УДК 517.925.45

*Н.П. МОРОЗОВ**

ИНТЕГРАЛЫ КВАДРАТИЧНОЙ СИСТЕМЫ В СЛУЧАЕ ЦЕНТРА

В работе приведено краткое описание процедуры вычисления фокусных величин для кратного фокуса полиномиальных систем в обобщенных полярных координатах. Метод вычислений основан на специальном представлении полиномиальных систем. Приведены результаты вычисления по описанному алгоритму первых трех фокусных величин для квадратичной системы. За счет подходящего представления параметров квадратичной системы фокусным величинам придана удобная для исследования форма. Это позволило в случаях центра, определяемых по первым трем фокусным величинам, проинтегрировать квадратичную систему в замкнутом виде.

Краткое описание процедуры отыскания фокусных величин в обобщенных полярных координатах

При исследовании бифуркаций сложного или кратного фокуса используется алгоритм вычисления фокусных величин, подробно описанный в [1; 2 § 24; 3; 4]. *Предлагаемый алгоритм отличается тем, что система рассматривается не в полярных, а в обобщенных полярных координатах специального вида, что упрощает процедуру вычислений.*

Система

$$\dot{x} = P(x,y),\ \dot{y} = Q(x,y), \tag{1}$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – многочлены наибольшей степени n, представима [5] в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y) + x\overline{\sigma}(x,y) \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y) + y\overline{\sigma}(x,y) \end{cases}, \tag{2}$$

здесь

$$P(x,y) = \textstyle\sum_{m=1}^{n} P_k(x,y),\ \ Q(x,y) = \sum_{m=1}^{n} Q_k(x,y),$$

$$P_k(x,y) = \frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k} C_k^m a_{k-m\ m}\, x^{k-m} y^m,$$

$$a_{k-m\ m} = \frac{\partial^k P(x_0,y_0)}{\partial x^{k-m}\partial y^m},\ \ b_{k-m\ m} = \frac{\partial^k Q(x_0,y_0)}{\partial x^{k-m}\partial y^m},$$

* Выпускник физико-математического факультета 1970 г.

$$2H(x,y) = \sum_{k=1}^{n} h_{k+1}(x,y),\ h_{k+1}(x,y) = 2\ \frac{yP_k(x,y) - xQ_k(x,y)}{(k+1)} =$$

$$= \frac{2}{(k+1)!}\left(a_{0k}y^{k+1} - b_{k0}x^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} C_k^{m-1}\ \frac{\mu_{k-m\ m-1}}{m}\ x^{k-m+1}y^m\right),$$

$$\bar{\sigma}(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \bar{\sigma}_{k-1}(x,y)\ ,\ \bar{\sigma}_{k-1}(x,y) = \frac{1}{k+1}\left(\frac{\partial P_k(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Q_k(x,y)}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{k}{(k+1)!}\sum_{m=1}^{k} C_{k-1}^{m-1}\ \sigma_{k-m\ m-1}\ x^{k-m}y^{m-1},$$

$$\mu_{k-m\,m-1} = m\,a_{k-m+1\,m-1} - (k-m+1)\ b_{k-m\,m}$$

$$\sigma_{k-m\ m-1} = a_{k-m+1\ m-1} + b_{k-m,\ m}\ ,\ k = \overline{1,n}\ ,\ m = \overline{1,k}.$$

Гамильтониан $H(x, y)$, однозначно определяемый по правым частям системы (1), будем называть естественным гамильтонианом. В [2] также показано, что вид системы (2) инвариантен относительно невырожденных линейных преобразований $x = \alpha u + \beta v, y = \gamma u + \delta v$. Таким преобразованием систему (2) можно привести к виду

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{\Delta}\dfrac{\partial \bar{H}}{\partial v}\ (u,v) + u\bar{\sigma}(u,v) \\ \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{1}{\Delta}\dfrac{\partial \bar{H}}{\partial u}\ (u,v) + u\bar{\sigma}(u,v) \end{cases}, \qquad (3)$$

где $\Delta = (\alpha\delta - \beta\gamma)$, $\bar{H} = H(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v), \bar{\sigma} = \sigma(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$. С учетом этого преобразуем систему (2) так, чтобы квадратичная часть гамильтониана оказалась равной $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Это возможно при условии $D = \frac{1}{4}\mu_{00}^2 + a_{01}b_{10} < 0$ с помощью линейного невырожденного преобразования $x = \alpha u + k\left(\frac{\mu_{00}}{2}\alpha + a_{01}\gamma\right)v$, $y = \gamma u + k\left(b_{10}\alpha - \frac{\mu_{00}}{2}\gamma\right)v$ с определителем преобразования

$$\Delta = -2kh_2(\alpha,\gamma) = k\left(b_{10}\,\alpha^2 - \mu_{00}\alpha\gamma - a_{01}\,\gamma^2\right) \neq 0,\ k = -\frac{1}{\sqrt{|D|}}$$ и

произвольных α, γ.

В связи с этим будем считать, что система (1) изначально имеет нужный вид (2) и $h_2(x,y) = x^2 + y^2$. В рассматриваемом случае состояние равновесия $O(0,0)$ для гамильтоновой системы является центром, а естественный гамильтониан в области центра является положительно определенной функцией Ляпунова. Производная естественного гамильтониана в силу системы (2) имеет вид

$$\frac{dH}{dt} = \overline{\sigma}(x,y)\left(x\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)\right). \quad (4)$$

Положим $V(x,y) = x\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)$ и обозначим

$$D = \{(x,y)|\, V(x,y) > 0\}\,,\ \Gamma_D = \{(x,y)|\, V(x,y) = 0,\ (x,y) \neq (0,0)\}.$$

Область центра гамильтоновой системы расположена в области D и состояния равновесия системы (2) и гамильтоновой системы, отличные от $O(0,0)$ (если такие существуют), расположены на границе области D, т.е. на кривых $V(x,y) = 0$.

Пусть $x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi$. Учитывая, что

$$\rho^2\dot{\varphi} = -(x\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)),$$

из (4) следует, что в области D система (2) равносильна одному уравнению

$$\frac{dH}{d\varphi} = -\rho^2\overline{\sigma}(x,y). \quad (5)$$

В обобщенных полярных координатах $(R,\ \varphi)$, где $R = \sqrt{2H}$, уравнение (5) имеет вид

$$R\frac{dR}{d\varphi} = -\rho^2\overline{\sigma}(x,y). \quad (6)$$

В области D (*и в области центра гамильтоновой системы*) уравнение $R^2 = 2H(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$, т.е. $R^2 = \sum_{k=1}^{n}\rho^{k+1}h_{k+1}(\cos\varphi, \sin\varphi)$, при каждом φ однозначно разрешимо относительно ρ, так как

$$V(x,y) = \rho\frac{\partial H}{\partial \rho}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) > 0.$$

Из этого уравнения находим ρ в виде ряда $\rho = \sum_{k=1}^{\infty} r_k(\cos\varphi, \sin\varphi)R^k$, где r_k – многочлены от h_k. Подставив найденное ρ в уравнение (6) получим уравнение

$$-\frac{dR}{d\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\cos\varphi, \sin\varphi)R^k, \quad (7)$$

где a_k – многочлены от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Будем искать решение уравнения (7) в виде ряда

$$R(\varphi, R_0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\varphi)\, R_0^k \quad (8)$$

при начальном условии $R(0, R_0) = R_0$. Отсюда следует $b_1(0) = 1$, $b_k(0) = 0$, для $k > 1$. Подставим $R(\varphi, R_0)$ в уравнение (7). Получим для отыскания $b_k(\varphi)$ последовательность линейных дифференциальных уравнений: $-\frac{db_k}{d\varphi} = c_k(\varphi), (\ k = 1, 2, \dots\ )$. Здесь через $c_k(\varphi)$ обозначены правые части соответствующих уравнений. Отсюда при $\sigma_{00} = 0$, с учетом начальных условий, находим $b_1(\varphi) = 1$, $b_k(\varphi) = -\int_0^{\varphi} c_k(\varphi)\, d\varphi$. Пусть $R = R(\varphi, R_0)$ – решение уравнения (7) при начальном условии $R(0, R_0) = R_0$ и $R_1 = R(2\pi, R_0)$ – отображение Пуанкаре луча $\varphi = 0$ в себя. Введем в рассмотрение отображение

$$P(R_0) = R_0 - R(2\pi, R_0) = \left(1 - b_1(2\pi)\right)R_0 - \sum_{k=2}^{\infty} b_k(2\pi)\, R_0^k.$$

Поскольку первым отличным от нуля может быть коэффициент $l_k = -\ b_k(2\pi) = \int_0^{2\pi} c_k(\varphi)\, d\varphi$ с нечетным номером, обозначим его $L_m = l_{2m+1}$. В результате получим

$$P(R_0) = L_m R_0^{2m+1} + \sum_{k=2m+2}^{\infty} l_k\ R_0^k,$$

при этом $\sigma_{0\,0} = 0$, $L_0 = 1 - b_1(2\pi) = 0$, $L_k = 0$ при $k < m$.

Коэффициент L_m будем называть *m*-й фокусной величиной или *m*-й ляпуновской величиной.

Заметим, если $L_m < 0$ ($L_m > 0$), то состояние равновесия $O(0,0)$ для системы (1) является устойчивым (неустойчивым) фокусом кратности *m*, если $L_m = 0$, то требуется найти L_{m+1}. Если все фокусные величины равны нулю, то состояние равновесия $O(0,0)$ является центром для системы (1).

Случай квадратичной системы

Для квадратичной системы первые три фокусные величины известны (*см., например,* [2], [3], *или* [4, с. 332]). *Здесь мы не только приведем результаты вычислений по описанной выше процедуре, но и придадим фокусным величинам квадратичной системы вид, удобный для исследования.*

В качестве примера применим описанную процедуру вычисления фокусных величин к исследованию квадратичной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \ y + \frac{1}{2}a_{02}y^2 + \frac{1}{6}(\mu_{10}x^2 + 2\mu_{01}xy) + x\left(\frac{\sigma_{0\,0}}{2} + \frac{1}{3}(\sigma_{10}x + \sigma_{01}y)\right), \\ \dot{y} = -x + \frac{1}{2}b_{20}x^2 - \frac{1}{6}(2\mu_{10}xy + \mu_{01}y^2) + y\left(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{1}{3}(\sigma_{10}x + \sigma_{01}y)\right), \end{cases} \qquad (9)$$

представленной в виде (2) с гамильтонианом

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{6}\ h_3(x, y)\ , \sigma(x, y) = \frac{\sigma_{0\,0}}{2} + \frac{1}{3}(\sigma_{10}x + \sigma_{01}y),$$

$$h_3(x,y) = a_{02}y^3 + \mu_{10}x^2y + \mu_{01}xy^2 - b_{20}x^3,$$

$$\mu_{k-m\,m-1} = m\,a_{k-m+1\,m-1} - (k-m+1)\;b_{k-m\,m},$$

$$\sigma_{k-m\;m-1} = a_{k-m+1\;m-1} + b_{k-m,\;m},\;k = \overline{1,2},\; m = \overline{1,k}\;(m \le k).$$

В обобщенных полярных координатах в рассматриваемом случае уравнение (6) имеет вид

$$R\frac{dR}{d\varphi} = -\left(\frac{\sigma_{00}}{2}\rho^2 + \frac{1}{3}(\sigma_{10}\cos\varphi + \sigma_{01}\sin\varphi)\rho^3\right). \qquad (10)$$

Из равенства $R^2 = \rho^2 + \frac{1}{3}h_3(\cos\varphi, \sin\varphi)\rho^3$ находим

$\rho = \sum_{k=1}^{\infty} r_k(\cos\varphi, \sin\varphi)R^k$, где $r_1 = 1, r_2 = -\frac{1}{2}h_3, r_3 = \frac{5}{8}h_3^2$,

$r_4 = -h_3^3, r_5 = \frac{231}{128}h_3^4, r_6 = -\frac{7}{2}h_3^5, r_7 = \frac{7293}{1024}h_3^6, r_8 = -15\,h_3^7.$

Подставив ρ в правую часть уравнения (10), после несложных вычислений для квадратичной системы найдем коэффициенты в уравнении (7):

$$a_1 = \frac{\sigma_{00}}{2}, a_2 = -\frac{\sigma_{00}}{2}h_3 + \frac{1}{3}(\sigma_{10}\cos\varphi + \sigma_{01}\sin\varphi),\; a_3 = -\frac{3}{2}a_2 h_3,$$

$$a_4 = -\frac{7}{4}a_3 h_3, a_5 = -\frac{40}{21}a_4 h_3,\; a_6 = -\frac{1287}{640}a_5 h_3,\; a_7 = -\frac{896}{429}a_6 h_3.$$

Положим $\sigma_{00} = 0$ и найдем коэффициенты $b_k(\varphi)$ в решении (8) уравнения (7). Для их отыскания получим последовательность уравнений: $b_1 = 1$

$$-\frac{db_2}{d\varphi} = a_2,\; -\frac{db_3}{d\varphi} = a_3 + 2a_2 b_2,\; -\frac{db_4}{d\varphi} = a_4 + 3a_3b_2 + a_2(2b_3 + b_2^2),$$

$$-\frac{db_5}{d\varphi} = a_5 + 4a_4b_2 + 3a_3(b_3 + b_2^2) + 2a_2(b_4 + b_3 b_2),$$

$$-\frac{db_6}{d\varphi} = a_6 + 5a_5b_2 + a_4(4b_3 + 6b_2^2) + a_3(3b_4 + 4b_2 b_3 + b_2^3) +$$

$$+a_2(2(b_5 + b_4 b_2) + b_3^2),$$

$$-\frac{db_7}{d\varphi} = a_7 + 6a_6b_2 + 5a_5(b_3 + 2b_2^2) + 4a_4((b_4 + 3b_3 b_2 + b_2^3) +$$

$$+a_3(3b_3 b_2^2 + 3b_3^2 + 6b_2 b_4 + 3b_5) + 2a_2(b_6 + b_5 b_2 + b_4 b_3).$$

Интегрируя поочередно эти уравнения, находим $b_1(\varphi) = 1$ и $l_k = -\,b_k(2\pi) = \int_0^{2\pi} c_k(\varphi)\,d\varphi, L_n = l_{2n+1}$. При этом полагаем σ_{00}

и все предшествующие коэффициенты L_{m-1}, равными нулю, и находим L_m. Для придания фокусным величинам удобного для исследования вида положим

$$b_{20} = \gamma\cos\beta,\ a_{02} = \gamma\sin\beta,\ \mu_{01} = 3b_{20} + \lambda\sin\alpha,$$

$$\mu_{10} = -3a_{02} + \lambda\cos\alpha,$$
$$\sigma_{10} = r\cos\theta, \sigma_{01} = r\sin\theta,\ \gamma, \lambda, r \in R,$$

$$\beta, \alpha, \theta \in [0,2\pi]. \qquad (11)$$

В принятых обозначениях первые три фокусные величины равны:

1) $\sigma_{00} = 0, L_1 = l_3 = -\frac{\pi}{24} r\lambda\sin(\theta+\alpha)$;

2) $\sigma_{00} = 0, l_3 = 0$ (при $\lambda = 0$), $L_2 = l_5 = -\frac{\pi}{216}\gamma r^3\cos(\beta - 3\theta)$;

3) $\sigma_{00} = 0,\ l_3 = 0$ (при $\lambda = 0$), $L_2 = l_5 = 0$ (при $\theta = \frac{\beta}{3} + \frac{2k-1}{6}\pi$,

$k \in \{0; \pm1; \pm2; 3;\}$); $l_n = 0$ при $n \geq 6$;

4) $\sigma_{00} = 0, L_1 = 0$ (при $\theta = -\alpha$),

$L_2 = l_5 = -\frac{\pi}{6912} r(8r^2 + 14r\lambda + 5\lambda^2)(4\gamma\cos(3\alpha + \beta) + \lambda\sin 4\alpha)$;

5) $\sigma_{00} = 0,\ L_1 = 0$ (при $\theta = -\alpha$), $L_2 = 0$ (при $4\gamma\cos(3\alpha+\beta) +$ $+\lambda\sin 4\alpha = 0$) $l_n = 0$ при $n \geq 6$;

6) $\sigma_{00} = 0, L_1 = 0$ (при $\theta = -\alpha$), $L_2 = 0$ (при $r = -\frac{1}{2}\lambda$),

$L_3 = l_7 = 0$.

7) $\sigma_{00} = 0,\ L_1 = 0$ (при $\theta = -\alpha$), $L_2 = 0$ (при $r = -\frac{5}{4}\lambda$),

$L_3 = l_7 = -\frac{25\gamma\lambda^3}{131072}(4\gamma\cos(3\alpha + \beta) + \lambda\sin 4\alpha)\,(2\gamma + \lambda\sin(\alpha - \beta))$.

8) $\sigma_{00} = 0, L_1 = 0$ (при $\theta = -\alpha$), $L_2 = 0$ (при $r = -\frac{5}{4}\lambda$), $L_3 = 0$

(при $2\gamma + \lambda\sin(\alpha - \beta) = 0$).

Замечание. *Если равенство нулю первой фокусной величины L_1 получено из условия $\theta = -\alpha + \pi$, то для получения последующих фокусных величин везде в соотношениях 4) – 8) следует заменить r на “ $-r$ ”.*

Интегралы квадратичной системы в случае центра

Известно, что при наличии хотя бы одного состояния равновесия типа центр, квадратичная система интегрируется. Здесь мы проинтегрируем квадратичную систему в замкнутой форме в случае, когда состояние равновесия (0,0) *является центром.*

Преобразуем гамильтониан к полярным координатам с учетом обозначений (11). Будем иметь

$$H(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{6}(\gamma\sin\beta\,(y^3-3x^2y)+\gamma\cos\beta\,(3xy^2-x^3))+$$

$+\lambda\, yx(x\cos\alpha+y\sin\alpha))$. После несложных преобразований гамильтониан и h_3 приводятся к виду

$$H(x,y)=\frac{1}{2}\rho^2+\frac{\rho^3}{6}(-\gamma\cos(3\varphi-\beta)+\lambda\,\frac{1}{2}\sin 2\varphi\cos(\varphi-\alpha)),$$

$$h_3(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)=\rho^3(-\gamma\cos(3\varphi-\beta)+\lambda\,\frac{1}{2}\sin 2\varphi\cos(\varphi-\alpha)),$$

а система (9) в этих обозначениях принимает вид

$$\dot{x}=\ y+\frac{\gamma}{2}\rho^2\sin(2\varphi-\beta)\ \ +\frac{\rho^2}{6}\lambda(\sin\alpha\sin 2\varphi+\cos\alpha\cos^2\varphi)+$$

$$+x(\frac{\sigma_{00}}{2}+\frac{\rho}{3}r(\cos(\varphi-\theta))\ ,$$

$$\dot{y}=-x+\frac{\gamma}{2}\rho^2\cos(2\varphi-\beta)-\frac{\rho^2}{6}\lambda(\cos\alpha\sin 2\varphi+\sin\alpha\sin^2\varphi)+$$

$$+y(\frac{\sigma_{00}}{2}+\frac{\rho}{3}r(\cos(\varphi-\theta)). \qquad (12)$$

В дальнейшем нам придется неоднократно подвергать систему (12) преобразованию поворота на различные углы. Поэтому произведем преобразование поворота $x=\ u\cos\tau+\ v\sin\tau,\ \ y=-\ u\sin\tau+\ v\cos\tau$ или $u=\rho\cos\omega$, $v=\rho\sin\omega$, где $\rho^2=u^2+v^2=x^2+y^2$, $\omega=\varphi+\tau$ на произвольный угол τ. Для упрощения этой процедуры воспользуемся свойством инвариантности вида системы (2) при линейных преобразованиях. Преобразуем к новым переменным гамильтониан $H(x,y)$ и $\sigma(x,y)$. После элементарных преобразований будем иметь

$\overline{H}(u,v)=$

$\frac{1}{2}\rho^2+\frac{1}{6}\Big(-(\gamma\cos(3\tau+\beta)+\lambda\,\frac{1}{2}\sin 2\tau\cos(\tau+\alpha))u^3+(\gamma 3\ \cos(3\tau+\beta)+$
$\lambda\,\frac{1}{2}\sin(3\tau+\beta)+\frac{1}{2}\lambda\cos 2\tau\ \ \sin(\tau+\alpha))u\,v^2+(\lambda\cos 2\tau\cos(\tau+\alpha)-$
$3\gamma\sin(3\tau+\beta)-\lambda\frac{1}{2}\sin 2\tau\sin(\tau+\alpha))vu^2+(\gamma\sin(3\tau+\beta)+$

$\lambda \frac{1}{2} \sin 2\tau \sin(\tau+\alpha))v^3\Big),$

а система (12) примет вид

$$\dot{u} = v + \frac{1}{6}((6\gamma \cos(3\tau+\beta) + \lambda \sin 2\tau \cos(\tau+\alpha) +$$
$$+ 2\lambda \cos 2\tau \sin(\tau+\alpha))u\, v$$
$$+\lambda \cos(\tau-\alpha)\, u^2 + 3(\gamma \sin(3\tau+\beta) + \lambda \frac{1}{2} \sin 2\tau \sin(\tau+\alpha))(v^2-u^2)) +$$
$$+ u\left(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{r}{3}(u\cos(\theta+\tau) + v \sin(\theta+\tau))\right)$$

$$\dot{v} = -u - \frac{1}{6}\Big(3(\gamma \cos(3\tau+\beta) + \lambda \frac{1}{2} \sin 2\tau \cos(\tau+\alpha))(v^2-u^2) + \lambda \sin(\alpha -$$
$$\tau)\, v^2 + (\lambda \cos 2\tau \cos(\tau+\alpha) - 6\gamma \sin(3\tau+\beta) + \lambda \cos(3\tau+\alpha))vu\Big) +$$
$$+ v\left(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{r}{3}(u\cos(\theta+\tau) + v \sin(\theta+\tau))\right).$$

Будем обозначать ее в дальнейшем (13).

Рассмотрим все случаи, когда состояние равновесия $O(0,0)$ является центром и определяется по первым трем фокусным величинам.

I. $\sigma_{00} = \theta,\ r = 0\ (L_1 = 0)$.

Этот случай соответствует гамильтоновой системе с естественным гамильтонианом $H(x,y)$.

II. $\sigma_{00} = 0,\ \lambda = 0,\ \gamma = 0\ \ (L_1 = 0,\ L_2 = 0)$.

Одновременное обращение в нуль λ и γ приводит к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \frac{1}{3}x\left(\frac{\sigma_{00}}{2} + \sigma_{10}x + \sigma_{01}y\right) \\ \dot{y} = -x + \frac{1}{3}y\left(\frac{\sigma_{00}}{2} + \sigma_{10}x + \sigma_{01}y\right) \end{cases}. \qquad (14)$$

Эта система интегрируется в замкнутой форме. Для этого достаточно перейти к полярным координатам ρ, φ. Получим

$$\dot{\rho} = \frac{\sigma_{00}}{6}\rho + \frac{1}{3}(\sigma_{10}\cos\varphi + \sigma_{01}\sin\varphi)\rho^2,\ \ \dot{\varphi} = -1,$$

$$\rho = \frac{\rho_0 e^{-\frac{\sigma_{00}}{2}\varphi}(\sigma_{00}^2+36)}{1+\rho_0(36\sigma_{01}+6\sigma_{00}\sigma_{10}) - \rho_0((36\sigma_{01}+6\sigma_{00}\sigma_{10})\cos\varphi - (36\sigma_{01}-6\sigma_{00}\sigma_{10})\sin\varphi)e^{-\frac{\sigma_{00}}{2}\varphi}}$$

или

$$\rho(1+\rho_0(36\sigma_{01}+6\sigma_{00}\sigma_{10})) = \rho_0((36\sigma_{01}+6\sigma_{00}\sigma_{10})x -$$
$$-(36\sigma_{01}-6\sigma_{00}\sigma_{10})y + \sigma_{00}^2 + 36)e^{-\frac{\sigma_{00}}{2}\varphi},$$

в частности, при $\sigma_{00} = 0$ $\rho(1+\rho_0 36\sigma_{01}) = 36\rho_0(\sigma_{01}x - \sigma_{01}y + 1)$.

III. $\sigma_{00} = 0,\ \lambda = 0,\ \cos(\beta - 3\theta) = 0 \quad (L_1 = 0,\ L_2 = 0)$.

Отметим предварительно один частный случай системы (1)

$$\dot{z} = -s + as^2 + bz^2,$$
$$\dot{s} = z(1+cs), \qquad (15)$$

и выпишем ее интеграл $W(s,z)$:

1) $a = 0, b = 0, c = 0,\ W(s,z) = s^2 + z^2$;

2) $a \neq 0, b = 0, c = 0,\ W(s,z) = s^2 + z^2 - \frac{2a}{3}s^3$;

3) $a \neq 0,\ b = 0, c \neq 0,\ W(s,z) = z^2 - \frac{a}{c}s^2 + \frac{2(a+c)}{c^2}s - \frac{2(a+c)}{c^3}\ln|1+cs|$;

4) $b \neq 0, c = 0,\ W(s,z) = e^{-2bs}(z^2 + \frac{a}{b}s^2 + \frac{a-b}{b^2}s + \frac{a-b}{b^3}) - \frac{a-b}{b^3}$;

5) $b \neq 0, c \neq 0,\ c \neq b, c \neq 2b,\ W(s,z) = \frac{z^2}{(1+cs)^{\frac{2b}{c}}} + \frac{a+c}{b\,c^2(1+cs)^{\frac{2b}{c}}} +$

$+\frac{2(2a+c)}{c^2(c-2b)}(1+cs)^{\frac{c-2b}{c}} + \frac{a}{c^2(b-c)}(1+cs)^{\frac{2(c-b)}{c}} - \frac{1}{c^2}(\frac{a+c}{b} + \frac{2(2a+c)}{c-2b} + \frac{a}{b-c})$;

6) $b \neq 0, c = b,\ W(s,z) = \frac{z^2}{(1+bs)^2} + \frac{a+b}{b^3(1+bs)^2} - \frac{2(2a+b)}{b^3(1+bs)} + \frac{2a}{b^3}\ln|1+bs| + \frac{3a+b}{b^3}$;

7) $b \neq 0, c = 2b,\ W(s,z) = \frac{z^2}{1+bs} + \frac{a+2b}{4\,b^3(1+bs)} + \frac{a+b}{2b^3}\ln|1+2bs| -$

$-\frac{a}{4b^3}(1+2bs) - \frac{1}{2b^2}$.

Теорема 1. Если выполнено условие

$$\sigma_{00} = 0,\ \lambda = 0, \theta = \theta_k = \frac{\beta}{3} + \frac{2k-1}{6}\pi,\ k \in \{0; \pm1; \pm2; 3\},$$

то состояние равновесия $O(0,0)$ для квадратичной системы (9) является центром, и с помощью преобразования поворота на угол $\tau = -\frac{\beta}{3} - \frac{k+1}{3}\pi$ система приводится виду (15):

$$\dot{u} = v - ((-1)^k\gamma + \frac{r}{3})uv,\quad \dot{v} = -u + \frac{\gamma}{2}(-1)^{k+1}u^2 + (\frac{\gamma}{2}(-1)^k - \frac{r}{3})v^2,$$

где $a = (-1)^{k+1}\frac{\gamma}{2},\ b = \frac{\gamma}{2}(-1)^k - \frac{r}{3},\ c = \gamma(-1)^{k+1} - \frac{r}{3}$,

$$s = u = \cos\left(\frac{\beta}{3} + \frac{k+1}{3}\pi\right)x - \sin\left(\frac{\beta}{3} + \frac{k+1}{3}\pi\right)y,$$

$$z = v = \sin\left(\frac{\beta}{3} + \frac{k+1}{3}\pi\right) x + \cos\left(\frac{\beta}{3} + \frac{k+1}{3}\pi\right) y, \ k \in \{0, \pm 1, \pm 2, 3\}.$$

В справедливости утверждения убеждаемся подстановкой указанных параметров в систему (13). Интеграл системы (9) получим из интегралов системы (15) с учетом условий на a, b, c.

IV. $\sigma_{00} = 0,\ \theta = -\alpha,\ 4\gamma\cos(3\alpha + \beta) + \lambda\sin 4\alpha = 0$ $(L_1 = 0, L_2 = 0)$.

Теорема 2. Если выполнено условие

$$\sigma_{00} = 0,\ \theta = -\alpha,\ 4\gamma\cos(3\alpha + \beta) + \lambda\sin 4\alpha = 0, \tag{16}$$

то состояние равновесия $O(0,0)$ для квадратичной системы (9) является центром, и система с помощью преобразования поворота на угол $\tau = \alpha$ приводится к виду (15):

$$\dot{u} = v + \frac{\lambda+2r}{6}u^2 + \frac{1}{2}\left(\gamma\sin(3\alpha+\beta) - \frac{\lambda}{4}\cos 4\alpha + \frac{\lambda}{4}\right)(v^2 - u^2),$$

$$\dot{v} = -u - \frac{1}{6}\left(\frac{\lambda-4r}{2} - 6\gamma\sin(3\alpha+\beta) + \frac{3}{2}\lambda\cos 4\alpha)vu\right). \tag{17}$$

В этом убеждаемся подстановкой указанных параметров в систему (13).

Чтобы полностью учесть зависимость (16) между параметрами рассмотрим следующие два случая.

1) $\cos(3\alpha + \beta)$ и $\sin 4\alpha$ одновременно обращаются в ноль, т.е.

$\alpha = \alpha_m = \frac{m}{4}\pi,\ m \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, 4\},\ \ \beta = -3\alpha_m + \frac{2k-1}{2}\pi,$

$k \in \{0, \pm 1, \pm 2, 3\}, \lambda, \gamma$ произвольны.

Система (17) принимает вид системы (15):

$$\dot{u} = v + \left(\frac{r}{3} + \frac{\gamma}{2}(-1)^k + \frac{\lambda(1+3(-1)^m)}{24}\right)u^2 + \frac{1}{2}\left(\gamma(-1)^{k-1} + \frac{\lambda(1-(-1)^m)}{4}\right)v^2,$$

$$\dot{v} = -u - \frac{1}{6}\left(\frac{\lambda-4r}{2} + 6\gamma(-1)^k + \frac{3}{2}\lambda(-1)^m\right)vu,$$

где $b = -\left(\frac{r}{3} + \frac{\gamma}{2}(-1)^k + \frac{\lambda(1+3(-1)^m)}{24}\right)$, $a = \frac{1}{2}\left(\gamma(-1)^k - \frac{\lambda(1-(-1)^m)}{4}\right)$,

$$c = \frac{1}{6}\left(\frac{\lambda-4r}{2} - 6\gamma(-1)^k + \frac{3}{2}\lambda(-1)^m\right),$$

$$z = -u = -\cos\left(\frac{\beta}{3} + \frac{k+1}{3}\pi\right)x + \sin\left(\frac{\beta}{3} + \frac{k+1}{3}\pi\right) y,$$

$$s = v = \sin\left(\frac{\beta}{3} + \frac{k+1}{3}\pi\right) x + \cos\left(\frac{\beta}{3} + \frac{k+1}{3}\pi\right) y.$$

Интеграл системы (9) получим из интегралов системы (15) с учетом условий на a, b, c.

2) $\cos^2(3\alpha+\beta)+\sin^2 4\alpha\neq 0$. Положим $\lambda=4p\cos(3\alpha+\beta)$ и $\gamma=-p\sin 4\alpha$, p – произвольный параметр. Система (17) принимает вид системы (15)

$$\dot{u}=v+\frac{1}{6}(2r+p(3\cos(\alpha-\beta)+\cos(3\alpha+\beta)))u^2-$$

$$-\frac{p}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(3\alpha+\beta))v^2,$$

$$\dot{v}=-u-\frac{1}{3}(p(\cos(3\alpha+\beta)+3\cos(\alpha-\beta)-r)vu),$$

где $b=-\frac{1}{6}(2r+p(3\cos(\alpha-\beta)+\cos(3\alpha+\beta)))$,

$$a=\frac{p}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(3\alpha+\beta)),$$

$$c=\frac{1}{3}(-r+p(\cos(3\alpha+\beta)+3\cos(\alpha-\beta))),$$

$$z=-u=-\cos\left(\frac{\beta}{3}+\frac{k+1}{3}\pi\right)x+\sin\left(\frac{\beta}{3}+\frac{k+1}{3}\pi\right)y,$$

$$s=v=\sin\left(\frac{\beta}{3}+\frac{k+1}{3}\pi\right)x+\cos\left(\frac{\beta}{3}+\frac{k+1}{3}\pi\right)y.$$

V. $\sigma_{00}=0,\ \theta=-\alpha,\ \mathrm{r}=-\frac{1}{2}\lambda\ (L_1=0,\ L_2=0,\ L_3=0)$.

Теорема 3. Если выполнено условие:

$$\sigma_{00}=0,\theta=-\alpha,\ \mathrm{r}=-\frac{1}{2}\lambda,\ \gamma=-\frac{\lambda}{2}\sin(\alpha-\beta),$$

то система (9) преобразованием поворота на угол $\tau=\frac{\alpha-\beta}{2}$ приводится к виду $\dot{u}=v+\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}uv$, $\dot{v}=-u-\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}uv$

и интегрируется в замкнутой форме.

В этом убеждаемся подстановкой указанных параметров в систему (13).

VI. $\sigma_{00}=0,\ \theta=-\alpha,\ \mathrm{r}=-\frac{5}{4}\lambda,\ \gamma=-\frac{\lambda}{2}\sin(\alpha-\beta)\ (L_1=0,$

$L_2=0,\qquad L_3=0)$.

Теорема 4. Если выполнены условия

$$\sigma_{00}=0,\ \theta=-\alpha,\ \mathrm{r}=-\frac{5}{4}\lambda,\ \gamma=\frac{\lambda}{2}\sin(\beta-\alpha),$$

то система (9) преобразованием поворота на угол $\tau=\frac{\alpha-\beta}{2}$ приводится к виду $\dot{u} = v + \frac{\lambda}{4}\left(3\sin\frac{\alpha+\beta}{2}v - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}u\right)u,$

$$\dot{v} = -u + \frac{\lambda}{4}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}v - 3\cos\frac{\alpha+\beta}{2}u\right)v.$$

В этом убеждаемся подстановкой указанных параметров в систему (13).

При дополнительном условии $\alpha + \beta = \frac{k\pi}{2}$, $(k = 0, 1, \ldots)$ система принимает вид (15) и интегрируется.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов [и др.]. – М. : Наука, 1966. – 568 с.
2. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов [и др.]. – М. : Наука, 1967. – 587 с.
3. ***Баутин, Н.Н.*** Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М. : Наука, 1978. – 496 с.
4. ***Ван, Д.*** Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости / Д. Ван, Ч. Ли, Ш.-Н. Чоу. – М. : МЦНМО, 2005. – 415 с.
5. ***Морозов, Н.П.*** О приведении полиномиальных систем к специальному виду / Н.П. Морозов // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2011. – № 2(38). – С. 43–49.

Поступила в редакцию 28.01.2013 г.