УДК 517.925.42

В.В. АМЕЛЬКИН[*], *М.Н. ВАСИЛЕВИЧ*

ПОСТРОЕНИЕ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПРЯМОЙ СИСТЕМЫ ФУКСА С ЧЕТЫРЬМЯ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ И НИЛЬПОТЕНТНЫМИ НЕПРИВОДИМЫМИ МАТРИЦАМИ-ВЫЧЕТАМИ

Рассматривается одна из обратных задач аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. А именно, строится система Фукса второго порядка с четырьмя особыми точками и нильпотентными неприводимыми матрицами-вычетами.

Введение

Пусть $X = \mathbf{CP}^1$ – комплексная проективная прямая; a_j, $j = \overline{1,4}$, – произвольные точки из X; $\overline{M} = \bigcup_{j=1}^{4} a_j$. На открытом множестве $M = \left\{\mathbf{CP}^1 \setminus \overline{M}\right\}$ рассмотрим систему Фукса

$$dY = \omega Y, \tag{1}$$

где Y – квадратная матрица порядка 2; ω – дифференциальная 1-форма вида

$$\omega = \sum_{j=1}^{4} U_j d\ln\left(\frac{x - a_j}{x_0 - a_j}\right). \tag{2}$$

Предполагается, что (2×2) – постоянные (не зависящие от x) матрицы U_j, называемые матрицами-вычетами, удовлетворяют условию [1]

$$\sum_{j=1}^{4} U_j = 0. \tag{3}$$

Обозначим через $\pi_1(M, x_0)$ фундаментальную группу комплексного аналитического многообразия M, где (отмеченная) точка $x_0 \in M$.

Пусть $\Phi(x)$ – росток фундаментального решения системы (1) $(\Phi(x_0) = \Phi_0)$, который при аналитическом продолжении вдоль петли $\gamma_j \in \pi_1(M, x_0)$ трансформируется в другой росток $\Phi_{\gamma_j}(x)$. При этом матричные функции $\Phi(x)$ и $\Phi_{\gamma_j}(x)$ связаны соотношением $\Phi_{\gamma_j}(x) = \Phi(x)V_j$, где постоянная матрица V_j является элементом группы $GL(2;\mathbf{C})$ невырожденных комплекснозначных матриц второго порядка. Очевидно, что $V_j = \Phi_0^{-1}\Phi_{\gamma_j}(x_0)$.

---
[*] Выпускник физико-математического факультета 1965 г.

Далее матрицы V_j, $j=\overline{1,4}$, которые называют матрицами монодромии, будем задавать так, чтобы выполнялось соотношение

$$\prod_{j=1}^{4} V_j = E, \tag{4}$$

где E – единичная матрица.

При выполнении условия (4) матрицы монодромии порождают мультипликативную группу, которую называют группой монодромии [1].

С матрицами V_j, $j=\overline{1,4}$, ассоциируют и так называемые показательные матрицы монодромии W_j, $j=\overline{1,4}$, которые связывают с матрицами монодромии формулами

$$V_j = e^{2\pi i W_j}, \quad j=\overline{1,4}, \tag{5}$$

где i – мнимая единица, $j=\overline{1,4}$.

Как показано, например в [2, с. 159], собственные значения показательных матриц монодромии и матриц-вычетов системы (1) совпадают. Этот важный факт мы будем иметь в виду в дальнейшем.

Формулировка проблемы. Пусть задан гомоморфизм

$$\chi : \pi_1(M, x_0) \to GL(2; \mathbf{C}), \tag{6}$$

который называют монодромией или представлением монодромии системы (1).

Задача (проблема Римана – Гильберта [3]). Дана монодромия (6). Всегда ли существует система (1), (3) с заданными особыми точками a_1, a_2, a_3, a_4, фундаментальная матрица решений которой реализует заданный гомоморфизм (6)?

Из работы [4] следует, что сформулированная задача всегда имеет решение, хотя в общем случае для любого набора точек a_1, a_2, ..., a_n при $n>3$ и любой системы (1) порядка $m \ge 3$ найдется такая монодромия (6), для которой не существует реализующей ее системы Фукса [1].

Из формулировки задачи вытекает, что доказательство существования системы с указанными свойствами, вообще говоря, не связывается с построением самой системы.

В настоящей статье дается конструктивное решение проблемы в случае нильпотентных неприводимых матриц-вычетов, каждая из которых не является диагонализируемой.

Предварительные результаты. При построении систем вида (1) важное значение имеет условие полной интегрируемости, означающее, что дифференциальная 1-форма (2) удовлетворяет условию [5, с. 41]

$$d\omega = \omega \Lambda \omega, \tag{7}$$

где Λ – оператор внешнего дифференцирования матриц.

В случае некоммутативных матриц монодромии V_j матрицы-вычеты U_j также будут некоммутативными и аналогично доказательству леммы 1 [6] можно показать, что из равенства (7) следуют равенства

$$dU_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{4} \left[U_k, U_j\right] d \ln\left(\frac{a_j - a_k}{x_0 - a_k}\right), \tag{8}$$

где $[\cdot,\cdot]$ – произведение Ли (коммутатор). По поводу вывода равенств (8) см., в частности, и [7, с. 182], [2, с. 419].

Переходя к содержательной части работы, будем выбирать три из четырех показательных матриц монодромии системы (1) нильпотентными и задавать их (не умаляя общности) в виде [2, с. 382]

$$W_j = \begin{pmatrix} -\mu_j \nu_j & \mu_j^2 \\ -\nu_j^2 & \mu_j \nu_j \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,3}, \tag{9}$$

где μ_j, ν_j – вещественные или комплексные числа, так, чтобы и четвертая показательная матрица также оказалась нильпотентной при условии (4).

Из вида матриц (9) следует, что их собственные значения $\xi_j^{(1)} = \xi_j^{(2)} = 0$. Последнее означает, как мы знаем из предыдущего, что и собственные значения матриц U_j, $j = \overline{1,3}$, также равны нулю. Отсюда вытекает, что матрицы-вычеты системы (1) должны иметь вид:

$$U_j = \begin{pmatrix} -\eta_j \theta_j & \eta_j^2 \\ -\theta_j^2 & \eta_j \theta_j \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,3}, \tag{10}$$

где η_j, θ_j – некоторые параметры.

Что же касается матрицы U_4, то поскольку $U_4 = -U_1 - U_2 - U_3$, некоммутируемость матриц (9) означает, что собственные значения матрицы U_4 могут быть отличны от нуля.

Но так как мы требуем нильпотентность матрицы U_4, то, согласно (3) и (10), условие нильпотентности принимает вид

$$\Delta_{12}^2 + \Delta_{13}^2 + \Delta_{23}^2 = 0, \tag{11}$$

где

$$\Delta_{12} = \eta_1\theta_2 - \eta_2\theta_1, \quad \Delta_{13} = \eta_1\theta_3 - \eta_3\theta_1, \quad \Delta_{23} = \eta_2\theta_3 - \eta_3\theta_2.$$

Соотношение (11) приводит к выводу, что матрицы (9) следует задавать так, чтобы при фиксированной ветви логарифма матрица

$$W_4 = \frac{1}{2\pi i} \ln V_4,$$

где $V_4 = V_3^{-1} V_2^{-1} V_1^{-1}$, а V_k^{-1}, $k = \overline{1,3}$, – матрица, обратная матрице V_k, имела нулевые собственные значения.

Примером существования матриц W_j с указанными свойствами являются матрицы

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\delta & 0 \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Дальнейшие исследования будем проводить, не умаляя общности рассуждений [8], считая, что $a_4 = \infty$. В этом предположении систему (1) можно переписать в виде

$$dY = \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{U_j}{x - a_j} \right) Y dx. \qquad (13)$$

Для матриц U_j, $j = \overline{1,3}$, системы (1), определяемых формулами (10), справедливы соотношения:

$$U_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; U_j U_k = \rho_{jk} E - U_k U_j, \; U_j U_k U_j = U_j \rho_{jk}, \; \sigma_4 = \rho_{123} - \rho_{132} = 2\rho_{123}, \qquad (14)$$

где $\rho_{jk} = \sigma(U_j U_k)$, $\rho_{123} = \sigma(U_1 U_2 U_3)$, $\rho_{132} = \sigma(U_1 U_3 U_2)$, а $\sigma(T)$ – сумма диагональных элементов матрицы Т. Непосредственно проверяется, что, в частности,

$$\rho_{123} = -\eta_1^2 \theta_2 \theta_3 \Delta_{23} + \eta_2^2 \theta_1 \theta_3 \Delta_{13} - \eta_3^2 \theta_1 \theta_2 \Delta_{12}.$$

В последней цитируемой работе автор предложил алгоритм конструктивного решения сформулированной выше задачи, основу которого составляет построенная им система пяти обыкновенных дифференциальных уравнений, выражающих зависимость следов произведения матриц-вычетов рассматриваемой системы Фукса от особых точек. Для успешного применения предложенного алгоритма необходимо, прежде всего, решить построенную систему дифференциальных уравнений, которую мы будем называть системой Н.П. Еругина.

В рассматриваемом нами случае система Н.П. Еругина вырождается в систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{d\rho_{12}}{dz} = \frac{\sigma_4}{z}, \quad \frac{d\rho_{13}}{dz} = \frac{\sigma_4}{1-z}, \quad \frac{d\rho_{23}}{dz} = \frac{\sigma_4}{z(z-1)}, \\ &\frac{d\sigma_4}{dz} = \frac{2\rho_{13}(\rho_{12} - \rho_{23})}{z} + \frac{2\rho_{12}(\rho_{23} - \rho_{13})}{z-1}, \end{aligned} \qquad (15)$$

где $z = \dfrac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2}$.

Заметим, что система Н.П. Еругина (15) может быть получена и на основании равенств (8), если провести рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1 статьи [9].

Отметим также, что в различных ситуациях система Н.П. Еругина может иметь стационарные решения. Оказывается, что решение этого вопроса является принципиальным для решения проблемы Римана – Гильберта. Существование стационарных решений существенно упрощает задачу.

Обращаясь к системе (15), отметим, что непосредственные вычисления показывают справедливость равенств

$$\rho_{12} = -\Delta_{12}^2, \quad \rho_{13} = -\Delta_{13}^2, \quad \rho_{23} = -\Delta_{23}^2, \quad \sigma_4 = 2\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}, \tag{16}$$

а также, в случае коммутирующих матриц (10), равенств

$$\Delta_{12} = \Delta_{13} = \Delta_{23} = 0, \tag{17}$$

означающих, что система Н.П. Еругина (15) имеет единственное стационарное решение

$$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = \sigma_4 = 0.$$

Теорема 1. Если матрицы-вычеты (10) системы (13) некоммутативны и удовлетворяют условию (11). То система дифференциальных уравнений (15) не имеет стационарных решений.

Доказательство. Если предположить, что система (15) имеет стационарное решение, то по необходимости $\sigma_4 = 0$. Но в таком случае хотя бы один из сомножителей Δ_{12}, Δ_{13}, Δ_{23} в представлении σ_4 в (16) равен нулю. Предположим, для определенности, что $\Delta_{23} = 0$. Тогда $\rho_{23} = 0$ и из последнего уравнения системы (15) и равенства (11) следует, что $\rho_{12} = \rho_{13} = 0$. Таким образом, приходим к равенствам (17), означающим, что матрицы (10) коммутируют, а это противоречит одному из условий теоремы. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Основные результаты. С учетом теоремы 1 для решения поставленной выше задачи фундаментальную матрицу решений системы (13) будем искать в виде [2, с. 142] ряда

$$\Phi_{x_0}(x) = E + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1,2,3)} L_{x_0}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu} \mid x) U_{j_1} \ldots U_{j_\nu}, \tag{18}$$

где сумма $\sum\limits_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1,2,3)}$ содержит 3^ν членов, которые мы получим, когда индексы $j_1, \ldots, j_\nu$ пробегают независимо друг от друга значения 1, 2, 3, с коэффициентами

$$L_{x_0}(a_{j_1} \mid x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x - a_{j_1}} = \ln\left(\frac{x - a_{j_1}}{x_0 - a_{j_1}}\right), \qquad \ldots$$

$$L_{x_0}(a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_\nu} \mid x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{L_{x_0}(a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_{\nu-1}} \mid x)}{x - a_{j_\nu}} dz.$$

Матрицы-вычеты U_j, $j = \overline{1,3}$, в системе (13) будем строить такими, чтобы имели место равенства [2, с. 147]

$$V_j = E + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, ..., j_\nu}^{(1,2,3)} P_j(a_{j_1}, ..., a_{j_\nu} \mid x_0) U_{j_1} ... U_{j_\nu}, \quad j = \overline{1,3}, \tag{19}$$

где

$$P_j(a_{j_1} \mid x_0) = \begin{cases} 2\pi i, & \text{если } j = j_1, \\ 0, & \text{если } j \neq j_1, \end{cases}$$

$$P_j(a_{j_1}, ..., a_{j_\nu} \mid x_0) = \frac{(2\pi i)^\nu}{\nu!}, \text{ если } j_1 = ... = j_\nu = j,$$

$$P_j(a_{j_1}, ..., a_{j_\nu} \mid x_0) = \int\limits_{a_j}^{x_0} \left(\frac{P_j(a_{j_1}, ..., a_{j_{\nu-1}} \mid x_0)}{x_0 - a_{j_\nu}} - \frac{P_j(a_{j_2}, ..., a_{j_\nu} \mid x_0)}{x_0 - a_{j_1}} \right) dx_0,$$

причем ряд (19) целый относительно матричных коэффициентов системы (13).

Как показано в [2, с. 142], матрица (18) является нормированной в точке x_0 фундаментальной матрицей решений системы (13).

Тогда замечая, что в силу нильпотентности показательных матриц W_j, $j = \overline{1,3}$, и W_∞ формулы (5) принимают (по определению) вид

$$\begin{aligned} V_j &= e^{2\pi i W_j} = E + 2\pi i W_j, \quad j = \overline{1,3}, \\ V_\infty &= V_3^{-1} V_2^{-1} V_1^{-1} = e^{2\pi i W_\infty} = E + 2\pi i W_\infty, \end{aligned} \tag{20}$$

приходим к выводу, что при построенных матрицах U_j, $j = \overline{1,3}$, фундаментальная матрица решений системы (13) будет иметь заданную монодромию (20), поскольку

$$\int\limits_{\gamma_j} d\Phi_{x_0}(x) = \Phi_{x_0}(x)\Big|_{x_0}^{x_0 e^{2\pi i}} = \Phi_{x_0}(x_0 e^{2\pi i}) - \Phi_{x_0}(x_0) =$$

$$= \Phi_{x_0}(x_0) V_j - E = V_j - E = e^{2\pi i W_j} - E = 2\pi i W_j. \tag{21}$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы остается указать способ построения матриц-вычетов системы (13).

Предварительно отметим, что из (19) и (21) вытекают равенства

$$W_j = U_j + \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{j_1, ..., j_\nu}^{(1,2,3)} P_j^*(a_{j_1}, ..., a_{j_\nu} \mid x_0) U_{j_1} ... U_{j_\nu}, \tag{22}$$

где

$$P_j^*(a_{j_1},\ldots,a_{j_v}\mid x_0)=\frac{1}{2\pi i}P_j(a_{j_1},\ldots,a_{j_v}\mid x_0),\qquad j=\overline{1,3}.$$

А так как собственные значения матриц W_j, U_j, $j=\overline{1,3}$, и соответственно W_∞, U_∞ в рассматриваемом нами случае равны нулю, то, следуя работе [8], матрицы U_j, $j=\overline{1,3}$, системы (13) можно искать в виде

$$U_j=\alpha_j\overline{W_1}+\beta_j\overline{W_2}+\gamma_j\left[\overline{W_1},\overline{W_2}\right], \tag{23}$$

где

$$\overline{W_1}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad \overline{W_2}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \left[\overline{W_1},\overline{W_2}\right]=\overline{W_1}\,\overline{W_2}-\overline{W_2}\,\overline{W_1}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Из равенств (22) и формул (14) вытекает, что след $\sigma(U_jW_k)$ от произведения матриц U_j и W_k, $j,k=\overline{1,3}$, можно представить в виде ряда

$$\sigma(U_jW_k)=\sigma_{jk}(\rho_{12},\rho_{13},\rho_{23},\rho_{123}) \tag{24}$$

по целым степеням ρ_{12}, ρ_{13}, ρ_{23}, ρ_{123}, который сходится при всех конечных значениях аргументов [8].

В силу условий на матрицы (9) можно считать, что

$$[W_1,W_2]\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \tag{25}$$

(выбирая, например, μ_1, ν_1 и μ_2, ν_2 такими, чтобы $(\mu_1\nu_2)^2\neq(\mu_2\nu_1)^2$).

Умножая тогда последовательно равенство (23) слева на матрицы W_1 и W_2, определяемые формулами (9), получим систему

$$\begin{cases}\sigma(U_jW_1)=\alpha_j\mu_1^2-\beta_j\nu_1^2+2\gamma_j\mu_1\nu_1,\\ \sigma(U_jW_2)=\alpha_j\mu_2^2-\beta_j\nu_2^2+2\gamma_j\mu_2\nu_2,\quad j=\overline{1,3},\end{cases} \tag{26}$$

где левые части уравнений – это ряды (24).

Замечая далее, что собственные значения матриц (23), которые можно переписать в виде

$$U_j=\begin{pmatrix}-\gamma_j&\alpha_j\\ \beta_j&\gamma_j\end{pmatrix},\qquad j=\overline{1,3}, \tag{27}$$

должны иметь нулевые собственные значения, приходим к выводу, что для матриц (27) обязаны выполняться равенства

$$\gamma_j^2+\alpha_j\beta_j=0,\qquad j=\overline{1,3}. \tag{28}$$

А в таком случае, обозначая $\sigma(U_j W_1) = \sigma_{j1}$, $\sigma(U_j W_2) = \sigma_{j2}$, для построения матриц (27), т.е. для нахождения α_j, β_j, γ_j, на основании (26) и (28) имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \mu_1^2\alpha_j - \nu_1^2\beta_j + 2\mu_1\nu_1\gamma_j = \sigma_{j1}, \\ \mu_2^2\alpha_j - \nu_2^2\beta_j + 2\mu_2\nu_2\gamma_j = \sigma_{j2}, \\ \alpha_j\beta_j + \gamma_j^2 = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\gamma_j = \frac{1}{k_1^2}\left(\mu_2\nu_2\sigma_{j1} + \mu_1\nu_1\sigma_{j2} \pm k_2\sqrt{\sigma_{j1}\sigma_{j2}}\right), \quad \alpha_j = \Delta_1/\Delta, \quad \beta_j = \Delta_2/\Delta, \quad (29)$$

где $k_1 = \mu_1\nu_2 - \nu_1\mu_2$ и $k_2 = \mu_1\nu_2 + \nu_1\mu_2$ отличны от нуля в силу условия (25), а

$$\Delta = -k_1k_2, \;\; \Delta_1 = 2\nu_1\nu_2k_1\gamma_j + \sigma_{j2}\nu_1^2 - \sigma_{j2}\nu_1^2, \;\; \Delta_2 = -2\mu_1\mu_2k_1\gamma_j + \sigma_{j2}\mu_1^2 - \sigma_{j2}\mu_1^2.$$

Итак, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. Система Фукса (13), (3) с нильпотентными недиагонализируемыми неприводимыми матрицами-вычетами (27), (29) имеет фундаментальную матрицу решений вида (18), реализующую заданный гомоморфизм (6).

Замечание. Теорема 2 касается общего случая построения систем Фукса с заданными нильпотентными показательными матрицами монодромии (9). Ниже рассмотрим подкласс таких систем при условии, что две из трех заданных неприводимых нильпотентных показательных матриц монодромии W_1, W_2, W_3 перестановочны, а матрица

$$W_\infty = \frac{1}{2\pi i}\ln V_\infty,$$

которая определяется посредством матриц (20), недиагонализируема.

В качестве указанных показательных матриц W_j, $j = \overline{1,3}$, будем рассматривать, не умаляя общности, матрицы (12).

При таком выборе матриц W_j, $j = \overline{1,3}$, покажем, как явно строятся матрицы-вычеты U_j, $j = \overline{1,3}$, системы (13) через элементы заданных матриц W_j, $j = \overline{1,3}$, и заданные особые точки дифференциальной системы.

Итак, перепишем, с учетом вида матриц (12), матрицы монодромии в виде

$$V_1 = E + 2\pi i\delta\overline{W_1}, \quad V_2 = E + 2\pi\lambda\overline{W_2}, \quad V_3 = V_2^{-1}, \quad V_\infty = V_1^{-1}. \quad (30)$$

Очевидно, что $V_1V_2V_3V_\infty = E$ и что

$$\tau_{12} = \sigma(W_1 W_2) = \delta\lambda, \quad \tau_{13} = \sigma(W_1 W_3) = -\delta\lambda, \quad \tau_{23} = \sigma(W_2 W_3) = 0. \qquad (31)$$

Теперь поскольку матрицы W_j, определяемые равенствами

$$W_1 = -W_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}, \quad W_2 = -W_3 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (32)$$

попарно не коммутативны, но каждая из них нильпотентна, то, как указано выше, общий вид матриц-вычетов U_j, $j = \overline{1,3}$ системы (13) определяется матрицами (10), где η_j, θ_j – произвольные параметры.

Указанные матрицы будем искать такими, чтобы фундаментальная матрица (18) системы (13), которую по аналогии с [2, с. 267] можно записать в виде

$$\Phi_{x_0}(x) = E + U_1\varphi_1(x) + U_2\varphi_2(x) + U_3\varphi_3(x) + U_1U_2\varphi_{12}(x) +$$

$$+U_1U_3\varphi_{13}(x) + U_2U_3\varphi_{23}(x) + U_1U_2U_3\varphi_{123}(x) + U_1U_3U_2\varphi_{132}(x), \qquad (33)$$

где φ_1, φ_2, φ_3, φ_{12}, φ_{13}, φ_{23}, φ_{123}, φ_{132} – скалярные непрерывно дифференцируемые функции, имела заданную монодромию.

Для этого при заданных матрицах (32) будем строить матрицы-вычеты (10) так, чтобы

$$\rho_{12} = \tau_{12}, \quad \rho_{13} = \tau_{13}, \quad \rho_{23} = \tau_{23} = 0. \qquad (34)$$

Тогда из (16) и (34) приходим к равенствам

$$(\eta_1\theta_2 - \eta_2\theta_1)^2 = -\delta\lambda, \quad (\eta_1\theta_3 - \eta_3\theta_1)^2 = \delta\lambda, \quad \eta_2\theta_3 - \eta_3\theta_2 = 0. \qquad (35)$$

Из последнего уравнения (35) следует, что

$$\frac{\eta_3}{\eta_2} = \frac{\theta_3}{\theta_2} = k \text{ или } \eta_3 = k\eta_2, \quad \theta_3 = k\theta_2.$$

Но поскольку $\rho_{12} = -\rho_{13}$ (см. (34) и (31)), то

$$\rho_{13} = -(\eta_1\theta_3 - \eta_3\theta_1)^2 = -k^2(\eta_1\theta_2 - \eta_2\theta_1)^2 = k^2\rho_{12}$$

и, значит, $k^2 = -1$.

Отсюда приходим к выводу, что

$$U_1 = \begin{pmatrix} -\eta_1\theta_1 & \eta_1^2 \\ -\theta_1^2 & \eta_1\theta_1 \end{pmatrix}, \quad U_3 = -U_2 = \begin{pmatrix} \eta_2\theta_2 & -\eta_2^2 \\ \theta_2^2 & -\eta_2\theta_2 \end{pmatrix}. \qquad (36)$$

С учетом (36) система (13) принимает вид

$$dY = \omega Y, \qquad (37)$$

где

$$\omega = \left(\frac{U_1}{x-a_1} + \frac{U_2}{x-a_2} - \frac{U_2}{x-a_3} \right) dx = U_1 d \ln\left(\frac{x-a_1}{x_0-a_1} \right) + U_2 d \ln\left(\frac{x-a_2}{x-a_3} \frac{x_0-a_3}{x_0-a_2} \right).$$

Фундаментальная матрица (33) системы (37) представляется тогда в виде

$$\Phi_{x_0}(x) = E + U_1\psi_1(x) + U_2\psi_2(x) + U_1U_2\psi_3(x) + U_2U_1\psi_4(x), \quad (38)$$

где $\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi_4$ – скалярные непрерывно дифференцируемые функции.

Равенства (19) и (38) означают, что

$$V_j = E + U_1\psi_{1j} + U_2\psi_{2j} + U_1U_2\psi_{3j} + U_2U_1\psi_{4j}, \quad j = \overline{1,3}, \quad (39)$$

где $\psi_{ij} = \psi_{ij}(a_1, a_2, a_3, x_0),\ \ i = \overline{1,4}.$

Из (20) и (39) следуют равенства

$$W_j = U_1\psi^*_{1j} + U_2\psi^*_{2j} + U_1U_2\psi^*_{3j} + U_2U_1\psi^*_{4j}, \quad j = \overline{1,3}, \quad (40)$$

где

$$\psi^*_{ij} = \frac{1}{2\pi i}\psi_{ij}, \quad i = \overline{1,4}. \quad (41)$$

Таким образом, для матриц (36) и (41) имеем:

$$\sigma(U_1W_j) = \sigma(U_1U_2)\psi^*_{2j}, \quad \sigma(U_2W_j) = \sigma(U_2U_1)\psi^*_{1j}. \quad (42)$$

Согласно формулам (34)

$$\sigma(U_2U_1) = \sigma(U_1U_2) = \rho_{12} = \delta\lambda$$

и вычисления показывают, что для матриц $W_1,\ W_2$ из (32) и $U_1,\ U_2$ из (34) справедливы равенства

$$\sigma(U_1W_1) = \delta\eta_1^2, \quad \sigma(U_2W_1) = \delta\eta_2^2, \quad \sigma(U_1W_2) = -\lambda\theta_1^2, \quad \sigma(U_2W_2) = -\lambda\theta_2^2. \quad (43)$$

Из соотношений (41) и (43) находим, что

$$\eta_1^2 = \lambda\psi^*_{21}, \quad \eta_2^2 = \lambda\psi^*_{11}, \quad \theta_1^2 = -\delta\psi^*_{22}, \quad \theta_2^2 = -\delta\psi^*_{12}. \quad (44)$$

Итак, для построения искомой фундаментальной матрицы решений остается только найти $\psi^*_{ij},\ i,\ j = 1, 2.$

Для этого запишем фундаментальную матрицу системы (37) через итерированный интеграл от дифференциальной 1-формы ω:

$$\Phi_{x_0}(x) = E + J_{j_1}(\omega) + J_{j_1j_2}(\omega) + J_{j_1j_2j_3}(\omega) + J_{j_1j_2j_3j_4}(\omega) + \ldots, \quad (45)$$

где

$$J_{j_1}(\omega) = \int\limits_{x_0}^{x} \omega = U_1 \int\limits_{x_0}^{x} d\ln\left(\frac{x-a_1}{x_0-a_1}\right) + U_2 \int\limits_{x_0}^{x} d\ln\left(\frac{x-a_2}{x-a_3}\right)\left(\frac{x_0-a_3}{x_0-a_2}\right) =$$

$$= U_1 \int\limits_{x_0}^{x} dL_1 + U_2 \int\limits_{x_0}^{x} dL_2, \quad L_1 = \ln\left(\frac{x-a_1}{x_0-a_1}\right), \quad L_2 = \ln\left(\frac{x-a_2}{x-a_3}\right)\left(\frac{x_0-a_3}{x_0-a_2}\right);$$

$$J_{j_1 j_2}(\omega) = \int\limits_{x_0}^{x}\left(\int\limits_{x_0}^{x}\omega\right)\omega = U_1U_2\int\limits_{x_0}^{x}\left(\int\limits_{x_0}^{x}dL_2\right)dL_1 + U_2U_1\int\limits_{x_0}^{x}\left(\int\limits_{x_0}^{x}dL_1\right)dL_2 =$$

$$= U_1U_2L_{12} + U_2U_1L_{21}, \quad L_{12} = \int\limits_{x_0}^{x}\left(\int\limits_{x_0}^{x}dL_2\right)dL_1, \quad L_{21} = \int\limits_{x_0}^{x}\left(\int\limits_{x_0}^{x}dL_1\right)dL_2;$$

$$J_{j_1 j_2 j_3}(\omega) = U_1U_2U_1L_{121} + U_2U_1U_2L_{212}, \quad L_{121} = \int\limits_{x_0}^{x}\left(\int\limits_{x_0}^{x}(dL_1)dL_2\right)dL_1,$$

$$L_{212} = \int\limits_{x_0}^{x}\left(\int\limits_{x_0}^{x}\left(\int\limits_{x_0}^{x}dL_2\right)dL_1\right)dL_2; \quad J_{j_1 j_2 j_3 j_4}(\omega) = U_1U_2U_1U_2L_{1212} + U_2U_1U_2U_1L_{2121}, \ \dots .$$

Учитывая теперь, что, согласно формулам (14), имеют место равенства

$$U_1U_2U_1 = \rho_{12}U_1, \quad U_2U_1U_2 = \rho_{12}U_2, \quad U_1U_2U_1U_2 = \rho_{12}U_1U_2,$$

$$U_2U_1U_2U_1 = \rho_{12}U_2U_1, \quad U_1U_2U_1U_2U_1 = \rho_{12}^2U_1, \quad U_2U_1U_2U_1U_2 = \rho_{12}^2U_2, \ \dots ,$$

$$U_1U_2U_1U_2 \dots U_1U_2U_1 = \rho_{12}^kU_1, \quad U_1U_2U_1U_2 \dots U_1U_2 = \rho_{12}^kU_1U_2,$$

фундаментальную матрицу решений (45) можно окончательно записать в виде

$$\Phi_{x_0}(x) = E + \sum_{j_1,\, j_2}^{(1,\,2)} U_{j_1}U_{j_2}L_{j_1 j_2}(x) + \dots + \sum_{j_1,\, \dots,\, j_\nu}^{(1,\,2)} U_{j_1}U_{j_2}\dots U_{j_\nu}L_{j_1 j_2 \dots j_\nu}(x) +$$

$$+ \dots = E + U_1\psi_1(x) + U_2\psi_2(x) + U_1U_2\psi_3(x) + U_2U_1\psi_4(x), \qquad (46)$$

где

$$\psi_1(x) = L_1 + \rho_{12}L_{121} + \rho_{12}^2L_{1(21)^2} + \dots + \rho_{12}^{\nu}L_{1(21)^{\nu}} + \dots ,$$

$$\psi_2(x)=L_2+\rho_{21}L_{212}+\rho_{21}^2L_{2(12)^2}+\ldots+\rho_{21}^{\nu}L_{2(12)^{\nu}}+\ldots,$$

$$\psi_3(x)=L_{12}+\rho_{12}L_{(12)^2}+\rho_{12}^2L_{(12)^3}+\ldots+\rho_{12}^{\nu}L_{(12)^{\nu+1}}+\ldots,$$

$$\psi_4(x)=L_{21}+\rho_{21}L_{(21)^2}+\rho_{21}^2L_{(21)^3}+\ldots+\rho_{21}^{\nu}L_{(21)^{\nu+1}}+\ldots.$$

А тогда матрица (38) ((46)) будет реализовывать заданный гомоморфизм, поскольку на основании (21)

$$\int_{\gamma_j} d\Phi_{x_0}(x)=U_1\int_{\gamma_j} d\psi_1(x)+U_2\int_{\gamma_j} d\psi_2(x)+U_1U_2\int_{\gamma_j} d\psi_3(x)+U_2U_1\int_{\gamma_j} d\psi_4(x)=$$

$$=U_1\psi_{1j}+U_2\psi_{2j}+U_1U_2\psi_{3j}+U_2U_1\psi_{4j}=V_j-E=2\pi iW_j,$$

где

$$\psi_{1j}=\int_{\gamma_j} dL_1(x)+\rho_{12}\int_{\gamma_j} dL_{121}(x)+\rho_{12}^2\int_{\gamma_j} dL_{1(21)^2}(x)+\ldots+\rho_{12}^{\nu}\int_{\gamma_j} dL_{1(21)^{\nu}}(x)+\ldots,$$

$$\psi_{2j}=\int_{\gamma_j} dL_2(x)+\rho_{21}\int_{\gamma_j} dL_{212}(x)+\rho_{21}^2\int_{\gamma_j} dL_{2(12)^2}(x)+\ldots+\rho_{21}^{\nu}\int_{\gamma_j} dL_{2(12)^{\nu}}(x)+\ldots,$$

$$\psi_{3j}=\int_{\gamma_j} dL_{12}(x)+\rho_{12}\int_{\gamma_j} dL_{(12)^2}(x)+\rho_{12}^2\int_{\gamma_j} dL_{(12)^3}(x)+\ldots+\rho_{12}^{\nu}\int_{\gamma_j} dL_{(12)^{\nu}}(x)+\ldots,$$

$$\psi_{4j}=\int_{\gamma_j} dL_{21}(x)+\rho_{21}\int_{\gamma_j} dL_{(21)^2}(x)+\rho_{21}^2\int_{\gamma_j} dL_{(21)^3}(x)+\ldots+\rho_{21}^{\nu}\int_{\gamma_j} dL_{(21)^{\nu}}(x)+\ldots. \quad (47)$$

Теорема 3. Если матрицы монодромии V_j, $j=\overline{1,3}$, задаются в виде (30), то система (37) с матрицами-вычетами (36), (44), (41), (47) имеет фундаментальную матрицу решений вида (46), реализующую заданный гомоморфизм (6).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Болибрух, А.А.*** Проблема Римана – Гильберта / А.А. Болибрух // Успехи матем. наук. – 1990. – Т. 45. – Вып. 2. – С. 3–47.
2. ***Лаппо-Данилевский, И.А.*** Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / И.А. Лаппо-Данилевский. – М. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1957. – 456 с.
3. ***Голубева, В.А.*** О фуксовых системах дифференциальных уравнений на комплексном проективном пространстве / В.А. Голубева // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 9. – С. 1570–1580.
4. ***Dekkers, W.*** The matrix of a connection having regular singularities on a vector bundle of rank 2 on $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ / W. Dekkers // Lecture Notes in Math. – 1979. – V. 712. – P. 33–43.

5. ***Амелькин, В.В.*** Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения / В.В. Амелькин. – М. : Едиториал УРСС, 2010. – 144 с.
6. ***Амелькин, В.В.*** Решение системы Фукса второго порядка с четырьмя особыми точками и специальной группой монодромии / В.В. Амелькин, М.Н. Василевич // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 16–22.
7. ***Итс, А.Р.*** Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана / А.Р. Итс [и др.]. – М. ; Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2005. – 728 с.
8. ***Еругин, Н.П.*** Проблема Римана II / Н.П. Еругин // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 5. – С. 779–799.
9. ***Амелькин, В.В.*** Построение линейной системы Пфаффа типа Фукса с алгебраическим многообразием особенностей / В.В. Амелькин, М.Н. Василевич // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 6. – С. 768–776.

Поступила в редакцию 07.05.2013 г.