному в предложении 4.1 f – изоморфизм $< \mathrm{M}^{(\mu)}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ на $< \mathrm{M}_\mu(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$, и, кроме того, согласно теореме 2.9.3 [7], $< \mathbf{F}^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – l-арная группа, то $< \mathbf{F}^{(\mu)}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – l-арная группа. Теорема доказана.

Утверждение теоремы 4.2 о том, что $< \mathbf{F}^{(\mu)}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – l-арная группа, было доказано с помощью изоморфизма f без использования какого-либо определения l-арной группы, то есть без нахождения решений соответствующих уравнений и вычисления косых элементов. Сделаем это.

Пусть $\mu \le \min\{m, n\}$, $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица размера $m \times n$ над ассоциативным коммутативным кольцом P с единицей. Блок B является квадратной матрицей порядка μ, определитель которой обратим в P, что равносильно обратимости B в $\mathbf{M}_\mu(P)$. Обозначим через $\hat{A}$ матрицу размера $n \times m$, имеющую вид $\hat{A} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ясно, что $A\hat{A}$ и $\hat{A}A$ – квадратные матрицы порядков m и n соответственно, имеющие вид $A\hat{A} = \begin{pmatrix} E_\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\hat{A}A = \begin{pmatrix} E_\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где E_μ – единичная матрица порядка μ.

4.3 Предложение. *Пусть P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, набор $((m_1, n_1), \ldots, (m_k, n_k))$ согласован с подстановкой σ, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, $\mu \le min\{m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k\}$, $\mathbf{F}$ – подгруппа группы $\mathbf{GL}_\mu(P)$. Тогда для любого $i = 1, \ldots, l$ и любых*

$$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{i-1}, \mathbf{A}_{i+1}, \ldots, \mathbf{A}_l, \mathbf{C} \in \mathbf{F}^{(\mu)}$$

в $\mathbf{F}^{(\mu)}$ однозначно разрешимо уравнение

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{i-1}\mathbf{X}\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = \mathbf{C}.$$

Доказательство. Пусть

$$\mathbf{C} = \left(\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} D_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$\mathbf{A}_s = \left(A_{s1} = \begin{pmatrix} B_{s1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, A_{sk} = \begin{pmatrix} B_{sk} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right),\ s = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, l.$$

Положим

$$\mathbf{X} = \left(X_1 = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, X_k = \begin{pmatrix} Y_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

где

$$X_{\sigma^{i-1}(j)} = \hat{A}_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)} \ldots \hat{A}_{2\sigma(j)} \hat{A}_{1j} C_j \hat{A}_{lj} \hat{A}_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} \ldots \hat{A}_{(i+1)\sigma^{i}(j)}$$

для любого $j = 1, \ldots, k$. Ясно, что $X \in \mathbf{F}^{(\mu)}$. Если

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{i-1}\mathbf{X}\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = (Z_1, \ldots, Z_k),$$

то

$$Z_j = A_{1j} A_{2\sigma(j)} \ldots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)} \hat{A}_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)} \ldots \hat{A}_{2\sigma(j)} \hat{A}_{1j} C_j$$

$$\hat{A}_{lj} \hat{A}_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} \ldots \hat{A}_{(i+1)\sigma^{i}(j)} A_{(i+1)\sigma^{i}(j)} \ldots A_{(l-1)\sigma^{i-2}(j)} A_{lj} = C_j.$$

Следовательно, $\mathbf{X}$ – решение искомого уравнения, которое в l-арной группе является единственным. Предложение доказано.

4.4 Предложение. *Пусть P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, набор $((m_1, n_1), \ldots, (m_k, n_k))$ согласован с подстановкой σ, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, $\mu \le min\{m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k\}$, $\mathbf{F}$ – подгруппа группы $\mathbf{GL}_\mu(P)$. Тогда для любой вектор-матрицы*

$$\mathbf{A} = \left(A_1 = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, A_k = \begin{pmatrix} B_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \in \mathbf{F}^{(\mu)}$$

в l-арной группе $< \mathbf{F}^{(\mu)}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ существует косая вектор-матрица

$$\overline{\mathbf{A}} = \left(U_1 = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, U_k = \begin{pmatrix} V_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right),$$

где $V_j = B^{-1}_{\sigma^{l-2}(j)}, \ldots, B^{-1}_{\sigma(j)}$.

Доказательство. Положим

$$[\overline{\mathbf{A}}\underbrace{\mathbf{A}\ \ldots \mathbf{A}}_{l-1}]_{l,\sigma,k} = \left(R_1 = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, R_k = \begin{pmatrix} S_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \in \mathbf{F}^{(\mu)}.$$

Тогда $R_j = U_j A_{\sigma(j)} \ldots A_{\sigma^{l-2}(j)} A_j$,откуда

$$S_j = V_j B_{\sigma(j)} \ldots B_{\sigma^{l-2}(j)} B_j = B^{-1}_{\sigma^{l-2}(j)} \ldots B^{-1}_{\sigma(j)} B_{\sigma(j)} B_{\sigma^{l-2}(j)} B_j = B_j,$$

то есть $S_j = B_j$. Следовательно, $R_j = A_j$, для любого $j = 1, \ldots, k$, откуда $[\overline{\mathbf{A}}\underbrace{\mathbf{A}\ \ldots \mathbf{A}}_{l-1}]_{l,\sigma,k} = \mathbf{A}$, а это означает, что $\overline{\mathbf{A}}$ косой элемент для $\mathbf{A}$. Предложение доказано.

5 СЛЕДСТВИЯ

Если d – порядок подстановки σ из S_k, то из теоремы 4.2 вытекает

5.1 Следствие. *Пусть P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, набор $((m_1, n_1), \ldots, (m_k, n_k))$ согласован с подстановкой $\sigma \in S_k$ порядка d, $\mu \le min\{m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k\}$, $\mathbf{F}$ – подгруппа группы $\mathbf{GL}_\mu(P)$. Тогда множество $\mathbf{F}^{(\mu)}$ замкнуто относительно $(d+1)$-арной операции $[\ ]_{d+1,\sigma,k}$, а универсальная алгебра $< \mathbf{F}^{(\mu)}, [\ ]_{d+1,\sigma,k} >$ является $(d+1)$-арной группой, изоморфной $(d+1)$-арной группе $< \mathbf{F}^k, [\ ]_{d+1,\sigma,k} >$.*

Считая в следствии 5.1 σ циклом длины k из S_k получим

5.2 Следствие. *Пусть P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, набор $((m_1, n_1), \ldots, (m_k, n_k))$* согласован с циклом $\sigma \in S_k$ длины k, *$\mu \le min\{m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k\}$, $\mathbf{F}$ – подгруппа группы $\mathbf{GL}_\mu(P)$. Тогда множество $\mathbf{F}^{(\mu)}$ замкнуто относительно $(k+1)$-арной операции $[\ ]_{k+1,\sigma,k}$, а универсальная алгебра $< \mathbf{F}^{(\mu)}, [\ ]_{k+1,\sigma,k} >$ является $(k+1)$-арной группой, изоморфной $(k+1)$-арной группе $< \mathbf{F}^k, [\ ]_{k+1,\sigma,k} >$.*

Полагая в следствии 5.2 $\sigma = (12 \ldots k)$, получим

5.3 Следствие. *Пусть P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, набор $((m_1, n_1), \ldots, (m_k, n_k))$ согласован с циклом $(12 \ldots k) \in S_k$, $\mu \le min\{m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k\}$, $\mathbf{F}$* – подгруппа группы $\mathbf{GL}_\mu(P)$. *Тогда множество $\mathbf{F}^{(\mu)}$ замкнуто относительно $(k+1)$-арной операции $[\ ]_{k+1,(12\ldots k),k}$, а универсальная алгебра $< \mathbf{F}^{(\mu)}, [\ ]_{k+1,(12\ldots k),k} >$ является $(k+1)$-арной группой, изоморфной $(k+1)$-арной группе $< \mathbf{F}^k, [\ ]_{k+1,(12\ldots k),k} >$.*

Полагая в следствии 5.3 $k = 2$, $m_1 = n_2 = m$, $n_1 = m_2 = n$, получим

5.4 Следствие. *Пусть P – ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, $\mu \le min\{m, n\}$, $\mathbf{F}$ – подгруппа группы $\mathbf{GL}_\mu(P)$. Тогда множество*

$\mathbf{F}^{(\mu)}$ *замкнуто относительно тернарной операции* $[\ ]_{3,\,(12),\,2}$, *а универсальная алгебра* $< \mathrm{F}\mathbf{F}^{(\mu)}, [\ ]_{3,\,(12),\,2} >$ *является тернарной группой, изоморфной тернарной группе* $< \mathbf{F}^2, [\ ]_{3,\,(12),\,2} >$.

Полагая в теореме 4.2 $\mathbf{F} = \mathbf{GL}_\mu(P)$, получим

5.5 Следствие. *Пусть P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, набор* $((m_1, n_1), ..., (m_k, n_k))$ *согласован с подстановкой* $\sigma \in S_k$, *удовлетворяющей условию* $\sigma^l = \sigma$, $\mu \le min\{m_1, n_1, ..., m_k, n_k\}$. *Тогда множество* $\mathbf{GL}_\mu^{(\mu)}(P)$ *замкнуто относительно l-арной операции* $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$, *а универсальная алгебра* $< \mathbf{GL}_\mu^{(\mu)}(P), [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ *является l-арной группой, изоморфной l-арной группе* $< \mathbf{GL}_\mu^{k}(P), [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$.

Полагая в теореме 4.2 $\mathbf{F} = \mathbf{SL}_\mu(P)$, получим

5.6 Следствие. *Пусть P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, набор* $((m_1, n_1), ..., (m_k, n_k))$ *согласован с подстановкой* $\sigma \in S_k$, *удовлетворяющей условию* $\sigma^l = \sigma$, $\mu \le min\{m_1, n_1, ..., m_k, n_k\}$. *Тогда множество* $\mathbf{SL}_\mu^{(\mu)}(P)$ *замкнуто относительно l-арной операции* $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$, *а универсальная алгебра* $< \mathbf{SL}_\mu^{(\mu)}(P), [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ *является l-арной группой, изоморфной l-арной группе* $< \mathbf{SL}_\mu^{k}(P), [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$.

Для каждого из следствий 5.5 и 5.6 можно сформулировать следствия, аналогичные следствиям 5.1 – 5.4.

Теорема 4.2 и следствия 5.1 – 5.6 устанавливают существование полиадических групп вектор-матриц, компоненты которых не обязаны быть квадратными матрицами, что является положительным ответом на вопрос, сформулированный в конце введения. Однако все эти полиадические группы изоморфны полиадическим группам вектор-матриц, у которых все компоненты являются квадратными вектор-матрицами одного и того же порядка. Поэтому закономерен следующий вопрос: *существуют ли полиадические группы вектор матриц, не изоморфные полиадическим группам вектор-матриц с квадратными компонентами*?

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10РА-002).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Гальмак, А.М.*** Вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2011. – № 1(37), Серия В. – С. 30–37.
2. ***Post, E.L.*** Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48. – № 2. – P. 208–350.
3. ***Гальмак, А.М.*** σ-Согласованные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2011. – № 2(38), Серия В. – С. 30–37.
4. ***Гальмак, А.М.*** Транспонированные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1(6). – С. 52–56.
5. ***Гальмак, А.М.*** Вектор-определители и определители вектор-матриц / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 2(7). – С. 1–5.

6. ***Гальмак, А.М.*** Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
7. ***Гальмак, А.М.*** Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
8. ***Слипенко, А.К.*** Про матрични оперативи / А.К. Слипенко // Доповіді АН УССР. – 1975. – А, №3. – С. 207–208.
9. ***Слипенко, А.К.*** Абстрактная характеризация матричных оперативов / А.К. Слипенко // Украинский мат. журнал. – 1974. – Т. 26. – № 1. – С. 112–114.

Поступила в редакцию 26.08.2011 г.