УДК 372.853

Н.И. АВДЕЕВА[1], А.В. КУЗЬМИН,
А.Г. ПОГУЛЯЕВА[2], В.В. ХМУРОВИЧ[3]

ФОРМИРОВАНИЕ ЗНАНИЙ И УМЕНИЙ ПО ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В данной статье на основе анализа действующих нормативных документов по метрологии рассматривается вопрос о формировании знаний и умений по обработке (свертке) результатов равноточных измерений. Обработка сводится к вычислению результата измерений и его погрешности, обусловленной случайными факторами, которые невозможно учесть при проведении измерений.

Введение

Измерение – это процесс, преобразующий определенное свойство объекта через наше восприятие в число [1]. Измерения не являются самоцелью. Они имеют определенную область использования, например, научные исследования, контроль параметров продукции, измерение параметров окружающей среды, измерения на лабораторных занятиях и т.д.

---

[1] Выпускница физико-математического факультета 1971 г.
[2] Выпускница физико-математического факультета 2002 г.
[3] Выпускница физико-математического факультета 1993 г.

Измерения, проводимые на лабораторных занятиях физического практикума, направлены на:

• формирование основ экспериментальной грамотности и культуры, которые являются определяющими при проведении измерений в разных областях сферы деятельности;

• формирование системы знаний и умений по физическому описанию реальных объектов, процессов, явлений и, на основе этого правильного понятия о взаимоотношении между теорией и экспериментом и представления о физике как науке, провозглашающей верховенство эксперимента над теорией.

Для того чтобы обучающая функция измерений была эффективна, у обучаемых прежде всего необходимо сформировать целостную систему знаний и умений по измерению физических величин, которая включает:

• знание о физической величине и ее измерении;

• понятие о погрешности и точности измерений;

• общие сведения о средствах измерений и их метрологических характеристиках;

• умение проводить математическую обработку результатов измерений и вычислять их;

• знание о формах представления результата измерений;

• умение проводить анализ результатов измерений и правильно их интерпретировать.

Основными информационными источниками знаний по измерению физической величины являются нормативно-методические и нормативно-технические документы по практической метрологии, например, [2–5]. Методика формирования знаний и умений по измерению физической величины предложена в учебном пособии [6], а организацию учебно-познавательной деятельности можно реализовать по методике, изложенной в [7].

Одним из основных вопросов при овладении целостной системы знаний и умений по измерению физической величины является формирование знаний и умений по математической обработке результатов измерений. После того как эксперимент выполнен и получены результаты измерений, как правило, возникает проблема представления этого числового массива данных в компактной форме, удобной для дальнейшего использования или сопоставления с другими результатами. Обработка экспериментальных данных сводится к свертке информации, полученной при измерении, то есть к вычислению по ряду результатов измерений результата и его погрешности, обусловленной случайными факторами, которые невозможно учесть при проведении измерений. Прежде чем приступить к обработке, исходя из цели измерений и условий их проведения, нужно выбрать метод обработки и в соответствии с его алгоритмом осуществить свертку информации. Для осуществления этой операции необходимы определенные знания в области практической метрологии, а для правильного и осознанного применения этих знаний – определенный уровень знаний по математической статистике.

В данной статье на основе анализа действующих нормативных документов по метрологии [2–5] рассматривается вопрос о формировании знаний и умений по обработке (свертке) результатов равноточных измерений.

Равноточными измерениями называют ряд измерений одной и той же величины, выполненных одинаковыми по точности средствами измерений в одних и тех же условиях с одинаковой тщательностью [2].

Математические основы статистической обработки результатов равноточных измерений

Результаты единичных измерений, как правило, отличаются друг от друга, т.е. их числовые значения зависят от факторов, которые невозможно учесть при проведении повторных измерений. Вследствие этого возникают вопросы:

• какое из значений измеряемой величины заслуживает наибольшего доверия?

• какое значение следует брать за результат измерений?

Ответы на эти вопросы дает выборочный метод математической статистики [8], суть которого состоит в следующем. Результат единичного измерения x_i в ряду результатов измерений считается *случайной величиной*, так как его значение зависит от исхода опыта, даже если опыт повторяется в одних и тех же условиях. Совокупность результатов единичных измерений $x_1, x_2, \ldots x_n$ – это случайная *выборка* из *генеральной* (*теоретической, гипотетической*) *совокупности* – из всевозможных результатов, заполняющих конечный или бесконечный промежуток, которые можно получить вообще при выбранных условиях проведения эксперимента.

Одной из важных особенностей генеральной совокупности является число x – центр совокупности, вокруг которого группируются ее значения. Существует три числовые характеристики положения x: *математическое ожидание* – среднее арифметическое генеральной совокупности, *мода* – значение x генеральной совокупности, которое делит пополам площадь под кривой плотности распределения вероятностей генеральной совокупности, и *медиана* – значение x генеральной совокупности, при котором плотность распределения вероятностей генеральной совокупности достигает максимума. Если три характеристики положения совпадают, то в этом случае распределение генеральной совокупности считается нормальным и математическое ожидание берется за *центр распределения*. При этом если систематическая (одного знака) погрешность измерений отсутствует, то за истинное значение измеряемой величины берется *математическое ожидание* генеральной совокупности результатов измерений.

Для описания рассеяния значений генеральной совокупности относительно *математического ожидания* $M(x)$ используют, как правило, следующие числовые характеристики рассеяния случайной величины: *среднее отклонение* $r(x)$, *среднее квадратическое отклонение* $\sigma(x)$.

Выборочный метод позволяет *оценить* математическое ожидание $M(x)$ и числовые характеристики рассеяния $r(x)$ и $\sigma(x)$. Обозначим произвольную числовую характеристику генеральной совокупности через Θ. Оценка любой числовой характеристики Θ может быть точечной и интервальной. *Точечной* называют оценку, которая определяется *одним числом* – a. *Интервальной* называют оценку, которая определяется *двумя числами* – *концами интервала* $(a-\Delta, a+\Delta)$, где Δ – точность оценки. Интервальная оценка позволяет установить не только точность, но и надежность оценок. *Надежностью* (*доверительной вероятностью*) оценки называется вероятность P, с которой выполняется неравенство $|\Theta - a| < \Delta$, или равносильное ему соотношение $a-\Delta < \Theta < a+\Delta$. Обычно надежность оценки задается наперед. В измерительной практике, как правило, $P = 0{,}95$. Когда не требуется высокая точность оценки – $P = 0{,}99$. Таким образом, интервальная оценка сводится к оценке числовой характеристики Θ генеральной совокупности при помощи доверительного интервала. *Доверительным интервалом* называют интервал $a-\Delta<\Theta<a+\Delta$, который *покрывает* (включает) неизвестный параметр с заданной надежностью P. Концы доверительного интервала $(a-\Delta, a+\Delta)$ называют *доверительными границами*.

Если серия результатов $x_1, x_2, \ldots x_n$ является случайной выборкой объема n из совокупности значений, подчиняющихся *нормальному распределению*, то [8]:

1. В качестве *точечной оценки математического ожидания* принимается ***выборочное*** (*эмпирическое*) ***среднее***, которое вычисляют как *среднее арифметическое* всех элементов выборки:

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}. \quad (1)$$

2. В качестве *точечной оценки среднего отклонения* принимается величина, которая называется ***средним абсолютным отклонением***:

$$\overline{\Delta x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-\overline{x}\right|}{n}=\frac{\left|x_1-\overline{x}\right|+\left|x_2-\overline{x}\right|+\ldots+\left|x_n-\overline{x}\right|}{n}. \quad (2)$$

3. В качестве *точечной оценки среднего квадратического отклонения* принимается ***выборочное среднее квадратическое отклонение*** (*эмпирический стандарт)*:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{n-1}},\ n\le 30 \quad (3)$$

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{n}},\ n>30. \quad (4)$$

При этом:

• абсолютное значение отклонения не превосходит утроенного выборочного среднего квадратического отклонения

$$\left|\Delta x_i\right|\le 3S; \quad (5)$$

• среднее абсолютное отклонение $\overline{\Delta x}$ и эмпирический стандарт S связаны между собой приближенным соотношением

$$\frac{S}{\overline{\Delta x}}\approx\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (6)$$

4. *Интервальная (доверительная) оценка математического ожидания* $M(x)$ задается ***доверительным интервалом*** $\overline{x}-\Delta x<M(x)<\overline{x}+\Delta x, P$, покрывающим математическое ожидание с надежностью P, или его ***доверительными границами***

$(\bar{x} \pm \Delta x), P$. Здесь $\bar{x}$ – выборочное среднее, Δx – точность оценки *математического ожидания* $M(x)$, которую при объеме выборки $n < 30$ можно вычислить по формуле

$$\Delta x = t_{P,n} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \tag{7}$$

где число $t_{P,n}$ – это коэффициент Стьюдента для объема выборки n и доверительной вероятности (надежности) P.

При *равноточных измерениях* физической величины результаты единичных измерений $x_1, x_2, \dots x_n$ (где n – число единичных измерений) представляют собой выборку из *нормально* распределенной генеральной совокупности и за результат измерений принимается среднее арифметическое (1). В этом несложно убедиться, если провести лабораторное занятие по изучению статистических закономерностей, методика которого изложена в [6, с. 105]. Если учтены поправки на действие систематических погрешностей или систематические погрешности отсутствуют, то в этом случае *математическое ожидание* совпадает с *истинным значением измеряемой величины* [4], [6], [8]. При этом:

1. Среднее абсолютное отклонение $\overline{\Delta x}$ (2) называется *средней арифметической погрешностью.*

2. Эмпирический стандарт S (стандартное отклонение, выборочное среднее квадратическое отклонение) (3) и (4) называется *средней квадратической погрешностью измерений* (*средней квадратической погрешностью*).

3. Точность оценки математического ожидания Δx (7) называется *доверительной границей случайной погрешности результата измерений* и характеризует точность оценки истинного значения измеряемой величины.

4. По результатам равноточных измерений можно указать *доверительный интервал* $\bar{x} - \Delta x < x < \bar{x} + \Delta x, P, n$, который с заданной надежностью P покрывает истинное значение измеряемой величины или его *доверительные границы* $(\bar{x} \pm \Delta x), P, n$.

Статистическая обработка ряда результатов равноточных измерений

При выполнении лабораторных работ физического практикума, как правило:

– оценивается истинное значение физической величины по ряду результатов измерений;

– не все систематические погрешности измерений можно учесть до проведения измерений;

– количество проводимых измерений невелико ($n < 15$).

Учитывая, что при свертке результатов равноточных измерений можно использовать две оценочные характеристики рассеяния случайной величины (*выборочное среднее квадратическое отклонение* S и *среднее абсолютное отклонение* $\overline{\Delta x}$), основываясь на анализе нормативных документов [2–5], предлагается следующий порядок обработки (свертки) результатов равноточных измерений в учебной лаборатории.

Допустим, что в результате прямого измерения некоторой величины X получены n единичных результатов x_1, x_2, ... x_n, которые можно считать равноточными. При статистической обработке результатов равноточных измерений физической величины X следует:

1. Вычислить среднее арифметическое результатов измерений (1):

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Среднее арифметическое (точечная оценка математического ожидания) принимается за результат измерений. Если учтены поправки на действие систематических погрешностей или систематические погрешности отсутствуют, то среднее арифметическое является точечной оценкой истинного значения измеряемой величины.

2. Рассчитать абсолютные отклонения каждого единичного результата измерения:

$$\Delta x_i = \left| x_i - \overline{x} \right|.$$

Если учтены поправки на действие систематических погрешностей или систематические погрешности отсутствуют, то Δx_i – абсолютная погрешность i-ого единичного результата.

3. Вычислить стандартное отклонение:

$$\text{А)}\ S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1}}\ \text{(см. (3)).}$$

$$\text{Б)}\ S \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\overline{\Delta x}\ \text{(см. (6)), где}\ \overline{\Delta x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \overline{x}\right|}{n} = \frac{\left|x_1 - \overline{x}\right| + \left|x_2 - \overline{x}\right| + \ldots + \left|x_n - \overline{x}\right|}{n}\ \text{(см. (2)).}$$

Если учтены поправки на действие систематических погрешностей или систематические погрешности отсутствуют, то S – средняя квадратическая погрешность результатов измерений.

В зависимости от способа вычисления стандартного отклонения (**А)** или **Б)**) возможны два варианта обработки результатов равноточных измерений:

– *способ А*, регламентируемый нормативными документами [5];

– *способ Б*, дающий более грубую оценку точности измерений, но более простой при вычислении.

4. Исключить промахи.

4.1. Рассчитать предельное абсолютное отклонение результатов измерений:

$$\Delta x^{пред} = 3S.$$

4.2. Сравнить $\Delta x^{пред}$ со значением абсолютного отклонения каждого единичного результата.

4.3. Если $\Delta x_i > \Delta x^{пред}$, то результат i-ого измерения рассматривают как промах и его следует отбросить, после этого заново произвести расчеты $\bar{x}, \Delta x_i, S$.

5. Вычислить точность оценки Δx математического ожидания по формуле (7)

$$\Delta x = t_{P,n} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}},$$

где число $t_{P,n}$ – это коэффициент Стьюдента для объема выборки n и доверительной вероятности P.

Если учтены поправки на действие систематических погрешностей или систематические погрешности отсутствуют, то Δx – доверительная граница случайной погрешности результата измерений, которая характеризует точность оценки истинного значения измеряемой величины. В этом случае п. 6 не выполняется. Следует перейти к выполнению п. 7.

6. Проверить результат измерений на наличие систематической погрешности – сравнить результат измерений с принятым опорным значением a.

Если $|\bar{x} - a| < t_{P,n} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$, то можно считать, что результат измерений не содержит систематической (одного знака) погрешности. Результат измерений $\bar{x}$ является оценкой истинного значения x измеряемой физической величины и $\Delta x = t_{P,n} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ – доверительная граница случайной погрешности результата измерений.

Если $|\bar{x} - a| > t_{P,n} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$, то результат измерения содержит систематическую (одного знака) погрешность. В этом случае можно считать, что результат измерений $\bar{x}$ не является оценкой истинного значения x измеряемой физической величины.

7. Записать результат измерений в форме, удобной для их дальнейшего анализа и использования [3], [5]:

$$\bar{x}, S_{\bar{x}}, n, \Delta x, P,$$

где $S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$ (8) – выборочное среднее квадратическое отклонение среднего арифметического.

Если учтены поправки на действие систематических погрешностей или систематические погрешности отсутствуют, то $S_{\bar{x}}$ – *средняя квадратическая погрешность результата измерений.*

При записи результата измерений обязательно следует учесть результаты проверки (см. п. 6). Если п. 6 не выполнялся и нет сведений об отсутствии систематической погрешности, то следует указать, что проверка на наличие систематической погрешности не проводилась.

Примечания. При свертке числовой информации необходимо выполнить определенные вычислительные операции, в которых задействованы результаты измерений – числа приближенные. Поэтому согласно [2]:

– все расчеты выполняют по правилам приближенных вычислений, при этом в промежуточных результатах целесообразно сохранять одну запасную цифру;

– характеристики погрешности и их статистические оценки выражают числом, содержащим не более двух значащих цифр; допускается также оставлять одну значащую цифру, в этом случае числовое значение получают округлением в большую сторону, если цифра последующего разряда равна или больше пяти, или в меньшую сторону, если эта цифра меньше пяти (в учебной лаборатории конечные числовые значения оценочных характеристик рассеяния округляют до двух значащих цифр, если первая из них равна "1" или "2", и до одной значащей цифры, если первая есть "3" и "более");

– конечный результат измерений округляют так, чтобы его последняя значащая цифра и последняя значащая цифра значения оценочной характеристики погрешности принадлежали одному разряду;

– измеряемая величина, оценочная характеристика погрешности должны иметь одни и те же единицы измерения.

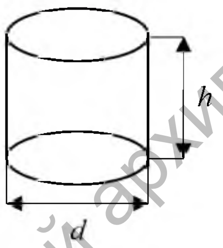
Рассмотрим процесс обработки результатов равноточных измерений на конкретном примере.

Пример. При измерении поперечных размеров стержня с одинаковой тщательностью в одних и тех же внешних условиях с помощью микрометра получены следующие результаты: 5,96; 6,00; 6,03; 5,96; 5,94; 6,02; 5,98; 6,04; 6,03; 5,97 (мм). Сроки поверки микрометра не истекли. Представить результаты измерений в форме, удобной для их дальнейшего анализа и использования.

Анализ условия задачи

1. Объект измерения – стержень. Требуется определить диаметр стержня. Диаметр – это элемент правильной геометрической фигуры, которая называется кругом [9]. Для достижения цели поперечное сечение стержня принимаем за круг диаметра $d = const$ (рисунок).

2. Результаты измерений получены:



– с одной и той же точностью (так как получены одним и тем же средством измерений);

– в одних и тех же условиях (внешние условия не менялись, объект измерения один и тот же – стержень);

– с одинаковой тщательностью (одним и тем же экспериментатором).

Следовательно, результаты измерений – это *ряд результатов равноточных измерений.*

3. Результаты измерений не содержат систематической (одного знака) погрешности (так как сроки поверки микрометра не истекли и результаты получены непосредственно методом прямого измерения).

Выводы из анализа условия задачи

– За диаметр стержня d принимаем среднее арифметическое равноточных измерений.

– Точность оценки будет определяться случайной погрешностью результата измерений ($S_{\bar{d}}$ или Δd).

Таблица записи результатов измерений

Представим результаты измерений в виде таблицы (см. второй столбец)

Результаты измерений и их обработки

№	d_i, мм	Δd_i, мм	$\Delta d_i^{\,2}$, мм^2	Примечания
1	5,96	0,033	0,0011	
2	6,00	0,007	0,000049	
3	6,03	0,037	0,0014	
4	5,96	0,033	0,0011	
5	5,94	0,053	0,0028	
6	6,02	0,027	0,00073	
7	5,98	0,013	0,00017	
8	6,04	0,047	0,0028	
9	6,03	0,037	0,0014	
10	5,97	0,023	0,00053	
	$\overline{d} = 5{,}99\underline{3}$	$\overline{\Delta d} = 0{,}03\underline{1}$	$\sum_{i=1}^{10} \Delta d_i^2 = 0{,}011\underline{4}$	

Обработка результатов равноточных измерений (способ **А**)

1. *Находим среднее арифметическое* $\overline{d}$ результатов измерений d_i:

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}.$$

За результат измерений принимается $\overline{d}$. Заносим полученный результат в последнюю строку второго столбца таблицы. Из анализа условия следует, что он не содержит систематической погрешности.

2. *Вычисляем абсолютные значения погрешностей* Δd_i*:*

$$\Delta d_i = \left| d_i - \overline{d} \right|.$$

Заносим значения в третий столбец таблицы.

Рассчитываем Δd_i^2 и помещаем результаты в четвертом столбце. Находим сумму $\sum_{i=1}^{n} \Delta d_i^2$ и записываем в последней строке четвертого столбца таблицы.

3. *Вычисляем среднюю квадратическую погрешность результатов измерений* (3):

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta d_i^{\,2}}{n-1}}.$$

При подстановке числовых значений получаем $S = \sqrt{\frac{0{,}011\underline{4}}{9}} = 0{,}036$ *мм.*

4. *Проводим проверку результатов измерений на наличие промахов:*

– рассчитываем предельную погрешность $\Delta d^{пред} = 3 \cdot S$, $\Delta d^{пред} = 0{,}11$ *мм*;

– находим максимальное значение Δd_i в таблице: $\Delta d_5 = \Delta d_8 = 0{,}05$ *мм*;

– сравниваем значения Δd_i и $\Delta d^{пред}$: $\Delta d_5 < \Delta d^{пред}$ $(0{,}05 < 0{,}11)$, следовательно, пятое и восьмое значения из результатов измерений не являются промахом.

Примечание. Если обнаружен промах, то в последнем столбце таблицы напротив такого значения делается соответствующая запись. Далее следует, отбросив данное значение, заново составить таблицу, определить среднее значение результатов измерений, абсолютные погрешности каждого результата измерения и т.д.

5. *Вычисляем среднюю квадратическую погрешность результата измерений* (8):

$$S_{\overline{d}} = \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Подставив числовые значения, получаем

$$S_{\overline{d}} = \frac{0{,}036}{\sqrt{10}} = 0{,}0113 \approx 0{,}011 \ (мм).$$

6. *Вычисляем доверительную границу случайной погрешности результата измерений* (7):

$$\Delta d = t_{P,n} \cdot S_{\overline{d}} \text{ при } P = 0{,}95,\ n = 10,\ t_{0{,}95;10} = 2{,}26.$$

Подставив числовые значения, получаем $\Delta d = 2{,}26 \cdot 0{,}011 = 0{,}025$ (*мм*).

7. *Проверяем результат измерений на наличие систематической погрешности.*

При анализе экспериментальных данных установлено, что предложенный ряд результатов измерений не содержит систематической погрешности.

8. *Записываем результат измерений:*

$$d = 5{,}993мм,\ S_{\overline{d}} = 0{,}011мм,\ n = 10,\ \Delta d = \pm 0{,}025мм,\ P = 0{,}95.$$

Обработка результатов равноточных измерений (способ Б)

1. *Находим среднее арифметическое* $\overline{d}$ *результатов измерений* d_i:

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}.$$

За результат измерений принимаем $\overline{d}$. Заносим полученный результат в последнюю строку второго столбца таблицы. Из анализа условия следует, что он не содержит систематической погрешности.

2. *Вычисляем абсолютные значения погрешностей* Δd_i:

$$\Delta d_i = \left| d_i - \overline{d} \right|.$$

Заносим значения в третий столбец таблицы, вычисляем среднюю арифметическую погрешность результатов измерений (2):

$$\overline{\Delta d} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|d_i - \overline{d}\right|}{n} = \frac{\left|d_1 - \overline{d}\right| + \left|d_2 - \overline{d}\right| + 3\ \ + \left|d_n - \overline{d}\right|}{n}.$$

Полученное значение записываем в последней строке третьего столбца таблицы.

3. *Вычисляем среднюю квадратическую погрешность результатов измерений* (4):

$$S \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \overline{\Delta d},$$

$$S \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot 0{,}03\underline{1} = 0{,}03\underline{9}(мм).$$

4. *Проводим проверку результатов измерений на наличие промахов:*

– рассчитываем предельную погрешность $\Delta d^{пред} = 3 \cdot S$, $\Delta d^{пред} = 0{,}12$ *мм*;

– находим максимальное значение Δd_i в таблице: $\Delta d_5 = \Delta d_8 = 0{,}05$ *мм*;

– сравниваем значения Δd_i и $\Delta d^{пред}$: $\Delta d_5 < \Delta d^{пред}$ ($0{,}05 < 0{,}12$), следовательно, пятое и восьмое значения из ряда результатов измерений не являются промахом.

Примечание. Если обнаружен промах, то в последнем столбце таблицы напротив такого значения делается соответствующая запись. Далее следует, отбросив данное значение, заново составить таблицу, определить среднее значение результатов измерений, абсолютные погрешности каждого результата измерения и т.д.

5. *Вычисляем среднюю квадратическую погрешность результата измерений* (8):

$$S_{\overline{d}} = \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Подставив числовые значения, получаем $S_{\overline{d}} = \frac{0{,}039}{\sqrt{10}} \approx 0{,}012$ (*мм*).

6. *Вычисляем доверительную границу случайной погрешности результата измерений:*

$$\Delta d = t_{P,n} \cdot S_{\overline{d}} \text{ при } P = 0{,}95,\ n = 10,\ t_{0,95;10} = 2{,}26.$$

Подставив числовые значения, получаем $\Delta d = 2{,}26 \cdot 0{,}012 = 0{,}027$ (*мм*).

7. *Проверяем результат измерений на наличие систематической погрешности.*

При анализе экспериментальных данных установлено, что, предложенный ряд результатов измерений не содержит систематической погрешности.

8. *Записываем результат измерений:*

$$d = 5{,}993 мм,\ S_{\overline{d}} = 0{,}012 мм,\ n = 10,\ \Delta d = \pm 0{,}027 мм,\ P = 0{,}95.$$

Заключение

При формировании знаний и умений по обработке равноточных измерений следует акцентировать внимание обучаемых на следующих аспектах:

1. Необходимо убедиться, что все измерения обрабатываемого ряда являются равноточными.

2. Если исключены систематические погрешности путем введения поправок, то среднее арифметическое (результат измерений) является оценкой истинного значения измеряемой величины. Математическое ожидание в данном случае совпадает с истинным значением измеряемой величины. Влияние внешних факторов учитывается случайной погрешностью измерений. В качестве характеристик случайной погрешности на альтернативной основе используют количественные оценки рассеяния результатов измерений.

3. Если не исключены систематические погрешности путем введения поправок, то среднее арифметическое (результат измерений) не является оценкой истинного значения измеряемой величины. Математическое ожидание в данном случае не совпадает с истинным значением измеряемой величины. Результат измерений является оценкой математического ожидания и смещен относительно истинного значения измеряемой величины.

4. Если до проведения эксперимента невозможно установить наличие систематической (одного знака) погрешности, то необходима проверка на ее наличие. В противном случае следует отметить, что на правильность результат не проверялся.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Гласс, Дж.*** Статистические методы в педагогике и психологии / Дж. Гласс, Дж. Стэнли. – М. : Прогресс, 1976. – 495 с.
2. Государственная система обеспечения единства измерений. Результаты и характеристики погрешности измерений. Формы представления. Способы использования при испытаниях образцов продукции и контроле их параметров. МИ 1317-2004. – Введ. 20.12.2004. – М. : Госстандарт России: Федер. госуд. унит. предпр. Всерос. науч.-исслед. ин-т метрологической службы, 2004. – 21 с.
3. Точность (правильность и прецизионность) методов и результатов измерений. Часть 4. Основные методы определения правильности стандартного метода измерений: ГОСТ Р ИСО 5725-4-2002. – Введ. 01.11.02. – М. : Госстандарт России: Федер. госуд. унит. предпр. Всерос. науч.-исслед. ин-т метрологической службы, 2002. – 32 с.
4. Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Основные термины и определения: РМГ 29 – 99. – Введ. 01.01.01. – М. : Госстандарт России: Всерос. науч.-исслед. ин-т метрологии им. Д.И. Менделеева, 2000. – 58 с.
5. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения: ГОСТ 8.207-76. – Введ. 01.01.77. – М. : Стандартинформ, 2006. – 7 с.
6. ***Авдеева, Н.И.*** Методы обработки результатов измерений : учеб. пособие / Н.И. Авдеева, А.А. Луцевич, В.В. Хмурович. – Могилев : УО "МГУ им. А.А. Кулешова", 2004. – 154 с.
7. ***Авдеева, Н.И.*** Организация учебно-познавательной деятельности на лабораторных занятиях по физике / Н.И. Авдеева, А.Г. Погуляева, В.В. Хмурович // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. Сер. С, Псіхолага-педагагічныя навукі. – 2012. – № 2(40). – С. 52–71.
8. ***Гмурман, В.Е.*** Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / В.Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 2001. – 479 с.
9. ***Рывкин, А.А.*** Справочник по математике / А.А. Рывкин, А.З. Рывкин, Л.С. Хренков. – М. : Высшая школа, 1975. – 544 с.

Поступила в редакцию 25.03.2013 г.