УДК 512.548

А.М. ГАЛЬМАК

ВЕКТОРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Упорядоченные наборы биекций конечных множеств рассматривал Э. Пост, называя такие наборы полиадическими подстановками. Это название объясняется тем, что на множестве всех рассматриваемых упорядоченных наборов Э. Пост определил полиадическую операцию, являющуюся многоместным аналогом операции умножения обычных подстановок. Относительно этой многоместной операции множество всех полиадических подстановок является полиадической группой. Представляет интерес изучение упорядоченных наборов произвольных отображений, а не только биекций, как у Э. Поста.

Введение

Согласно Э. Посту [1], $(k + 1)$-арная подстановка – это упорядоченный набор $\{f_1, f_2, ..., f_k\}$ взаимно однозначных отображений

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_{k-1}} A_k \xrightarrow{f_k} A_1,$$

где $A_1, ..., A_k$ – конечные множества одинаковой мощности. Можно заметить, что в определении $(k + 1)$-арной подстановки участвует циклическая подстановка $(12 \ldots k) \in \mathrm{S}_k$, где S_k – множество всех подстановок на множестве $\{1, 2, ..., k\}$. Эта же циклическая подстановка участвует в определении полиадической операции, которую Э. Пост определил на множестве всех k-компонентных полиадических подстановок. В данной статье определяется множество $\mathbf{F}(S_k, A_1, ..., A_k)$, элементы которого называются k-компонентными векторными отображениями, а затем для любой подстановки $\sigma \in \mathrm{S}_k$ на этом множестве определяется полиадическая операция $[\ ]_{m,k}$. Для подстановки $\sigma = (12 \ldots k)$ и конечных множеств $A_1, ..., A_k$ одинаковой мощности множество $\mathbf{F}(S_k, A_1, ..., A_k)$ включает в себя множество всех $(k + 1)$-арных подстановок Э. Поста. При этом для подстановки $\sigma = (12 \ldots k)$ полиадическая операция $[\ ]_{m,k}$ совпадает с полиадической операцией Э. Поста. Цель данной работы – изучение полиадических операций, в том числе операции $[\ ]_{m,k}$ на подмножествах множества $\mathbf{F}(S_k, A_1, ..., A_k)$.

1 Операция $[\ ]_{m,k}$

Пусть $A_1, \ldots A_k$ $(k \geq 1)$ – произвольные множества. Для всякой подстановки $\sigma \in S_k$ определим множество $\mathbf{F}(\sigma, A_1, \ldots A_k)$ всех пар $(\sigma, \mathbf{f}) = (\sigma, (f_1, ..., f_k))$, где f_j – отображение A_j в $A_{\sigma(j)}$, $j = 1, ..., k$.

Ясно, что если $\sigma \neq \tau$, то $\mathbf{F}(\sigma, A_1, ..., A_k) \cap \mathbf{F}(\tau, A_1, ..., A_k) = \varnothing$.

Если $T \subseteq S_k$, то положим $\mathbf{F}(T, A_1, ..., A_k) = \bigcup\limits_{\sigma \in T} \mathbf{F}(\sigma, A_1, ..., A_k)$.

Определение 1.1. Элементы множества $\mathbf{F}(S_k, A_1, ..., A_k)$ называются *k-компонентными векторными отображениями* или *вектор-отображениями* набора $(A_1, ..., A_k)$. Любой элемент

$$(\sigma, \mathbf{f}) = (\sigma, (f_1, ..., f_k)) \in \mathbf{F}(\sigma, A_1, ..., A_k) \subseteq \mathbf{F}(S_k, A_1, ..., A_k)$$

называется *k-компонентным вектор-отображением, соответствующим подстановке* σ.

При $k = 1$ множество S_1 состоит из одной тождественной подстановки ε, а множество $\mathbf{F}(\varepsilon, A_1)$ совпадает с множеством $\mathbf{F}(A_1)$ всех отображений A_1 в себя. Это означает, что определение 1.1 обобщает определение отображения множества в себя. Однако, как несложно заметить, это определение не может рассматриваться как обобщение отображения одного произвольного множества в другое произвольное множество. Таким обобщением является введенное С.А. Русаковым [2] понятие "последовательности отображений множеств".

Если для обозначения множества всех отображений A в B использовать символ $\mathbf{F}(A, B)$, то

$$\mathbf{F}(\sigma, A_1, \dots, A_k) = \{\sigma\}\times(\mathbf{F}(A_1, A_{\sigma(1)}) \times \dots \times \mathbf{F}(A_k, A_{\sigma(k)})),$$
$$\mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k) = T\times (\mathbf{F}(A_1, A_{\sigma(1)}) \times \dots \times \mathbf{F}(A_k, A_{\sigma(k)})),$$
$$\mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k) = S_k \times (\mathbf{F}(A_1, A_{\sigma(1)}) \times \dots \times \mathbf{F}(A_k, A_{\sigma(k)})).$$

Зафиксируем $m \geq 2$ и определим на множестве $\mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k)$ m-арную операцию $[\ ]_{m,k}$ следующим образом: для любых

$$(\sigma_i, \mathbf{f}_i) = (\sigma_i, (f_{i1}, \dots, f_{ik})) \in \mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k),\ i = 1, \dots, m \tag{1}$$

положим

$$[(\sigma_1, \mathbf{f}_1)(\sigma_2, \mathbf{f}_2) \dots (\sigma_m, \mathbf{f}_m)]_{m,k} = (\sigma, (g_1, \dots, g_k)) = (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{g}), \tag{2}$$

где

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \dots \sigma_m, \tag{3}$$

$$g_j = f_{1j} f_{2\sigma_1(j)} f_{3\sigma_1\sigma_2(j)} \dots f_{m\sigma_1\dots\sigma_{m-1}(j)} : A_j \to A_{\sigma(j)},\ j = 1, \dots, k. \tag{4}$$

Как обычно, полагаем $\sigma_s(\dots\sigma_2(\sigma_1(j))\dots) = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_s(j)$.

Заметим, что в определении операции $[\ ]_{m,k}$ подстановки $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ не обязательно все различные.

В определении операции $[\ ]_{m,k}$ можно считать $m = 1$. В этом случае имеем один набор $(\sigma_1, \mathbf{f}_1) = (\sigma_1, (f_{11}, \dots f_{1k}))$, а также $\sigma = \sigma_1$, $g_j = f_{1j}$, $(\sigma, \mathbf{g}) = (\sigma_1, \mathbf{f}_1)$. Таким образом $[(\sigma_1, \mathbf{f}_1)]_{1,k} = (\sigma_1, \mathbf{f}_1)$.

Определим на множестве S_k m-арную операцию $(\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_m)_m = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_m$, которая, как не сложно заметить, является ассоциативной. Другими словами $< S_k, (\ )_m >$ – m-арная полугруппа. Более того, $< S_k, (\ )_m >$ – m-арная группа, производная от симметрической группы S_k.

Предложение 1.1. *Если подмножество $T \subseteq S_k$ замкнуто относительно m-арной операции $(\ )_m$, то множество $\mathbf{F}(T, A_1, \dots A_k)$ замкнуто относительно m-арной операции $[\ ]_{m,k}$, то есть $< \mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k), [\ ]_{m,k} >$ – m-арный подгруппоид m-арного группоида $< \mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k), [\ ]_{m,k} >$.*

Доказательство. Если $(\sigma_i, \mathbf{f}_i) \in \mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k)$, $i = 1, \dots, m$, то из (2) – (4) и замкнутости T относительно m-арной операции $(\ )_m$, вытекает

$$[(\sigma_1, \mathbf{f}_1) \dots (\sigma_m, \mathbf{f}_m)]_{m,k} \in \mathbf{F}(\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_m, A_1, \dots, A_k) \subseteq \mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k).$$

Предложение доказано.

Замечание 1.1. Если T – подполугруппа группы S_k, то множество T замкнуто относительно m-арной операции $(\ )_m$, то есть $< T, (\ )_m >$ – m-арная полугруппа.

Из предложения 1.1, ввиду замечания 1.1, вытекает

Следствие 1.1. *Если T – подполугруппа группы S_k, то множество $\mathbf{F}(T, A_1, ..., A_k)$ замкнуто относительно m-арной операции $[\ ]_{m,k}$, то есть $< \mathbf{F}(T, A_1, ..., A_k), [\ ]_{m,k} >$ – m-арный подгруппоид m-арного группоида $< \mathbf{F}(S_k, A_1, ..., A_k), [\ ]_{m,k} >$.*

2 Операция $[\ ]_{m,T,k}$

Для фиксированного $m \geq 2$ и фиксированного подмножества $T \subseteq S_k$ определим на $\mathbf{F}(S_k, A_1, ..., A_k)$ частичную m-арную операцию $[\ ]_{m,T,k}$ следующим образом: для любых m k-компонентных вектор-отображений (1) положим

$$[(\sigma_1, \mathbf{f}_1)(\sigma_2, \mathbf{f}_2) \ldots (\sigma_m, \mathbf{f}_m)]_{m,T,k} = [(\sigma_1, \mathbf{f}_1)(\sigma_2, \mathbf{f}_2) \ldots (\sigma_m, \mathbf{f}_m)]_{m,k},$$

если $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m \in T$; если же по крайней мере одна из подстановок $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m$ не принадлежит T, то элемент $[(\sigma_1, \mathbf{f}_1)(\sigma_2, \mathbf{f}_2) \ldots (\sigma_m, \mathbf{f}_m)]_{m,T,k}$ считается неопределенным.

Ясно, что операции $[\ ]_{m,k}$ и $[\ ]_{m,S_k,k}$, определенные на всем множестве $\mathbf{F}(S_k, A_1, ..., A_k)$, совпадают: $[\ ]_{m,k} = [\ ]_{m,S_k,k}$.

Если $\sigma_1, ..., \sigma_m \in T$, то согласно определению операции $[\ ]_{m,T,k}$

$$[(\sigma_1, \mathbf{f}_1)(\sigma_2, \mathbf{f}_2) \ldots (\sigma_m, \mathbf{f}_m)]_{m,T,k} = (\sigma, (g_1, ..., g_k)) = (\sigma, \mathbf{g}),$$

где σ и g_j определяются с помощью (3) и (4) соответственно.

Замечание 2.1. Если подмножество $T \subseteq S_k$ замкнуто относительно m-арной операции $(\ )_m$, то согласно определению операции $[\ ]_{m,T,k}$ она определена для любых m элементов множества $\mathbf{F}(T, A_1, ..., A_k)$, а ее результат принадлежит этому же множеству. Поэтому в этом случае операции $[\ ]_{m,k}$ и $[\ ]_{m,T,k}$ определены на всем указанном множестве и совпадают.

В связи с этим предложение 1.1 и следствие 1.1 позволяют сформулировать следующее

Предложение 2.1. *Если подмножество $T \subseteq S_k$ замкнуто относительно m-арной операции $(\ )_m$, в частности, если T – подполугруппа группы S_k, то $< \mathbf{F}(T, A_1, ..., A_k), [\ ]_{m,T,k} >$ – m-арный группоид.*

3 Операция $[\ ]_{m,\tau_1,\ldots,\tau_m,k}$

Для фиксированного $m \geq 2$ и фиксированных подстановок $\tau_1, \ldots, \tau_m \in S_k$ определим на $\mathbf{F}(S_k, A_1, \ldots, A_k)$ частичную m-арную операцию $[\ ]_{m,\tau_1,\ldots,\tau_m,k}$ следующим образом: для любых m k-компонентных вектор-отображений (1) положим

$$[(\sigma_1, \mathbf{f}_1)(\sigma_2, \mathbf{f}_2) \ldots (\sigma_m, \mathbf{f}_m)]_{m,\tau_1,\ldots,\tau_m,k} = [(\sigma_1, \mathbf{f}_1)(\sigma_2, \mathbf{f}_2) \ldots (\sigma_m, \mathbf{f}_m)]_{m,k},$$

если $\sigma_1 = \tau_1, \ldots, \sigma_m = \tau_m$; если же хотя бы одно из этих равенств не выполняется, то элемент $[(\sigma_1, \mathbf{f}_1)(\sigma_2, \mathbf{f}_2) \ldots (\sigma_m, \mathbf{f}_m)]_{m,\tau_1,\ldots,\tau_m,k}$ считается неопределенным.

Замечание 3.1. Если $\tau_1, \ldots, \tau_m \in T \subseteq S_k$, то, ввиду определений операций $[\ ]_{m,\tau_1,\ldots,\tau_m,k}$ и $[\ ]_{m,T,k}$, имеем

$$[(\tau_1, \mathbf{f}_1)(\tau_2, \mathbf{f}_2) \ldots (\tau_m, \mathbf{f}_m)]_{m,\tau_1,\ldots,\tau_m,k} =$$

$$[(\tau_1, \mathbf{f}_1)(\tau_2, \mathbf{f}_2) \ldots (\tau_m, \mathbf{f}_m)]_{m,k} = [(\tau_1, \mathbf{f}_1)(\tau_2, \mathbf{f}_2) \ldots (\tau_m, \mathbf{f}_m)]_{m,T,k},$$

для любых

$$(\tau_1, \mathbf{f}_1), (\tau_2, \mathbf{f}_2), \ldots, (\tau_m, \mathbf{f}_m) \in \mathbf{F}(T, A_1, \ldots, A_k).$$

Замечание 3.2. Если $\tau_1, \ldots, \tau_m$, $\tau = \tau_1 \ldots \tau_m \in T \subseteq S_k$, то, ввиду (2) и (3),

$$[(\tau_1, \mathbf{f}_1)(\tau_2, \mathbf{f}_2) \ldots (\tau_m, \mathbf{f}_m)]_{m,k} \in \mathbf{F}(T, A_1, \ldots, A_k),$$

откуда, учитывая замечание 3.1, получаем

$$[(\tau_1, \mathbf{f}_1)(\tau_2, \mathbf{f}_2) \ldots (\tau_m, \mathbf{f}_m)]_{m, \tau_1, \ldots, \tau_m, k} \in \mathbf{F}(T, A_1, \ldots, A_k).$$

Таким образом, если $\tau_1, \ldots, \tau_m$, $\tau = \tau_1 \ldots \tau_m \in T \subseteq S_k$, то операцию $[\ ]_{m, \tau_1, \ldots, \tau_m, k}$ можно рассматривать как частичную m-арную операцию на $\mathbf{F}(T, A_1, \ldots, A_k)$, так как она определена не на всем этом множестве. Например, если $\tau_1 \neq \tau_2$, то для элементов

$$(\tau_1, \mathbf{f}_1), (\tau_2, \mathbf{f}_2), \ldots, (\tau_m, \mathbf{f}_m) \in \mathbf{F}(T, A_1, \ldots, A_k)$$

элемент $[(\tau_2, \mathbf{f}_2)(\tau_1, \mathbf{f}_1)(\tau_3, \mathbf{f}_3) \ldots (\tau_m, \mathbf{f}_m)]$ считается неопределенным.

4 Ассоциативность операции $[\ ]_{l,k}$

В некоторых случаях, как в следующей теореме, для сокращения записей вместо символа $(\sigma_r, \mathbf{f}_r)$ будем пользоваться символом $\mathbf{f}_r$, то есть будем полагать $\mathbf{f}_r = (\sigma_r, \mathbf{f}_r)$.

Теорема 4.1. *Для всех i и l таких, что $1 \leq i + 1 \leq i + l \leq m$ и любых*

$$\mathbf{f}_1 = (\sigma_1, \mathbf{f}_1), \ldots, \mathbf{f}_m = (\sigma_m, \mathbf{f}_m) \in \mathbf{F}(S_k, A_1, \ldots, A_k)$$

имеет место равенство

$$[\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_m]_{m, \sigma_1, \ldots, \sigma_m, k} =$$

$$= [\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_i[\mathbf{f}_{i+1} \ldots \mathbf{f}_{i+l}]_{l, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{i+l}, k}\, \mathbf{f}_{i+l+1} \ldots \mathbf{f}_m]_{m-l+1, \sigma_1, \ldots, \sigma_i, \mu, \sigma_{i+l+1}, \ldots, \sigma_m, k},$$

где $\mu = \sigma_{i+1} \ldots \sigma_{i+l}$.

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 4.1.3 из [3].

Из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.1. *Для всех i, j, l_1 и l_2 таких, что*

$$1 \leq i + 1 \leq i + l_1 \leq m,\ 1 \leq j + 1 \leq j + l_2 \leq m$$

и любых

$$\mathbf{f}_1 = (\sigma_1, \mathbf{f}_1), \ldots, \mathbf{f}_m = (\sigma_m, \mathbf{f}_m) \in \mathbf{F}(S_k, A_1, \ldots, A_k)$$

имеет место равенство

$$[\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_i[\mathbf{f}_{i+1} \ldots \mathbf{f}_{i+l_1}]_{l_1, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{i+l_1}, k}\, \mathbf{f}_{i+l_1+1} \ldots \mathbf{f}_m]_{m-l_1+1, \sigma_1, \ldots, \sigma_i, \mu_1, \sigma_{i+l_1+1}, \ldots, \sigma_m, k} =$$

$$= [\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_j[\mathbf{f}_{j+1} \ldots \mathbf{f}_{j+l_2}]_{l_2, \sigma_{j+1}, \ldots, \sigma_{j+l_2}, k}\, \mathbf{f}_{j+l_2+1} \ldots \mathbf{f}_m]_{m-l_2+1, \sigma_1, \ldots, \sigma_j, \mu_2, \sigma_{i+l_2+1}, \ldots, \sigma_m, k}$$

где $\mu_1 = \sigma_{i+1} \ldots \sigma_{i+l_1}$, $\mu_2 = \sigma_{j+1} \ldots \sigma_{j+l_2}$.

Полагая в следствии 4.1 $l_1 = l_2 = l$, $m = 2l - 1$, получим

Следствие 4.2. *Для всех i, j, и l таких, что $0 \leq i \leq l - 1$, $0 \leq j \leq l - 1$ и любых*

$$\mathbf{f}_1 = (\sigma_1, \mathbf{f}_1), \ldots, \mathbf{f}_{2l-1} = (\sigma_{2l-1}, \mathbf{f}_{2l-1}) \in \mathbf{F}(S_k, A_1, \ldots, A_k)$$

имеет место равенство

$$[\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_i[\mathbf{f}_{i+1} \dots \mathbf{f}_{i+l}]_{l,\sigma_{i+1},\dots,\sigma_{i+l},k}\, \mathbf{f}_{i+l+1} \dots \mathbf{f}_{2l-1}]_{l,\sigma_1,\dots,\sigma_i,\mu_1,\sigma_{i+l+1},\dots,\sigma_{2l-1},k} =$$

$$= [\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_j[\mathbf{f}_{j+1} \dots \mathbf{f}_{j+l}]_{l,\sigma_{j+1},\dots,\sigma_{j+l},k}\, \mathbf{f}_{j+l+1} \dots \mathbf{f}_{2l-1}]_{l,\sigma_k,\dots,\sigma_j,\mu_2,\sigma_{j-l+1},\dots,\sigma_{2l-1},k},$$

где $\mu_1 = \sigma_{i+1} \dots \sigma_{i+l}$, $\mu_2 = \sigma_{j+1} \dots \sigma_{j+l}$.

Теорема 4.2. *Для любого* $l \geq 2$ l*-арная операция* $[\ ]_{l,k}$, *определенная на множестве* $\mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k)$, *ассоциативна, то есть универсальная алгебра* $< \mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k), [\ ]_{l,k} >$ *является* l*-арной полугруппой.*

Доказательство. Если $\mathbf{f}_1 = (\sigma_1, \mathbf{f}_1), \dots, \mathbf{f}_{2l-1} = (\sigma_{2l-1}, \mathbf{f}_{2l-1})$ – произвольные элементы из $\mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k)$, то по следствию 4.2 для них верно равенство из формулировки этого следствия. Так как, согласно определению операции $[\ ]_{m,\tau_1,\dots,\tau_m,k}$,

$$[\mathbf{f}_{i+1} \dots \mathbf{f}_{i+l}]_{l,\sigma_{i+1},\dots,\sigma_{i+l},k} = [\mathbf{f}_{i+1} \dots \mathbf{f}_{i+k}]_{l,k},$$

$$[\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_i[\mathbf{f}_{i+1} \dots \mathbf{f}_{i+l}]_{l,\sigma_{i+1},\dots,\sigma_{i+l},k}\, \mathbf{f}_{i+l+1} \dots \mathbf{f}_{2l-1}]_{l,\sigma_1,\dots,\sigma_i,\mu_1,\sigma_{i+l+1},\dots,\sigma_{2l-1},k} =$$
$$= [\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_i[\mathbf{f}_{i+1} \dots \mathbf{f}_{i+l}]_{l,k}\mathbf{f}_{i+l+1} \dots \mathrm{f}_{2l-1}]_{l,k},$$

$$[\mathbf{f}_{j+1} \dots \mathbf{f}_{j+l}]_{l,\sigma_{j+1},\dots,\sigma_{j+l},k} = [\mathbf{f}_{j+1} \dots \mathbf{f}_{j+l}]_{l,k},$$

$$[\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_j[\mathbf{f}_{j+1} \dots \mathbf{f}_{j+l}]_{l,\sigma_{j+1},\dots,\sigma_{j+l},k}\, \mathbf{f}_{j+l+1} \dots \mathbf{f}_{2l-1}]_{l,\sigma_1,\dots,\sigma_j,\mu_2,\sigma_{j+l-1},\dots,\sigma_{2l-1},k} =$$
$$= [\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_j[\mathbf{f}_{j+1} \dots \mathbf{f}_{j+l}]_{l,k}\mathbf{f}_{j+l+1} \dots \mathrm{f}_{2l-1}]_{l,k},$$

то равенство из формулировки следствия 4.2 может быть переписано следующим образом

$$[\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_i[\mathbf{f}_{i+1} \dots \mathbf{f}_{i+l}]_{l,k}\mathbf{f}_{i+l+1} \dots \mathbf{f}_{2l-1}]_{l,k} = [\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_j[\mathbf{f}_{j+1} \dots \mathbf{f}_{j+l}]_{l,k}\, \mathbf{f}_{j+l+1} \dots \mathbf{f}_{2l-1}]_{l,k},$$

где $0 \leq i \leq l-1$, $0 \leq j \leq l-1$. Теорема доказана.

Из предложения 1.1 и теоремы 4.2 вытекает

Следствие 4.3. *Если множество* $T \subseteq S_k$ *замкнуто относительно* l*-арной операции* $(\ )_l$, *то* $< \mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k), [\ ]_{l,k} >$ – l*-арная подполугруппа* l*-арной полугруппы* $< \mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k), [\ ]_{l,k} >$.

Из следствия 4.3 вытекает

Следствие 4.4. *Если* T – *подполугруппа группы* S_k, *то* $< \mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k), [\ ]_{l,k} >$ – l*-арная подполугруппа* l*-арной полугруппы* $< \mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k), [\ ]_{l,k} >$.

Из следствия 4.3, ввиду замечания 2.1, вытекает

Следствие 4.5. *Если подмножество* $T \subseteq S_k$ *замкнуто относительно* l*-арной операции* $(\ )_l$, *в частности, если* T – *подполугруппа группы* S_k, *то* $< \mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k), [\ ]_{l,T,k} >$ – l*-арная полугруппа.*

Замечание 4.1. Ясно, что если $\sigma \in S_k$, $T = \{\sigma\}$, то частичные l-арные операции $[\ ]_{l,T,k}$ и $[\ ]_{l,\underbrace{\sigma,\dots,\sigma}_{l},k}$, определенные на множестве $\mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k)$, совпадают. Для сокращения записей положим $[\ ]_{l,\sigma,k} = [\ ]_{l,\{\sigma\},k} = [\ ]_{l,\underbrace{\sigma,\dots,\sigma}_{l},k}$. Таким образом,

$[(\sigma, \mathbf{f}_1) \dots (\sigma, \mathbf{f}_l)]_{l,\sigma,k} = [(\sigma, (\mathrm{f}_{11}, \dots, \mathrm{f}_{1k})) \dots (\sigma, (f_{l1}, \dots, f_{lk}))]_{l,\sigma,k} = \mathbf{g} = (\sigma^l, (g_1, \dots, g_k))$, где

$$g_j = f_{1j} f_{2\sigma(j)} f_{3\sigma^2(j)} \dots f_{l\sigma^{l-1}(j)}, j = 1, \dots, k.$$

В частности, если $\sigma^l = \sigma$, то

$$g_j = f_{1j} f_{2\sigma(j)} f_{3\sigma^2(j)} \dots f_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} f_{lj}, j = 1, \dots, k.$$

Из следствия 4.5 вытекает

Следствие 4.6. *Если $\sigma^l = \sigma$, то $< \mathbf{F}(\sigma, A_1, \dots, A_k), [\ ]_{l, \sigma, k} >$ – l-арная полугруппа.*

Следствие 4.7. *Если σ – цикл длины k из S_k, то $< \mathbf{F}(\sigma, A_1, \dots, A_k), [\ ]_{k+1, \sigma, k} >$ – $(k + 1)$-арная полугруппа.*

Полагая в следствии 4.7 $\sigma = (12 \dots k)$, получим

Следствие 4.8. *Универсальная алгебра $< \mathbf{F}((12 \dots k), A_1, \dots, A_k), [\ ]_{k+1, (12 \dots k), k} >$ является $(k + 1)$-арной полугруппой.*

Так как для любого нечетного l множество T_k всех нечетных подстановок из S_k, замкнуто относительно l-арной операции $(\ )_l$, то из следствия 4.3 вытекает

Следствие 4.9. *Для любого нечетного l универсальная алгебра $< \mathbf{F}(T_k, A_1, \dots, A_k), [\ ]_{l, k} >$ является l-арной полугруппой. В частности, $< \mathbf{F}(T_k, A_1, \dots, A_k), [\ ]_{3, k} >$ – тернарная полугруппа.*

5 l-Арная группа $< \mathbf{S}(S_k, A_1, \dots, A_k), [\ ]_{l, k} >$

Пусть $A_1, \dots, A_k$ – множества одинаковой мощности. Выделим во множестве $\mathbf{F}(\sigma, A_1, \dots, A_k)$ подмножество $\mathbf{S}(\sigma, A_1, \dots, A_k)$ всех элементов $(\sigma, \mathbf{f}) = (\sigma, (f_1, \dots, f_k))$, у которых каждая компонента f_j является биекцией A_j на $A_{\sigma(j)}$. Если $T \subseteq S_k$, то положим

$$\mathbf{S}(T, A_1, \dots, A_k) = \bigcup_{\sigma \in T} \mathbf{S}(\sigma\ A_1, \dots, A_k).$$

Понятно, что множество $\mathbf{S}(T, A_1, \dots, A_k)$ совпадает с подмножеством всех элементов множества $\mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k)$, у которых все компоненты являются биекциями. В частности, $\mathbf{S}(S_k, A_1, \dots, A_k)$ – подмножество всех элементов из $\mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k)$, у которых все компоненты – биекции.

Замечание 5.1. Если подмножество $T \subseteq S_k$ замкнуто относительно m-арной операции $(\ )_m$,

$$(\sigma_i, \mathbf{f}_i) = (\sigma, (f_{i1}, \dots, f_{ik})) \in \mathbf{S}(T, A_1, \dots, A_k), i = 1, \dots, m,$$

то, согласно (4), все g_j в (2) являются биекциями, откуда, а также из (3) и замечания 2.1, следует

$$[(\sigma_1, \mathbf{f}_1)(\sigma_2, \mathbf{f}_2) \dots (\sigma_m, \mathbf{f}_m)]_{m, T, k} \in \mathbf{S}(T, A_1, \dots, A_k),$$

что означает замкнутость в этом случае множества $\mathbf{S}(T, A_1, \dots, A_k)$, относительно m-арной операции $[\ ]_{m, T, k}$.

Из следствия 4.5, ввиду замечания 5.1, вытекает

Следствие 5.1. *Если подмножество $T \subseteq S_k$ замкнуто относительно l-арной операции $(\ )_l$, то универсальная алгебра $< \mathbf{S}(T, A_1, \dots, A_k), [\ ]_{l, T, k} >$ является l-арной подполугруппой l-арной полугруппы $< \mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k), [\ ]_{l, T, k} >$. В частности, $< \mathbf{S}(S_k, A_1, \dots, A_k), [\ ]_{l, k} >$ – l-арная подполугруппа l-арной полугруппы $< \mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k), [\ ]_{l, k} >$.*

Имеет место более сильное утверждение.

Теорема 5.1. *Если* $< T, (\ )_l >$ – *l-арная подгруппа l-арной группы* $< S_k, (\ )_l >$, *то* $< \mathbf{S}(T, A_1, \ldots, A_k), [\ ]_{l,T,k} >$ – *l-арная подгруппа l-арной полугруппы* $< \mathbf{F}(T, (A_1, \ldots, A_k, [\ ]_{l,T,k} >$. *В частности,* $< \mathbf{S}(S_k, A_1, \ldots, A_k), [\ ]_{l,k} >$ – *l-арная подгруппа l-арной полугруппы* $< \mathbf{F}(S_k, A_1, \ldots, A_k), [\ ]_{l,k} >$.

Доказательство. Согласно следствию 5.1 $< \mathbf{S}(T, A_1, \ldots, A_k), [\ ]_{l,T,k} >$ – l-арная полугруппа. Осталось доказать разрешимость в $< \mathbf{S}(T, A_1, \ldots, A_k)$ уравнений

$$[\mathbf{x}\mathbf{f}_2 \ldots \mathbf{f}_l]_{l,T,k} = \mathbf{f},\ [\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_{l-1}\mathbf{y}]_{l,T,k} = \mathbf{f}, \tag{5}$$

где

$$\mathbf{f}_i = (\sigma_i, f_i) = (\sigma_i, (f_{i1}, \ldots, f_{ik})) \in \mathbf{S}(T, A_1, \ldots, A_k),\ i = 1, \ldots, l,$$
$$\mathbf{f} = (\sigma, g) = (\sigma, (g_1, \ldots, g_k)) \in \mathbf{S}(T, A_1, \ldots, A_k).$$

В l-арной группе $< T, (\ )_l >$ существуют такие $\delta, \rho \in T$, что

$$(\delta\sigma_2 \ldots \sigma_l)_l = \sigma,\ (\sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}\rho)_l = \sigma.$$

Так как для любого $j = 1, \ldots, k$ имеем

$$f_{l\delta\sigma_2 \ldots \sigma_{l-1}(j)} : A_{\delta\sigma_2 \ldots \sigma_{l-1}(j)} \to A_{\sigma_l(\delta\sigma_2 \ldots \sigma_{l-1}(j))} = A_{\delta\sigma_2 \ldots \sigma_{l-1}\sigma_l(j)} = A_{\sigma(j)},$$

то

$$f^{-1}_{l\delta\sigma_2 \ldots \sigma_{l-1}(j)} : A_{\sigma(j)} \to A_{\delta\sigma_2 \ldots \sigma_{l-1}(j)}.$$

Аналогично

$$f^{-1}_{(l-1)\delta\sigma_2 \ldots \sigma_{l-2}(j)} : A_{\delta\sigma_2 \ldots \sigma_{l-1}(j)} \to A_{\delta\sigma_2 \ldots \sigma_{l-2}(j)}, \ldots$$

$$\ldots,\ f^{-1}_{3\delta\sigma_2(j)} : A_{\delta\sigma_2\sigma_3(j)} \to A_{\delta\sigma_2(j)},\ \ f^{-1}_{2\delta(j)} : A_{\delta\sigma_2(j)} \to A_{\delta(j)}.$$

Кроме того, g_j – биекция A_j на $A_{\sigma(j)}$. Таким образом, для любого $j = 1, \ldots, k$ определено отображение

$$u_j = g_j f^{-1}_{l\delta\sigma_2 \ldots \sigma_{l-1}(j)} \ldots f^{-1}_{3\delta\sigma_2(j)} f^{-1}_{2\sigma(j)},$$

которое является биекцией A_j на $A_{\delta(j)}$. А так как $\delta \in T$, то

$$\mathbf{u} = (\delta, (u_1, \ldots, u_k)) \in \mathbf{S}(T, A_1, \ldots, A_k).$$

Покажем, что $\mathbf{u}$ является решением первого уравнения (5). Для этого положим

$$[\mathbf{u}\mathbf{f}_2 \ldots \mathbf{f}_l]_{l,T,k} = (\mu, (b_1, \ldots, b_k)). \tag{6}$$

Согласно замечаниям 2.1 и 5.1 операции $[\ ]_{l,k}$ и $[\ ]_{l,T,k}$ на множестве $\mathbf{S}(T, A_1, \ldots, A_k)$ совпадают. Поэтому

$$[\mathbf{u}\mathbf{f}_2 \ldots \mathbf{f}_l]_{l,T,k} = [\mathbf{u}\mathbf{f}_2 \ldots \mathbf{f}_l]_{l,k},$$

то есть

$$[\mathbf{u}\mathbf{f}_2 \ldots \mathbf{f}_l]_{l,k} = (\mu, (b_1, \ldots, b_k)).$$

Согласно определению операции $[\ ]_{l,k}$ имеем $\mu = \delta\sigma_2 \ldots \sigma_l = \sigma$,

$$b_j = u_j f_{2\delta(j)} f_{3\delta\sigma_2(j)} \ldots f_{l\delta\sigma_2 \ldots \sigma_{l-1}(j)} =$$
$$= g_j f^{-1}_{l\delta\sigma_2 \ldots \sigma_{l-1}(j)} \ldots f^{-1}_{3\delta\sigma_2(j)} f^{-1}_{2\delta(j)} f_{2\delta(j)} f_{3\delta\sigma_2(j)} \ldots f_{l\delta\sigma_2 \ldots \sigma_{l-1}(j)} = g_j,\ j = 1, \ldots, k.$$

Следовательно, $(\mu, (b_1, \ldots, b_k)) = (\sigma, (g_1, \ldots, b_k)) = \mathbf{f}$, откуда и из (6) вытекает

$$[\mathbf{u}\mathbf{f}_2 \ldots \mathbf{f}_l]_{l,\,T,\,k} = \mathbf{f},$$

то есть первое уравнение из (5) разрешимо в $\mathbf{S}(T, A_1, \ldots, A_k)$.

Так как для любого $s = 1, \ldots, k$ имеем

$$f^{-1}_{(l-1)\sigma_1 \ldots \sigma_{l-2}(s)} : A_{\sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}(s)} \to A_{\sigma_1 \ldots \sigma_{l-2}(s)},$$

$$f^{-1}_{(l-2)\sigma_1 \ldots \sigma_{l-3}(s)} : A_{\sigma_1 \ldots \sigma_{l-2}(s)} \to A_{\sigma_1 \ldots \sigma_{l-3}(s)}, \ldots$$

$$\ldots,\ f^{-1}_{2\sigma_1(s)} : A_{\sigma_1\sigma_2(s)} \to A_{\sigma_1(s)},\ \ f^{-1}_{1s} : A_{\sigma_1(s)} \to A_s,\ \ g_s : A_s \to A_{\sigma(s)},$$

то определено отображение

$$v_{\sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}(s)} = f^{-1}_{(l-1)\sigma_1 \cdots \sigma_{l-2}(s)} f^{-1}_{(l-2)\sigma_1 \cdots \sigma_{l-3}(s)} \ldots f^{-1}_{2\sigma_1(s)} f^{-1}_{1s} g_s,$$

которое является биекцией $A_{\sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}(s)}$ на $A_{\sigma(s)}$. А так как

$$\sigma(s) = \sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}\rho(s) = \rho(\sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}(s)),$$

то

$$v_{\sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}(s)} : A_{\sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}(s)} \to A_{\rho(\sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}(s))},$$

откуда, полагая $\sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}(s) = j$, получим $v_j : A_j \to A_{\rho(j)}$. Последнее соотношение верно для любого $j = 1, \ldots, k$, так как множество

$$\{\sigma_1 \ldots \sigma_{l-1(1)}, \ldots, \sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}(k)\}$$

совпадает с множеством $\{1, \ldots, k\}$.

Так как $\rho \in T$, то $\mathbf{v} = \{\rho, (v_1, \ldots, v_k)\} \in \mathbf{S}(T, A_1, \ldots, A_k)$. Покажем, что $\mathbf{v}$ является решением второго уравнения из (5). Для этого положим

$$[\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_{l-1}\mathbf{v}]_{l,\,T,\,k} = (\eta, (c_1, \ldots, c_k)). \tag{7}$$

Снова, используя совпадение операций $[\ ]_{l,\,k}$ и $[\ ]_{l,\,T,\,k}$ на множестве $\mathbf{S}(T, A_1, \ldots, A_k)$, получим

$$[\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_{l-1}\mathbf{v}]_{l,\,k} = (\eta, (c_1, \ldots, c_k)).$$

Согласно определению операции $[\ ]_{l,\,k}$ имеем $\eta = \sigma_1 \ldots \sigma_m\rho = \sigma$,

$$c_s = f_{1s} f_{2\sigma_1(s)} \cdots f_{(l-1)\sigma_1 \ldots \sigma_{l-2}(s)} v_{\sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}(s)} =$$

$$= f_{1s} f_{2\sigma_1(s)} \cdots f_{(l-1)\sigma_1 \ldots \sigma_{l-2}(s)} f^{-1}_{(l-1)\sigma_1 \ldots \sigma_{l-2}(s)} \cdots f^{-1}_{2\sigma_1(s)} f^{-1}_{1s} g_s = g_s$$

для любого $s = 1, \ldots, k$. Следовательно,

$$(\eta, (c_1, \ldots, c_k)) = (\sigma, (g_1, \ldots, g_k)) = \mathbf{f},$$

откуда и из (7) вытекает $[\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_{l-1}\mathbf{v}]_{l,\,T,\,k} = \mathbf{f}$, то есть второе уравнение из (5) также разрешимо в $\mathbf{S}(T, A_1, \ldots, A_k)$. Таким образом, доказано, что $< \mathbf{S}(T, A_1, \ldots, A_k), [\ ]_{l,\,T,\,k} >$ – l-арная группа.

Полагая $T = S_k$ и учитывая совпадение операций $[\ ]_{l,\,k}$ и $[\ ]_{l,\,S_k,\,k}$, получим утверждение теоремы для множества $\mathbf{S}(S_k, A_1, \ldots, A_k)$. Теорема доказана.

Из теоремы 5.1 вытекает

Следствие 5.2. [4]. *Если* $< T, (\ )_l >$ *– l-арная группа, в частности, группа, то* $< \mathbf{S}(T, A_1, \ldots, A_k), [\ ]_{l,\,k} >$ *l-арная подгруппа l-арной группы* $< S(S_k, A_1, \ldots, A_k), [\ ]_{l,\,k} >$.

Следствие 5.3. [3, 4]. *Если* $\sigma^l = \sigma$, *то* $<\mathbf{S}(\sigma, A_1, \ldots, A_k), [\ ]_{l, \sigma, k}>$ *l-арная группа.*

Следствие 5.4. *Если* σ *– цикл длины* k *из* S_k, *то* $<\mathbf{S}(\sigma, A_1, \ldots, A_k), [\ ]_{k+1, \sigma, k}>$ – $(k+1)$*-арная группа.*

Полагая в следствии 5.4 $\sigma = (12 \ldots k)$, получим

Следствие 5.5 [1, E. Post; 2, С.А. Русаков; 5, F. Sioson]. *Универсальная алгебра* $<\mathbf{S}((12 \ldots k), A_1, \ldots, A_k), [\ ]_{k+1 (12 \ldots k), k}>$ является $(k+1)$*-арной группой.*

Следствие 5.6. *Для любого нечетного* l *универсальная алгебра* $<\mathbf{S}(T_k, A_1, \ldots, A_k), [\ ]_{l, k}>$ *является* l*-арной группой. В частности,* $<\mathbf{S}(T_k, A_1, \ldots, A_k), [\ ]_{3, k}>$. *– тернарная группа.*

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10РА-002).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Post, E.L.*** Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48. – № 2. – P. 208–350.
2. ***Русаков, С.А.*** Алгебраические n-арные системы / С.А. Русаков. – Минск : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
3. ***Гальмак, А.М.*** n-Арные группы. – Ч. 1 / А.М. Гальмак. – Гомель : Изд-во ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 324 с.
4. ***Гальмак, А.М.*** n-Арные перестановки / А.М. Гальмак // Кн. Некоторые вопросы алгебры и прикладной математики. – Гомель, 2002. – С. 45–49.
5. ***Sioson, F.M.*** On Free Abelian n-Groups I / F.M. Sioson // Proc. Japan Acad. – 1967. – Vol. 43. – P. 876–879.

Поступила в редакцию 22.03.2012 г.