УДК 517+530.1

С.В. ЖЕСТКОВ, В.С. НОВАШИНСКАЯ*

# К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТЛЫХ И ТЕМНЫХ СОЛИТОНОВ (2+1)-МЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА СО СТЕПЕННЫМИ ЗАКОНАМИ НЕЛИНЕЙНОСТИ И ЗАТУХАНИЯ

*Известно [1-5], что нелинейные модели уравнений Шредингера с затуханием обладают рядом преимуществ перед классическими уравнениями Шредингера, используемыми в приложениях. Поэтому исследование вопросов, связанных с возможностью существования светлых и темных солитонов (2+1)-мерных нелинейных уравнений Шредингера (НУШ) со степенными законами нелинейности и затухания является актуальной задачей. В основу развиваемой методики исследования положен анализ механизма баланса между дисперсионными и нелинейными членами рассматриваемых уравнений, который и обеспечивает существование солитонов.*

* Выпускница физико-математического факультета 2009 г.

## I. Построение и анализ системы определяющих уравнений для НУШ (I)

Рассмотрим (2+1)-мерное НУШ

$$(\mathrm{I}):\quad iq_t + a\left(q_{xx} + q_{yy}\right) + b|q|^{2m} q = i\left[c_1 q_x + c_2 q_y\right]|q|^{2m}, \quad m > 0, \tag{1}$$

где $a$, $b$, $c_1$, $c_2$ – произвольные действительные числа. Солитонные решения уравнения (1) будем строить в виде

$$q(t,x,y) = u(t,x,y)\exp(i\xi), \quad \xi = k_1 x + k_2 y + \omega t + \varphi, \tag{2}$$

где $u(t,x,y)$ – неизвестная действительная волновая функция, $k_1$, $k_2$ – частоты солитона по осям $x, y$ соответственно, $\omega$ – частота солитона по $t$, $\varphi$ – начальная фаза. Подставляя (2) в (1), получим

$$\begin{gathered} iu_t - \omega u + a\left[u_{xx} + u_{yy} + 2i\left(k_1 u_x + k_2 u_y\right) - k^2 u\right] + bu^{2m+1} = \\ = i\left[c_1\left(u_x + ik_1 u\right) + c_2\left(u_y + ik_2 u\right)\right]u^{2m}, \quad k^2 \equiv k_1^2 + k_2^2. \end{gathered} \tag{3}$$

Отделяя мнимую и действительную части, из (3) найдем

$$\begin{gathered} \mathrm{Im}:\quad u_t + 2a\left(k_1 u_x + k_2 u_y\right) = \left(c_1 u_x + c_2 u_y\right)u^{2m}, \\ \mathrm{Re}:\quad -\omega u + a\left[u_{xx} + u_{yy} - k^2 u\right] + bu^{2m+1} = -\left(c_1 k_1 + c_2 k_2\right)u^{2m+1}. \end{gathered} \tag{4}$$

Система (4) является определяющей системой уравнений для солитонных решений вида (2), т.е. справедлива

**Теорема 1.** *Для того чтобы уравнение (1) имело решение вида (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (4).*

Решение системы (4) будем строить в форме бегущей волны, т.е.

$$u(t,x,y) = f(\eta), \quad \eta = \alpha_1 x + \alpha_2 y - vt + \psi, \tag{5}$$

где $\alpha_1$, $\alpha_2$ – величины, обратные к ширине солитона по осям $x, y$ соответственно, $v$ – скорость солитона, $\psi$ – начальная фаза. Подставляя (5) в (4), получим

$$-vf'(\eta) + 2a\left(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2\right)f'(\eta) = \left(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2\right)f'(\eta)f^{2m}(\eta), \tag{6}$$

$$-\omega f(\eta) + a\left[\alpha^2 f''(\eta) - k^2 f(\eta)\right] + bf^{2m+1}(\eta) = -\left(c_1 k_1 + c_2 k_2\right)f^{2m+1}(\eta), \quad \alpha^2 \equiv \alpha_1^2 + \alpha_2^2. \tag{7}$$

Предположим, что

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0. \tag{8}$$

Тогда из уравнения (6) найдем скорость солитона

$$v = 2a\left(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2\right). \tag{9}$$

Из уравнения (7) получим

$$a\alpha^2 f''(\eta) - \left(\omega + ak^2\right)f(\eta) + \left(b + c_1 k_1 + c_2 k_2\right)f^{2m+1}(\eta) = 0$$

или

$$a\alpha^2 f''(\eta) - Mf(\eta) + Nf^{2m+1}(\eta) = 0, \tag{10}$$

где

$$M \equiv \omega + ak^2, \quad N \equiv b + c_1k_1 + c_2k_2.$$

Таким образом, система определяющих уравнений (4) сводится к уравнению (10) при выполнении соотношений (8), (9).

Рассмотрим простейший случай, когда $f(\eta) \equiv d = const$. Тогда из уравнения (10) найдем

$$Nd^{2m} = M \quad \text{или} \quad d^{2m} = \frac{M}{N}, \quad \text{если } MN > 0. \tag{11}$$

**Теорема 2.** *Пусть $MN > 0$ и $d_*$ – корень уравнения (11). Тогда при выполнении соотношений (8), (9) уравнение (1) имеет решение вида*

$$q(t, x, y) = d_* \exp\{i(k_1x + k_2y + \omega t + \varphi)\},$$

которое описывает чисто колебательный процесс.

## Построение светлых (bright) солитонов НУШ (I)

Пусть выполнены соотношения (8), (9). Исследуем уравнение (10). В качестве неизвестной волновой функции $f(\eta)$ возьмем анзац вида [4]

$$f(\eta) = Ach^{-\mu}\eta, \quad \mu > 0, \tag{12}$$

где $A$ – искомая амплитуда солитона. Подставляя (12) в (10), получим

$$a\alpha^2\mu\left[(\mu+1)sh^2\eta - ch^2\eta\right] - Mch^2\eta + NA^{2m}ch^{2-2m\mu}\eta = 0. \tag{13}$$

Из анализа уравнения (13) следует, что

$$\mu = \frac{1}{m}, \quad \omega = a\left(\alpha^2\mu^2 - k^2\right), \quad A^{2m} = \alpha^2\mu(\mu+1)\frac{a}{N}, \quad \text{если } aN > 0. \tag{14}$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 3.** *Пусть $aN > 0$ и выполнены соотношения (8), (9). Тогда уравнение (1) имеет решение в виде светлого солитона*

$$q(t, x, y) = Ach^{-\frac{1}{m}}(\alpha_1x + \alpha_2y - vt + \psi)\exp\{i(k_1x + k_2y + \omega t + \varphi)\},$$

*параметры $A$, $\omega$ которого определяются формулами (14), причем огибающая светлого солитона $f(\eta)$ удовлетворяет следующим краевым условиям:*

$$f(-\infty) = f(+\infty) = 0.$$

## Построение темных (dark) солитонов НУШ (I)

Пусть выполнены соотношения (8), (9). Исследуем уравнение (10). В качестве неизвестной волновой функции $f(\eta)$ возьмем анзац вида [5]

$$f(\eta) = Ath^{\mu}\eta, \quad \mu > 0, \tag{15}$$

где $A$ – искомая амплитуда солитона. Подставляя (15) в (10), получим

$$a\alpha^2\mu\left[(\mu-1) - 2\mu th^2\eta + (\mu+1)th^4\eta\right] - Mth^2\eta + NA^{2m}th^{2+2m\mu}\eta = 0. \tag{16}$$

Из анализа уравнения (16) следует, что

$$\mu = \frac{1}{m} = 1, \quad \omega = -a\left(2\alpha^2 + k^2\right), \quad A^2 = -2\alpha^2 \frac{a}{N}, \quad \text{если } aN < 0. \qquad (17)$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 4.** *Пусть $m = 1$, $aN < 0$ и выполнены соотношения (8), (9). Тогда уравнение (1) имеет решение в виде темного солитона*

$$q(t, x, y) = Ath(\alpha_1 x + \alpha_2 y - vt + \psi)\exp\{i(k_1 x + k_2 y + \omega t + \varphi)\},$$

*параметры $A$, $\omega$ которого определяются формулами (17), причем функция $f(\eta)$ удовлетворяет следующим краевым условиям:*

$$f(-\infty) = -A, \quad f(+\infty) = A.$$

## II. Построение и анализ системы определяющих уравнений для НУШ (II)

Рассмотрим (2+1)-мерное НУШ

$$(\text{II}): \quad iq_t + a\left(q_{xx} + q_{yy}\right) + b|q|^{2m} q = i\left[c_1 q_x + c_2 q_y\right]|q|^{2m} + icq, \quad m > 0 \qquad (18)$$

с произвольными действительными коэффициентами $a$, $b$, $c$, $c_1$, $c_2$. Отметим, что наличие дополнительного линейного члена в правой части изменяет форму огибающей решения (5).

Солитонные решения уравнения (18) будем строить в виде (2). Подставляя (2) в (18), получим

$$\begin{aligned} &iu_t - \omega u + a\left[u_{xx} + u_{yy} + 2i\left(k_1 u_x + k_2 u_y\right) - k^2 u\right] + bu^{2m+1} = \\ &= i\left[c_1\left(u_x + ik_1 u\right) + c_2\left(u_y + ik_2 u\right)\right]u^{2m} + icu, \quad k^2 \equiv k_1^{\,2} + k_2^{\,2}. \end{aligned} \qquad (19)$$

Отделяя мнимую и действительную части, из (19) найдем

$$\begin{aligned} &\text{Im}: \; u_t + 2a\left(k_1 u_x + k_2 u_y\right) = \left(c_1 u_x + c_2 u_y\right)u^{2m} + cu, \\ &\text{Re}: \; -\omega u + a\left[u_{xx} + u_{yy} - k^2 u\right] + bu^{2m+1} = -\left(c_1 k_1 + c_2 k_2\right)u^{2m+1}. \end{aligned} \qquad (20)$$

Система (20) является определяющей системой уравнений для солитонных решений вида (2), т.е. справедлива

**Теорема 5.** *Для того чтобы уравнение (18) имело решение вида (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (20).*

Решение системы (20) будем строить в виде

$$u(t, x, y) = A(t) f(\eta), \quad \eta = \alpha_1 x + \alpha_2 y - vt + \psi, \qquad (21)$$

где $A(t)$ – искомая амплитуда солитона. Подставляя (21) в (20), получим

$$\begin{aligned} &\dot{A}(t) f(\eta) - vA(t) f'(\eta) + 2a\left(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2\right)A(t) f'(\eta) = \\ &= \left(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2\right)A(t) f'(\eta)\left[A(t) f(\eta)\right]^{2m} + cA(t) f(\eta), \end{aligned} \qquad (22)$$

$$-\omega A(t)f(\eta)+aA(t)\left[\alpha^2 f''(\eta)-k^2 f(\eta)\right]+b\left[A(t)f(\eta)\right]^{2m+1}= \\ =-(c_1k_1+c_2k_2)\left[A(t)f(\eta)\right]^{2m+1}, \quad \alpha^2\equiv\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2. \tag{23}$$

Предположим, что

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2=0. \tag{24}$$

Тогда из уравнения (22) найдем скорость солитона

$$v=2a(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2) \tag{25}$$

и амплитуду солитона

$$\dot{A}(t)=cA(t) \quad \text{или} \quad A(t)=A_0\exp(ct), \tag{26}$$

где $A_0$ – начальная амплитуда солитона. Из уравнения (23) получим

$$a\alpha^2 f''(\eta)-(\omega+ak^2)f(\eta)+A^{2m}(t)(b+c_1k_1+c_2k_2)f^{2m+1}(\eta)=0$$

или

$$a\alpha^2 f''(\eta)-Mf(\eta)+NA^{2m}(t)f^{2m+1}(\eta)=0, \tag{27}$$

где

$$M\equiv\omega+ak^2, \quad N\equiv b+c_1k_1+c_2k_2.$$

Таким образом, система определяющих уравнений (20) сводится к уравнению (27) при выполнении соотношений (24)–(26).

Предположим, что

$$N=0, \quad -\frac{M}{a\alpha^2}\equiv\lambda^2>0. \tag{28}$$

Тогда уравнение (27) сводится к уравнению математического маятника

$$f''(\eta)+\lambda^2 f(\eta)=0$$

с общим решением

$$f(\eta)=d_1\cos\lambda\eta+d_2\sin\lambda\eta,$$

где $d_1$, $d_2$ – произвольные постоянные.

Таким образом, справедлива

**Теорема 6.** *Пусть выполнены условия (24)–(26), (28). Тогда уравнение (18) имеет решение вида*

$$q(t,x,y)=A_0\exp(ct)\left[d_1\cos\lambda(\alpha_1x+\alpha_2y-vt+\psi)+d_2\sin\lambda(\alpha_1x+\alpha_2y-vt+\psi)\right]\times \\ \times\exp\{i(k_1x+k_2y+\omega t+\varphi)\}. \tag{29}$$

Анализ решения (29) показывает, что при $c<0$, $t>0$ решение экспоненциально затухает и описывает реальный физический процесс.

### III. Построение и анализ системы определяющих уравнений для кирального НУШ (III)

Рассмотрим (2+1)-мерное киральное НУШ

$$\text{(III)}: \quad iq_t + a\left(q_{xx} + q_{yy}\right) + b_1\left(iqq_x^* - iq^*q_x\right)^m q + b_2\left(iqq_y^* - iq^*q_y\right)^m q = \\ = i\left[c_1q_x + c_2q_y\right]\left|q\right|^{2m}, \quad m > 0 \tag{30}$$

с произвольными действительными коэффициентами $a$, $b_1$, $b_2$, $c_1$, $c_2$. Солитонные решения уравнения (30) будем строить в виде (2). Подставляя (2) в (30), получим

$$i\left[u_t + i\omega u\right] + a\left[u_{xx} + u_{yy} + 2i\left(k_1u_x + k_2u_y\right) - k^2u\right] + 2^m\left(k_1^mb_1 + k_2^mb_2\right)u^{2m+1} = \\ = i\left[c_1\left(u_x + ik_1u\right) + c_2\left(u_y + ik_2u\right)\right]u^{2m}, \quad k^2 \equiv k_1{}^2 + k_2{}^2. \tag{31}$$

Отделяя мнимую и действительную части, из (31) найдем

$$\text{Im}: \quad u_t + 2a\left(k_1u_x + k_2u_y\right) = \left(c_1u_x + c_2u_y\right)u^{2m}, \\ \text{Re}: \quad -\omega u + a\left[u_{xx} + u_{yy} - k^2u\right] + Hu^{2m+1} = -\left(c_1k_1 + c_2k_2\right)u^{2m+1}, \tag{32}$$

где

$$H \equiv 2^m\left(k_1^mb_1 + k_2^mb_2\right).$$

Система (32) является определяющей системой уравнений для солитонных решений вида (2), т.е. справедлива

**Теорема 7.** *Для того чтобы уравнение (30) имело решение вида (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (32).*

Решение системы (32) будем строить в виде (5). Подставляя (5) в (32), получим

$$-vf'(\eta) + 2a\left(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2\right)f'(\eta) = \left(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2\right)f'(\eta)f^{2m}(\eta), \tag{33}$$

$$a\alpha^2 f''(\eta) - \left(\omega + ak^2\right)f(\eta) + Hf^{2m+1}(\eta) = -\left(c_1k_1 + c_2k_2\right)f^{2m+1}(\eta), \quad \alpha^2 \equiv \alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2. \tag{34}$$

Предположим, что

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0. \tag{35}$$

Тогда из уравнения (33) найдем скорость солитона

$$v = 2a\left(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2\right). \tag{36}$$

Из уравнения (34) получим

$$a\alpha^2 f''(\eta) - \left(\omega + ak^2\right)f(\eta) + \left(H + c_1k_1 + c_2k_2\right)f^{2m+1}(\eta) = 0$$

или

$$a\alpha^2 f''(\eta) - Mf(\eta) + Nf^{2m+1}(\eta) = 0, \tag{37}$$

где

$$M \equiv \omega + ak^2, \quad N \equiv H + c_1k_1 + c_2k_2.$$

Таким образом, система определяющих уравнений (32) сводится к уравнению (37) при выполнении соотношений (35), (36).

### Построение светлых и темных солитонов кирального НУШ (III)

Уравнение (37) совпадает с уравнением (10) по форме. Они различаются лишь коэффициентами при нелинейном члене. Поэтому на основании теоремы 3 получаем следующий результат.

**Теорема 8.** *Пусть $aN > 0$ и выполнены соотношения (35), (36). Тогда уравнение (30) имеет решение в виде светлого солитона*

$$q(t,x,y) = Ach^{-\frac{1}{m}}(\alpha_1 x + \alpha_2 y - vt + \psi)\exp\{i(k_1 x + k_2 y + \omega t + \varphi)\},$$

*параметры $A$, $\omega$ которого определяются формулами*

$$\omega = a(\alpha^2\mu^2 - a^2), \quad A^{2m} = \alpha^2\mu(\mu+1)\frac{a}{N}, \quad \mu = \frac{1}{m}.$$

На основании теоремы 4 устанавливаем следующий результат.

**Теорема 9.** *Пусть $m = 1$, $aN < 0$ и выполнены соотношения (35), (36). Тогда уравнение (30) имеет решение в виде темного солитона*

$$q(t,x,y) = Ath(\alpha_1 x + \alpha_2 y - vt + \psi)\exp\{i(k_1 x + k_2 y + \omega t + \varphi)\},$$

*параметры $A$, $\omega$ которого определяются формулами*

$$\omega = -a(2\alpha^2 + k^2), \quad A^2 = -\frac{2a\alpha^2}{N}.$$

### IV. Построение и анализ системы определяющих уравнений для НУШ (IV) с переменными коэффициентами

Рассмотрим (2+1)-мерное НУШ с переменными коэффициентами

$$\text{(IV)}: \quad iq_t + a(t)(q_{xx} + q_{yy}) + b(t)|q|^{2m} q = i[c_1(t)q_x + c_2(t)q_y]|q|^{2m}, \quad m > 0, \quad (38)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c_1(t)$, $c_2(t)$ – произвольные непрерывные и интегрируемые на $R$ функции. Известно [1], что в этом случае скорость и частота солитона также являются функциями времени. Поэтому, следуя работе [4], солитонные решения будем строить в виде

$$q(t,x,y) = u(t,x,y)\exp(i\xi), \quad \xi = k_1 x + k_2 y + \int_0^t \omega(\tau)d\tau + \varphi, \quad (39)$$

где $\omega(\tau)$ – искомая частота солитона. Подставляя (39) в (38), получим

$$\begin{aligned} &iu_t - \omega(t)u + a(t)[u_{xx} + u_{yy} + 2i(k_1 u_x + k_2 u_y) - k^2 u] + b(t)u^{2m+1} = \\ &= i[c_1(t)(u_x + ik_1 u) + c_2(t)(u_y + ik_2 u)]u^{2m}, \quad k^2 \equiv k_1^2 + k_2^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Отделяя мнимую и действительную части, из (40) найдем

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}: \quad u_t + 2a(t)[k_1 u_x + k_2 u_y] = [c_1(t)u_x + c_2(t)u_y]u^{2m}, \\ &\mathrm{Re}: \quad -\omega(t)u + a(t)[u_{xx} + u_{yy} - k^2 u] + b(t)u^{2m+1} = -[c_1(t)k_1 + c_2(t)k_2]u^{2m+1}. \end{aligned} \tag{41}$$

Система (41) является определяющей системой уравнений для солитонных решений вида (39), т.е. справедлива

**Теорема 10.** *Для того чтобы уравнение (38) имело решение вида (39) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (41).*

Решение системы (41) будем строить в виде

$$u(t,x,y) = f(\eta), \quad \eta = \alpha_1 x + \alpha_2 y - \int_0^t v(\tau)d\tau + \psi, \tag{42}$$

где $v(\tau)$ – искомая скорость солитона. Подставляя (42) в (41), получим

$$-v(t)f'(\eta) + 2a(t)[k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2]f'(\eta) = [c_1(t)\alpha_1 + c_2(t)\alpha_2]f'(\eta)f^{2m}(\eta), \tag{43}$$

$$\begin{aligned} &-\omega(t)f(\eta) + a(t)[\alpha^2 f''(\eta) - k^2 f(\eta)] + b(t)f^{2m+1}(\eta) = \\ &= -[k_1c_1(t) + k_2c_2(t)]f^{2m+1}(\eta), \quad \alpha^2 \equiv \alpha_1^2 + \alpha_2^2. \end{aligned} \tag{44}$$

Предположим, что

$$\alpha_1 c_1(t) + \alpha_2 c_2(t) \equiv 0, \quad \forall t \in R. \tag{45}$$

Тогда из уравнения (43) найдем скорость солитона

$$v(t) = 2a(t)(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2). \tag{46}$$

Из уравнения (44) получим

$$\alpha^2 a(t)f''(\eta) - [\omega(t) + k^2 a(t)]f(\eta) + [b(t) + k_1c_1(t) + k_2c_2(t)]f^{2m+1}(\eta) = 0$$

или

$$\alpha^2 a(t)f''(\eta) - M(t)f(\eta) + N(t)f^{2m+1}(\eta) = 0, \tag{47}$$

где

$$M(t) \equiv \omega(t) + k^2 a(t), \quad N(t) \equiv b(t) + k_1c_1(t) + k_2c_2(t).$$

Таким образом, система определяющих уравнений (41) сводится к уравнению (47) при выполнении соотношений (45), (46). Отметим, что в уравнении (47) переменная $t$ играет роль параметра.

## Построение светлых и темных солитонов НУШ (IV)

Пусть выполнены соотношения (45), (46). Исследуем уравнение (47). В качестве неизвестной волновой функции $f(\eta)$ возьмем анзац вида (12). Тогда из формул (14) получим

$$\mu = \frac{1}{m}, \quad \omega(t) = a(t)(\alpha^2\mu^2 - k^2), \quad A^{2m} = \alpha^2\mu(\mu+1)\frac{a(t)}{N(t)}, \tag{48}$$

если

$$\frac{a(t)}{N(t)} \equiv const = \lambda > 0, \quad \forall t \in R. \tag{49}$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 11.** *Пусть выполнены условия (45), (46), (49). Тогда уравнение (38) имеет решение в виде светлого солитона*

$$q(t,x,y) = Ach^{-\frac{1}{m}}\left(\alpha_1 x + \alpha_2 y - \int_0^t v(\tau)d\tau + \psi\right)\exp\left\{i\left(k_1 x + k_2 y + \int_0^t \omega(\tau)d\tau + \varphi\right)\right\},$$

*параметры $A$, $\omega(t)$ которого определяются формулами (48).*

Для построения темных солитонов в качестве неизвестной волновой функции $f(\eta)$ возьмем анзац вида (15). Тогда из формул (17) получим

$$\mu = \frac{1}{m} = 1, \quad \omega(t) = -a(t)(2\alpha^2 + k^2), \quad A^2 = -2\alpha^2\frac{a(t)}{N(t)}, \tag{50}$$

если

$$\frac{a(t)}{N(t)} \equiv const = d < 0, \quad \forall t \in R. \tag{51}$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 12.** *Пусть $m = 1$ и выполнены условия (45), (46), (51). Тогда уравнение (38) имеет решение в виде темного солитона*

$$q(t,x,y) = Ath\left(\alpha_1 x + \alpha_2 y - \int_0^t v(\tau)d\tau + \psi\right)\exp\left\{i\left(k_1 x + k_2 y + \int_0^t \omega(\tau)d\tau + \varphi\right)\right\},$$

*параметры $A$, $\omega(t)$ которого определяются формулами (50).*

## V. Построение и анализ системы определяющих уравнений для НУШ (V) с переменными коэффициентами

Рассмотрим (2+1)-мерное НУШ с переменными коэффициентами

(V): $iq_t + a(t)(q_{xx} + q_{yy}) + b(t)|q|^{2m} q = i[c_1(t)q_x + c_2(t)q_y]|q|^{2m} + ic(t)q, \quad m > 0,$ (52)

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $c_1(t)$, $c_2(t)$ – произвольные непрерывные и интегрируемые на $R$ функции. Солитонные решения будем строить в виде (39). Подставляя (39) в (52), получим

$$\begin{aligned} &iu_t - \omega(t)u + a(t)[u_{xx} + u_{yy} + 2i(k_1 u_x + k_2 u_y) - k^2 u] + b(t)u^{2m+1} = \\ &= i[c_1(t)(u_x + ik_1 u) + c_2(t)(u_y + ik_2 u)]u^{2m} + ic(t)u, \quad k^2 \equiv k_1^2 + k_2^2. \end{aligned} \tag{53}$$

Отделяя мнимую и действительную части, из (53) найдем

$$\begin{aligned} \text{Im}: \quad & u_t + 2a(t)\left[k_1 u_x + k_2 u_y\right] = \left[c_1(t)u_x + c_2(t)u_y\right]u^{2m} + c(t)u, \\ \text{Re}: \quad & -\omega(t)u + a(t)\left[u_{xx} + u_{yy} - k^2 u\right] + b(t)u^{2m+1} = -\left[c_1(t)k_1 + c_2(t)k_2\right]u^{2m+1}. \end{aligned} \tag{54}$$

Система (54) является определяющей системой уравнений для солитонных решений вида (39), т. е. справедлива

**Теорема 13.** *Для того чтобы уравнение (52) имело решение вида (39) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (54).*

Решение системы (54) будем строить в виде

$$u(t,x,y) = A(t)f(\eta), \quad \eta = \alpha_1 x + \alpha_2 y - \int_0^t v(\tau)d\tau + \psi, \tag{55}$$

где $A(t)$, $v(\tau)$ – искомые амплитуда и скорость солитона соответственно. Подставляя (55) в (54), получим

$$\begin{aligned} & \dot{A}(t)f(\eta) - v(t)A(t)f'(\eta) + 2a(t)\left[k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2\right]A(t)f'(\eta) = \\ & = \left[\alpha_1 c_1(t) + \alpha_2 c_2(t)\right]A(t)f'(\eta)\left[A(t)f(\eta)\right]^{2m} + c(t)A(t)f(\eta), \end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned} & \alpha^2 a(t)A(t)f''(\eta) - \left[\omega(t) + k^2 a(t)\right]A(t)f(\eta) + b(t)\left[A(t)f(\eta)\right]^{2m+1} = \\ & = -\left[k_1 c_1(t) + k_2 c_2(t)\right]\left[A(t)f(\eta)\right]^{2m+1}, \quad \alpha^2 \equiv \alpha_1^2 + \alpha_2^2. \end{aligned} \tag{57}$$

Предположим, что

$$\alpha_1 c_1(t) + \alpha_2 c_2(t) \equiv 0, \quad \forall t \in R. \tag{58}$$

Тогда из уравнения (56) найдем скорость солитона

$$v(t) = 2a(t)(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) \tag{59}$$

и амплитуду солитона

$$\dot{A}(t) = c(t)A(t) \quad \text{или} \quad A(t) = A_0 \exp\left(\int_0^t c(\tau)d\tau\right). \tag{60}$$

Из уравнения (57) получим

$$\alpha^2 a(t)f''(\eta) - \left[\omega(t) + k^2 a(t)\right]f(\eta) + \left[b(t) + k_1 c_1(t) + k_2 c_2(t)\right]A^{2m}(t)f^{2m+1}(\eta) = 0$$

или

$$\alpha^2 a(t)f''(\eta) - M(t)f(\eta) + N(t)A^{2m}(t)f^{2m+1}(\eta) = 0, \tag{61}$$

где

$$M(t) \equiv \omega(t) + k^2 a(t), \quad N(t) \equiv b(t) + k_1 c_1(t) + k_2 c_2(t).$$

Таким образом, система определяющих уравнений (54) сводится к уравнению (61) при выполнении соотношений (58)–(60). Предположим, что

$$N(t) \equiv 0, \forall t \in R, \quad -\frac{M(t)}{\alpha^2 a(t)} \equiv const = \lambda^2 > 0, \forall t \in R. \tag{62}$$

Тогда уравнение (61) сводится к уравнению математического маятника

$$f''(\eta)+\lambda^2 f(\eta)=0$$

с общим решением

$$f(\eta)=d_1\cos\lambda\eta+d_2\sin\lambda\eta,$$

где $d_1$, $d_2$ – произвольные постоянные.

Таким образом, справедлива

**Теорема 14.** *Пусть выполнены условия (58)-(60), (62). Тогда уравнение (52) имеет решение вида*

$$\begin{gathered}q(t,x,y)=A_0\exp\left(\int_0^t c(\tau)d\tau\right)\left[d_1\cos\lambda\left(\alpha_1 x+\alpha_2 y-\int_0^t v(\tau)d\tau+\psi\right)+\right.\\ \left.+d_2\sin\lambda\left(\alpha_1 x+\alpha_2 y-\int_0^t v(\tau)d\tau+\psi\right)\right]\exp\left\{i\left(k_1x+k_2y+\int_0^t\omega(\tau)d\tau+\varphi\right)\right\}.\end{gathered}\tag{63}$$

Если предположить, что $c(t)\le 0$ при $\forall t\ge 0$ и $c(t)\ge 0$ при $\forall t\le 0$, то решение (63) экспоненциально затухает и описывает реальный физический процесс. Поэтому уравнение (52) является предпочтительнее модели (18) с постоянными коэффициентами.

## VI. Построение и анализ системы определяющих уравнений для кирального НУШ (VI) с переменными коэффициентами

Рассмотрим (2+1)-мерное киральное НУШ

$$\begin{gathered}(\mathrm{VI}):\quad iq_t+a(t)(q_{xx}+q_{yy})+b_1(t)(iqq_x^*-iq^*q_x)^m q+b_2(t)(iqq_y^*-iq^*q_y)^m q=\\ =i[c_1(t)q_x+c_2(t)q_y]|q|^{2m},\quad m>0,\end{gathered}\tag{64}$$

где $a(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$, $c_1(t)$, $c_2(t)$ – произвольные непрерывные и интегрируемые на $R$ функции. Солитонные решения уравнения (64) будем строить в виде (39). Подставляя (39) в (64), получим

$$\begin{gathered}iu_t-\omega(t)u+a(t)\left[u_{xx}+u_{yy}+2i(k_1u_x+k_2u_y)-k^2u\right]+2^m\left[k_1^m b_1(t)+k_2^m b_2(t)\right]u^{2m+1}=\\ =i\left[c_1(t)(u_x+ik_1u)+c_2(t)(u_y+ik_2u)\right]u^{2m},\quad k^2\equiv k_1^{\ 2}+k_2^{\ 2}.\end{gathered}\tag{65}$$

Отделяя мнимую и действительную части, из (65) найдем

$$\begin{gathered}\mathrm{Im}:\quad u_t+2a(t)\left[k_1u_x+k_2u_y\right]=\left[c_1(t)u_x+c_2(t)u_y\right]u^{2m},\\ \mathrm{Re}:\quad -\omega(t)u+a(t)\left[u_{xx}+u_{yy}-k^2u\right]+H(t)u^{2m+1}=-\left[k_1c_1(t)+k_2c_2(t)\right]u^{2m+1},\end{gathered}\tag{66}$$

где

$$H(t)\equiv 2^m\left[k_1^m b_1(t)+k_2^m b_2(t)\right].$$

Система (66) является определяющей системой уравнений для солитонных решений вида (39), т.е. справедлива

**Теорема 15.** *Для того чтобы уравнение (64) имело решение вида (39) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (66).*

Решение системы (66) будем строить в виде (42). Подставляя (42) в (66), получим

$$-v(t)f'(\eta)+2a(t)(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)f'(\eta)=[\alpha_1c_1(t)+\alpha_2c_2(t)]f'(\eta)f^{2m}(\eta), \quad (67)$$

$$-\omega(t)f(\eta)+a(t)[\alpha^2f''(\eta)-k^2f(\eta)]+H(t)f^{2m+1}(\eta)=-[k_1c_1(t)+k_2c_2(t)]f^{2m+1}(\eta), \quad (68)$$

$$\alpha^2\equiv\alpha_1^{\,2}+\alpha_2^{\,2}.$$

Предположим, что

$$\alpha_1c_1(t)+\alpha_2c_2(t)\equiv 0, \quad \forall t\in R. \quad (69)$$

Тогда из уравнения (67) найдем скорость солитона

$$v(t)=2a(t)[k_1\alpha_1+k_2\alpha_2]. \quad (70)$$

Из уравнения (68) получим

$$\alpha^2a(t)f''(\eta)-[\omega(t)+k^2a(t)]f(\eta)+[H(t)+k_1c_1(t)+k_2c_2(t)]f^{2m+1}(\eta)=0$$

или

$$\alpha^2a(t)f''(\eta)-M(t)f(\eta)+N(t)f^{2m+1}(\eta)=0, \quad (71)$$

где

$$M(t)\equiv\omega(t)+k^2a(t), \quad N(t)\equiv H(t)+k_1c_1(t)+k_2c_2(t).$$

Таким образом, система определяющих уравнений (66) сводится к уравнению (71) при выполнении соотношений (69), (70).

## Построение светлых и темных солитонов кирального НУШ (VI) с переменными коэффициентами

В уравнении (71) переменная $t$ играет роль параметра. Поэтому на основании теоремы 8 получаем следующий результат.

**Теорема 16.** *Пусть выполнены условия (69), (70) и неравенство*

$$\frac{a(t)}{N(t)}\equiv const=\lambda>0, \quad \forall t\in R.$$

*Тогда уравнение (64) имеет решение в виде светлого солитона*

$$q(t,x,y)=A\,ch^{-\frac{1}{m}}\left(\alpha_1x+\alpha_2y-\int_0^t v(\tau)d\tau+\psi\right)\exp\left\{i\left(k_1x+k_2y+\int_0^t\omega(\tau)d\tau+\varphi\right)\right\},$$

*параметры $A$, $\omega(t)$, которого определяются формулами*

$$\omega(t)=a(t)(\alpha^2\mu^2-k^2), \quad A^{2m}=\alpha^2\mu(\mu+1)\frac{a(t)}{N(t)}, \quad \mu=\frac{1}{m}.$$

На основании теоремы 9 устанавливаем следующий результат.

**Теорема 17.** *Пусть* $m=1$, *выполнены условия (69), (70) и неравенство*

$$\frac{a(t)}{N(t)} \equiv const = d < 0, \quad \forall t \in R.$$

*Тогда уравнение (64) имеет решение в виде темного солитона*

$$q(t,x,y) = Ath\left(\alpha_1 x + \alpha_2 y - \int_0^t v(\tau)d\tau + \psi\right)\exp\left\{i\left(k_1 x + k_2 y + \int_0^t \omega(\tau)d\tau + \varphi\right)\right\},$$

*параметры* $A$, $\omega(t)$ *которого определяются формулами*

$$\omega(t) = -a(t)\left(2\alpha^2 + k^2\right), \quad A^2 = -2\alpha^2 \frac{a(t)}{N(t)}.$$

Таким образом, в работе развита методика исследования солитонных решений (2+1)-мерных НУШ различных типов со степенными законами нелинейности и затухания.

## *СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ*


1. ***Biswas, A.*** Optical solitons with time-dependent dispersion, nonlinearity and attenuation in a Kerr-Law media / A. Biswas // Int. J. Theor. Phys. – 2009. – Vol. 48. – P. 256–260.
2. ***Biswas, A.*** Chiral solitons with time-dependent coefficients / A. Biswas // Int. J. Theor. Phys. – 2010. – Vol. 49. – P. 79–83.
3. ***Biswas, A.*** Chiral solitons with Bohm potential by He"s variational principle / A. Biswas, D. Milovic // Ядерная физика. – 2011. – Т. 74. – № 5. – С. 781–783.
4. ***Жестков, С.В.*** О существовании оптических солитонов (2+1)-мерного уравнения Шредингера с зависящими от времени коэффициентами и степенным законом нелинейности / С.В. Жестков, В.С. Новашинская // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования : материалы научной конференции "Герценовские чтения – 2012", Санкт-Петербург, 16–21 апреля 2012 г. / БАН. – СПб., 2012. – С. 55–57.
5. ***Жестков, С.В.*** О существовании (1+2)-мерных солитонов кирального уравнения Шредингера со степенным законом нелинейности / С.В. Жестков, В.С. Новашинская // Доклады НАН Беларуси. – 2012. –Т. 56. – № 4. – С. 32–36.


Поступила в редакцию 23.11.2012 г.