УДК 511.36

Н.В. ШАМУКОВА, В.А. ДАВЫДОВА

ОЦЕНКИ МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ЗАДАННЫМ ПОРЯДКОМ ПРИБЛИЖЕНИЯ НУЛЯ ЗНАЧЕНИЯМИ ПОЛИНОМОВ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

В работе улучшаются оценки меры множества действительных чисел с заданным порядком приближения нуля значениями полиномов и их производных. Полученные результаты представляют интерес при оценках размерности Хаусдорфа в теории трансцендентных чисел.

Рассмотрим несколько проблем теории диофантовых приближений. Для полинома

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
$$a_j \in \mathrm{Z}, \quad 0 \le j \le n; \quad H = H(P) = \max_{1 \le i \le n} |a_i| \tag{1}$$

пусть $\psi(x)$ монотонная функция для $x \in R_+$.

В 1989 г. В. Берник [1] доказал гипотезу А. Бейкера показав, что для почти всех $x \in R$ выполняется неравенство

$$|P(x)| < H^{-n+1}\psi(H), \tag{2}$$

имеющее лишь конечное число решений в $P \in Z[x]$ с $\deg P \le n$, если ряд

$$\sum_{H=1}^{\infty}\psi(H) \tag{3}$$

сходится.

В 1999 г. В. Бересневич [2] показал, что в случае расходимости ряда (3) неравенство (2) имеет бесконечно много решений для почти всех $x \in R$.

Дальнейшее развитие метрической теории диофантовых приближений можно найти в работах [3, 4, 5]. Всюду в этой статье n обозначает целое число, $n \ge 2$, Q – достаточно большое число, является положительным действительным числом, и $I = [a,b)$ интервал $I \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Для заданных n и Q определим множество $P_n(Q) = \{P(x), \deg P \le n : H(P) \le Q\}$. Для данных I, Q, ε и $P \in P_n(Q)$ обозначим через $\sigma(P)$ множество для действительных $x \in I$, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} P(x) \le \varepsilon \\ |H(P)| \le Q. \end{cases} \tag{4}$$

Для данных I, Q и ε пусть $B_{n,I}(\varepsilon,Q)$ является объединением множеств $\sigma(P)$ по всем $P \in P_n(Q)$.

В. Бересневич рассматривал неравенство (4) с дополнительным условием $|P'(x)| \ge 2|I|^{-1}$ и доказал следующую теорему [2, предложение 1].

Пусть n и $I = [a,b)$ обозначим $Q_1 = \max\left\{2^{n-1}|I|^{-1/n}, 4n^2\right\}$. Тогда

$$\mu B_{n,I}(\varepsilon,Q) \le n2^{n+2}\varepsilon Q^n |I| \tag{5}$$

для всех $Q > Q_1$ и $\varepsilon < n^{-1}2^{-n-2}Q^{-n}$.

Этот результат является точным для всех значений $P'(x)$ близких к Q, но для меньших значений производной можно улучшить оценку. Улучшение может быть получено также и для $|P'(x)| \ge 2|I|^{-1}$, тем не менее, мы не будем подробно останавливаться на этом в данной работе.

Для целого числа m обозначим через $B_{n,l,I}(\varepsilon, m, Q)$ множество решений, удовлетворяющих дополнительному неравенству

$$Q^{l/m} \le |P'(x)| < Q^{l+1/m}. \qquad (6)$$

Теорема. Для данного целого l, $-m/4 - 1 \le l \le m$ и $\varepsilon < n2^{-n-4}Q^{-n}$. Тогда

$$B_{n,l,I}(\varepsilon, m, Q) \le \begin{cases} |I|/4, & l = m-1 \text{ или } l = m, \\ n2^{n+3}Q^{(l+1)/m-1}|I|, & \frac{1}{5}(m-1) \le l \le m-2, \\ n2^{n+3}Q^{-\frac{1+\frac{3l}{m}}{4}}, & -\frac{1}{4}(m-1) \le l \le \frac{1}{5}(m-1). \end{cases} \qquad (7)$$

Замечание. Первое неравенство в (7) следует из теоремы В. Бересневича. Для корня $\alpha_j, 1 \le j \le n$ многочлена $P(x)$ определим множество

$$S(\alpha_j) = \left\{ z \in C : |z - \alpha_j| = \min_{1 \le i \le n} |z - \alpha_i| \right\}. \qquad (8)$$

Лемма 1. Если $x \in S(\alpha_j)$, $1 \le j \le n$, то

$$|x - \alpha_j| \le n\varepsilon |P'(\alpha_j)|^{-1}. \qquad (9)$$

Доказательство. Учитывая, что

$$\frac{|P'(x)|}{|P(x)|} = \sum_{i=1}^{n} |x - \alpha_j|^{-1}$$

и используя определение $S(\alpha_j)$, имеем

$$|P'(x)||P(x)|^{-1} \le n|x - \alpha_j|^{-1},$$

и, следовательно,

$$|x - \alpha_j| \le n|P(x)||P'(x)|^{-1}. \qquad (10)$$

Используя формулу Лагранжа, оценку $|x| \le 1/2$, формулу

$$P'(x) = P'(\alpha_j) + P''(\xi)(x - \alpha_j), \quad \xi \in (x; \alpha_j),$$

предыдущие оценки (6), (10) и неравенство $|P''(\xi) \le 4Q|$, получим

$$\frac{n-1}{n}|P'(x)| < P'(\alpha_j) < \frac{n+1}{n}|P'(x)|. \qquad (11)$$

Отсюда следует $P'(\alpha_j) \neq 0$ и $|D(P)| \ge 1$, где $D(P)$ дискриминант многочлена $P(x)$. Поэтому все x, что удовлетворяют (4) и (6) могут принадлежать не более чем двум множествам $S(\alpha_j)$. Без ограничения общности, будем считать, что $i = 1$, $j = 2$ и $x \in S(\alpha_1)$.

Пусть $x \in I \bigcap S(\alpha_1)$ решение (4). Тогда x лежит в интервале $\sigma(P)$, который имеет вид

$$\sigma(P) = I \bigcap \left\{ z \in C : |z - \alpha_1| < (n+1)\varepsilon |P'(\alpha_1)|^{-1} \right\}. \qquad (12)$$

Для действительного $\lambda > 0$ обозначим $\sigma_1(P)$ через интервал

$$\sigma_1(P) = I \bigcap \left\{ z \in C : |z - \alpha_1| < c_1 Q^{-\lambda} |P'(\alpha_1)|^{-1} \right\}. \qquad (13)$$

Отсюда следует из (12) и (13), что

$$\mu\sigma(P)(\mu\sigma_1(P))^{-1} < c_1^{-1}\varepsilon Q^{\lambda} . \qquad (14)$$

Из формулы Тейлора для $P(x)$ при $x \in \sigma_1(P)$ имеем

$$P(x) = P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \frac{1}{2}P''(\xi_1)(x - \alpha_1)^2, \quad \xi_1 \in (\alpha_1, x).$$

Так как

$$|P'(\alpha_1)(x - \alpha_1)| < c_1 Q^{-\lambda}$$

и

$$\left|P''(\xi_1)(x - \alpha_1)^2\right| < 2c_1\left(\frac{n}{n-1}\right)^2 Q^{1-2\lambda-\frac{2l}{m}},$$

получаем, что для

$$\lambda + 2\frac{l}{m} > 1 \qquad (15)$$

и для всех $x \in \sigma_1(P)$ выполняется $|P(x)| < 16c_1^2 Q^{-\lambda}$. (16)

Теперь зафиксируем коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2$ полинома $P(x)$. Пусть вектор $\vec{b}$ имеет координаты $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2)$. Заметим, что из неравенства $|a_j| \le Q$, $2 \le j \le n$, следует, что число различных значений

$\vec{b}$ равно $(2Q+1)^{n-1}$. Множество многочленов с тем же вектором $\vec{b}$ будем обозначать через $\Im(\vec{b})$.

Далее будем использовать метод существенных и несущественных областей, введенный В. Спринджуком [6].

Интервал $\sigma_1(P_1)$, $P_1(x)\in\Im(\vec{b})$ называется несущественным, если существует такой полином $P_2(x)\in\Im(\vec{b})$, что

$$\mu(\sigma_1(P_1)\cap\sigma_1(P_2))\geq 2^{-1}\mu\sigma_1(P_1). \tag{17}$$

Если для всех $P_2(x)\in\Im(\vec{b})$ выполняется

$$\mu(\sigma_1(P_1)\cap\sigma_1(P_2))\geq 2^{-1}\mu\sigma_1(P_1), \tag{18}$$

то интервал $\sigma_1(P_1)$ будем называть существенным.

Обозначим через $\Im_1(\vec{b})$ множество многочленов $P(x)\in\Im(\vec{b})$ с несущественными интервалами и через $\Im_2(\vec{b})$ множество многочленов $P(x)\in\Im(\vec{b})$ с существенными интервалами.

а). Докажем теорему для множества $\Im_1(\vec{b})$. В этом случае неравенство (16) выполняется на множестве $A(P_1,P_2)=\sigma_1(P_1)\cap\sigma_1(P_2)$ с мерой $\mu A(P_1,P_2)>2^{-1}\mu\sigma_1(P_1)$. Пусть $R(x)=P_1(x)-P_2(x)$, тогда $\deg R=1$, и

$$|R(x)|=|kx+s|<12^5c_1^2Q^{-\lambda} \tag{19}$$

на отрезке с мерой не меньшей $2^{-1}\mu\sigma_1(P_1)\geq c_1Q^{-\lambda}|P_1'(\alpha_1)|^{-1}$. Однако неравенство (19) может выполняться на отрезке с мерой не более $2^6c_1^2|k|^{-1}Q^{-\lambda}$.

Поэтому

$$|k|<|P'(\alpha_1)|2^5c_1^2. \tag{20}$$

Так как $k\neq 0$ и целое, из неравенства (6) следует неравенство (20) и должно выполняться

$$l>-1. \tag{21}$$

В неравенстве (19) s может принимать $(|I|+2)k$ различных значений, поэтому (19) может выполняться для всех пар (k,s) на множестве с мерой не более $2^6c_1^2Q^{-\lambda}|P'(\alpha_1)||I|<2^6c_1^2Q^{-\lambda+\frac{l+1}{m}}|I|$.

Таким образом, окончательно получим

$$\sum_{\bar{b}} \sum_{P \in \mathfrak{I}_1(\bar{b})} \mu\sigma_1(P) < 2^7 c_1^2 Q^{-\lambda + \frac{l+1}{m}} |I|. \tag{22}$$

Перейдем к существенным интервалам. Заметим, что из (18) каждой точке x может принадлежать не более двух существенных интервалов $\sigma_1(P)$, поэтому

$$\sum_{P \in \mathfrak{I}_1(\bar{b})} \mu\sigma_1(P) < 2|I|. \tag{23}$$

В силу неравенства(14) имеем

$$\sum_{\bar{b}} \sum_{P \in \mathfrak{I}_2(\bar{b})} \mu\sigma(P) = \sum_{\bar{b}} \sum_{P \in \mathfrak{I}_2(\bar{b})} \mu\sigma_1(P) \frac{\mu\sigma(P)}{\mu\sigma_1(P)} < (n+1)c_1^{-1}(2Q+1)^{n-1+\lambda} \sum_{P \in \mathfrak{I}_2(\bar{b})} \mu\sigma_1(P) <$$
$$< (n+1)2^n c_1^{-1} \varepsilon Q^{n-1+\lambda} |I|. \tag{24}$$

Теперь возьмем

$$\varepsilon = Q^{-n}, \quad \lambda = \frac{1 + {(l+1)}/{m}}{2}, \quad c_1 = (n+1)^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{n-7}{3}}.$$

Тогда из (15) и (21) при $\lambda > \frac{1}{5}(m-1)$ левые части (22) и (24) можно оценить сверху

$$ns^{n+1} Q^{\frac{l+1}{m-1}}. \tag{25}$$

Предположим, что неравенство

$$\lambda + 2\frac{l}{m} \le 1 \tag{26}$$

выполнено, т.е. (15) не выполняется. Тогда оценка (16) заменяется на

$$|P(x)| < 16 c_1^2 Q^{1-2\lambda-\frac{2l}{m}}, \tag{27}$$

а неравенство (19) заменяется на

$$|kx + s| < 2^5 c_1^2 Q^{1-2\lambda-\frac{2l}{m}}. \tag{28}$$

Вместо (20) имеем

$$|k| < 2^5 c_1 Q^{1-\lambda-\frac{l+1}{m}}. \tag{29}$$

Оценка (21) заменяется на

$$\lambda + \frac{l-1}{m} \le 1, \tag{30}$$

неравенство (22) преобразовывается в

$$\sum_{\bar{b}} \sum_{P \in \mathfrak{I}_1(\bar{b})} \mu\sigma_1(P) < 2^{10} c_1^3 Q^{2-3\lambda-\frac{3l}{m}-\frac{1}{m}}, \tag{31}$$

а оценка (24) не изменится.

Возьмем

$$\varepsilon = Q^{-n}, \quad \lambda = \frac{3}{4} - \frac{3l}{4m} + \frac{1}{4m}, \quad c_1 = -2^{\frac{n-10}{4}}(n+1)^{\frac{1}{4}}. \tag{32}$$

Тогда из (26) и (30) следует, что левые части (24) и (31) имеют оценку сверху

$$n2^{n+3} Q^{-\frac{1+3l/m}{4}+\frac{1}{m}} |I| \tag{33}$$

для $l > -\frac{1}{4}(m-1)$. Таким образом, из (25) и (33) получаем

$$\mu B_{n,I,l}(\varepsilon, m, Q) < n2^{n+3} Q^{-\frac{l+1}{m-1}} |I|, \quad \frac{1}{5}(m-1) \le l \le m-2,$$

$$\mu B_{n,I,l}(\varepsilon, m, Q) < n2^{n+3} Q^{-\frac{1+\frac{3l}{m}}{4}} |I|, \quad -\frac{1}{4}(m-1) < l < \frac{1}{5}(m-1).$$

Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Берник, В.И.*** О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов / В.И. Берник // ActaArithmetica. – 1989. – Т. 53. – № 1. – С. 17–28.
2. ***Beresnevich, V.V.*** On approximationof real numbersby real algebraicnumbers / V.V. Beresnevich // Acta Arithmetica. – 1999. – Vol. 90. – № 2. – P. 97–112.
3. ***Beresnevich, V.V.*** / V.V. Beresnevich // Acta Arithmetica Hungar. – 2002. – Vol. 94. – № 1. – P. 99–130.
4. ***Bernik, V.I.*** The convergence case for standard and multiplicative version/ V.I. Bernik, D. Kleinbock , G. Margulis // International Mathematical Research Notices. – 2001. – P. 453–486.
5. ***Bernik, V.I.*** Metric diophantineapproximation : the Khinchine-Groshev theorem for non-degenerate manifolds/ V.I. Bernik, V.V. Beresnevich, D. Kleinbock, G. Margulis // Moscow Math. Journal. – 2002. – Vol. 2. – № 2. – P. 203–225.
6. ***Sprindzuk, V.G.*** Maler'sproblem in metricNamberTheory // Nauka i Tehnika,Minsk,1967 [Transl. Math. Monogr. 25, Amer. Math. Soc., Providenca, R.I., 1969].

Поступила в редакцию 15.05.2013 г.