

МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 517.925

В.Н. ЛАПТИНСКИЙ, О.А. МАКОВЕЦКАЯ

АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА – РИККАТИ (левосторонняя регуляризация)

Получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова – Риккати и априорная оценка области локализации решения. Дан итерационный алгоритм построения решения, основанный на вычислительной схеме классического метода последовательных приближений.

Введение

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + F(t, X), \quad X(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (1)$$

$$X(0) = X(\omega), \quad (2)$$

где $t \in I$, $A, B, Q \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $F \in C(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^{n \times n})$. Предполагается, что матрица-функция $F(t, X)$ в области $D_{\tilde{\rho}} = \{(t, X) : t \in I, \|X\| < \tilde{\rho}\}$ удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально); $F(t, 0) \neq 0$; $I = [0, \omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde{\rho} \leq \infty$.

При $Q = 0$ двухточечная краевая задача качественными методами исследовалась в работе [1], конструктивными методами [2] – в [3–5], с периодическими краевыми условиями – в [6–8].

Основная часть

Примем следующие обозначения:

$$D_{\rho} = \{(t, X) : t \in I, \|X\| \leq \rho\}, \quad D = \{X(t) : \|X\|_{\mathbb{C}} \leq \rho\}, \quad \tilde{A}(\omega) = \int_0^{\omega} A(\tau) d\tau,$$
$$\gamma = \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|, \quad \delta = \max_t \|Q(t)\|, \quad h = \max_t \|F(t, 0)\|,$$
$$\varphi(\rho) = \gamma \delta \omega \left(1 + \frac{1}{2} \alpha \omega\right) \rho^2 + \gamma \omega \left[\beta + L + \frac{1}{2} \alpha \omega (\alpha + \beta + L)\right] \rho + \gamma \omega h \left(1 + \frac{1}{2} \alpha \omega\right),$$
$$q(\rho) = \gamma \delta \omega (\alpha \omega + 2) \rho + \frac{1}{2} \gamma \alpha \omega^2 (\alpha + \beta + L) + \gamma \omega (\beta + L), \quad \|X\|_{\mathbb{C}} = \max_t \|X(t)\|,$$

где $0 < \rho < \bar{\rho}$, $t \in I$, $L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t, X)$ в области D_ρ , $\|\cdot\|$ – подходящая норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [9, с. 21].

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

$$\det \tilde{A}(\omega) \neq 0, \quad (3)$$

$$\varphi(\rho) \leq \rho, \quad (4)$$

$$q(\rho) < 1. \quad (5)$$

Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единственно, при этом справедлива оценка $\|X\|_c \leq \varphi(\rho)$.

Доказательство. Используя условие (3), сначала выведем матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2).

Пусть $X(t)$ – решение задачи (1), (2). Тогда из (1) имеем

$$X(t) = X(0) + \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau. \quad (6)$$

Полагая в (6) $t = \omega$, получим на основании условия (2)

$$\int_0^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau = 0. \quad (7)$$

Запишем соотношение (7) в следующем виде:

$$\int_0^\omega A(\tau)X(\tau) d\tau = - \int_0^\omega [X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau. \quad (8)$$

В (8) воспользуемся тождеством типа [2, с. 47]:

$$\int_0^\omega A(\tau)X(\tau) d\tau = \tilde{A}(\omega)X(t) - \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) dX(\tau) + \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) dX(\tau). \quad (9)$$

Соотношение (8) на основании (9) и в силу (1) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\omega)X(t) = & \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \\ & + F(\tau, X(\tau))] d\tau - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \\ & + F(\tau, X(\tau))] d\tau - \int_0^\omega [X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau. \end{aligned}$$

Так как, согласно (3), $\det \tilde{A}(\omega) \neq 0$, то отсюда получим матричное интегральное уравнение вида

$$\begin{aligned}
X(t) = & \tilde{A}^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \right. \right. \\
& \left. \left. + F(\tau, X(\tau)) \right] d\tau - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \right. \right. \\
& \left. \left. + F(\tau, X(\tau)) \right] d\tau - \int_0^\omega \left[X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau)) \right] d\tau \right\}. \quad (10)
\end{aligned}$$

Уравнение (10) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
X(t) = & \int_0^\omega K(t, \tau) \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau)) \right] d\tau - \\
& - \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^\omega \left[X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau)) \right] d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$K(t, \tau) = \begin{cases} \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^\tau A(\sigma) d\sigma, & 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ -\tilde{A}^{-1}(\omega) \int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma, & 0 \leq t < \tau \leq \omega. \end{cases}$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение матричного интегрального уравнения (10) является решением задачи (1), (2). Это можно показать с помощью несложных выкладок. А именно: сначала обратимся к тождеству (10). Дифференцируя по t обе части этого тождества, получим

$$dX(t) = \left[A(t)X(t) + X(t)B(t) + X(t)Q(t)X(t) + F(t, X(t)) \right] dt.$$

Далее воспользуемся этим соотношением в (10) и выполним затем интегрирование по частям, используя известную формулу [9, с. 52]. Тогда получим последовательно

$$\begin{aligned}
X(t) = & \tilde{A}^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) dX(\tau) - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) dX(\tau) - \right. \\
& \left. - \int_0^\omega \left[dX(\tau) - A(\tau)X(\tau) d\tau \right] \right\} = \tilde{A}^{-1}(\omega) \left\{ \left(\int_0^t A(\sigma) d\sigma \right) X(t) - \int_0^t A(\tau)X(\tau) d\tau + \right. \\
& \left. + \left(\int_t^\omega A(\sigma) d\sigma \right) X(t) - \int_t^\omega A(\tau)X(\tau) d\tau - \int_0^\omega dX(\tau) + \int_0^\omega A(\tau)X(\tau) d\tau \right\} =
\end{aligned}$$

$$= \tilde{A}^{-1}(\omega) \left\{ \tilde{A}(\omega) X(t) - \int_0^{\omega} dX(\tau) \right\} = X(t) - \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^{\omega} dX(\tau).$$

Отсюда имеем

$$\int_0^{\omega} dX(\tau) = 0,$$

то есть условие (2) имеет место.

Исследуем разрешимость уравнения (10). Это уравнение запишем в операторной форме:

$$X = \mathcal{L}(X), \quad (11)$$

где через \mathcal{L} обозначен соответствующий интегральный оператор в (10). Этот оператор действует на множестве $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$.

Покажем, что из условий (4), (5) следует выполнение принципа Банаха – Каччиопполи [10, с. 605] сжимающих отображений на множестве D , то есть в замкнутом шаре $\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \rho$.

Сначала покажем, что $\mathcal{L}(X) \in D$ для произвольной матрицы-функции $X(t) \in D$. Выполнив оценки по норме в (11), получим последовательно

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(X)\| &\leq \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\| \left\| \int_0^t \left(\int_0^{\tau} A(\sigma) d\sigma \right) \left[A(\tau) X(\tau) + X(\tau) B(\tau) + X(\tau) Q(\tau) X(\tau) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + F(\tau, X(\tau)) \right] d\tau - \int_t^{\omega} \left(\int_{\tau}^{\omega} A(\sigma) d\sigma \right) \left[A(\tau) X(\tau) + X(\tau) B(\tau) + X(\tau) Q(\tau) X(\tau) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + F(\tau, X(\tau)) \right] d\tau - \int_0^{\omega} \left[X(\tau) B(\tau) + X(\tau) Q(\tau) X(\tau) + F(\tau, X(\tau)) \right] d\tau \right\| \leq \\ &\leq \gamma \left\{ \int_0^t \left\| \int_0^{\tau} A(\sigma) d\sigma \right\| \left\| A(\tau) X(\tau) + X(\tau) B(\tau) + X(\tau) Q(\tau) X(\tau) + F(\tau, X(\tau)) \right\| d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_t^{\omega} \left\| \int_{\tau}^{\omega} A(\sigma) d\sigma \right\| \left\| A(\tau) X(\tau) + X(\tau) B(\tau) + X(\tau) Q(\tau) X(\tau) + F(\tau, X(\tau)) \right\| d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\omega} \left\| X(\tau) B(\tau) + X(\tau) Q(\tau) X(\tau) + F(\tau, X(\tau)) \right\| d\tau \right\} \leq \\ &\leq \gamma \left\{ \int_0^t \left(\int_0^{\tau} \|A(\sigma)\| d\sigma \right) \left[(\|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|) \|X(\tau)\| + \|Q(\tau)\| \|X(\tau)\|^2 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|F(\tau, X(\tau))\| d\tau + \int_0^\omega \left(\int_0^\tau \|A(\sigma)\| d\sigma \right) \left[(\|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|) \|X(\tau)\| + \|Q(\tau)\| \|X(\tau)\|^2 + \right. \\
& \left. + \|F(\tau, X(\tau))\| \right] d\tau + \int_0^\omega \left(\|B(\tau)\| \|X(\tau)\| + \|Q(\tau)\| \|X(\tau)\|^2 + \|F(\tau, X(\tau))\| \right) d\tau \Big\} \leq \\
& \leq \gamma \left\{ \alpha \int_0^t \left[(\alpha + \beta) \|X(\tau)\| + \delta \|X(\tau)\|^2 + \|F(\tau, X(\tau))\| \right] d\tau + \right. \\
& \left. + \alpha \int_0^\omega (\omega - \tau) \left[(\alpha + \beta) \|X(\tau)\| + \delta \|X(\tau)\|^2 + \|F(\tau, X(\tau))\| \right] d\tau + \right. \\
& \left. + \int_0^\omega \left[\beta \|X(\tau)\| + \delta \|X(\tau)\|^2 + \|F(\tau, X(\tau))\| \right] d\tau \right\} \leq \\
& \leq \gamma \omega \left\{ \frac{1}{2} \alpha \omega \left[\delta \rho^2 + (\alpha + \beta + L) \rho + h \right] + \delta \rho^2 + (\beta + L) \rho + h \right\}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\mathcal{L}(X)\| \leq \gamma \omega \left\{ \frac{1}{2} \alpha \omega \left[\delta \rho^2 + (\alpha + \beta + L) \rho + h \right] + \delta \rho^2 + (\beta + L) \rho + h \right\} = \varphi(\rho). \quad (12)$$

Из (12) на основании (4) следует соотношение

$$\|\mathcal{L}(X)\|_c \leq \rho. \quad (13)$$

Далее из (11) имеем для произвольных $\tilde{X}, \tilde{\tilde{X}} \in D$:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}}) - \mathcal{L}(\tilde{X}) = \\
& = \tilde{A}^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau \|A(\sigma)\| d\sigma \right) \left[A(\tau) (\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)) + (\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)) B(\tau) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \tilde{\tilde{X}}(\tau) Q(\tau) \tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau) Q(\tau) \tilde{X}(\tau) + F(\tau, \tilde{\tilde{X}}(\tau)) - F(\tau, \tilde{X}(\tau)) \right] d\tau - \right. \\
& \left. - \int_0^\omega \left(\int_0^\tau \|A(\sigma)\| d\sigma \right) \left[A(\tau) (\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)) + (\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)) B(\tau) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \tilde{\tilde{X}}(\tau) Q(\tau) \tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau) Q(\tau) \tilde{X}(\tau) + F(\tau, \tilde{\tilde{X}}(\tau)) - F(\tau, \tilde{X}(\tau)) \right] d\tau - \right. \\
& \left. - \int_0^\omega \left[(\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)) B(\tau) + \tilde{\tilde{X}}(\tau) Q(\tau) \tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau) Q(\tau) \tilde{X}(\tau) + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$+F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) - F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) \Big] d\tau \Big\}.$$

Преобразуем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) &= \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) + \\ + \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) &= \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\left(\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\right) + \\ + \left(\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\right)Q(\tau)\tilde{X}(\tau), \end{aligned}$$

а затем оценим его по норме

$$\left\| \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) \right\| \leq 2\rho\delta \left\| \tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right\|.$$

Используя эту оценку, получим последовательно

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{L}(\tilde{X}) - \mathcal{L}(\tilde{X}) \right\| &\leq \gamma \left\{ \int_0^t \int_0^\tau \left\| A(\sigma) d\sigma \right\| \left\| A(\tau) \left(\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right) + \left(\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right) B(\tau) + \right. \right. \\ &+ \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) + F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) - F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) \Big\| d\tau + \\ &+ \int_t^\infty \int_\tau^\infty \left\| A(\sigma) d\sigma \right\| \left\| A(\tau) \left(\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right) + \left(\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right) B(\tau) + \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \right. \\ &- \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) + F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) - F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) \Big\| d\tau + \int_0^\infty \left\| \left(\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right) B(\tau) + \right. \\ &+ \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) + F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) - F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) \Big\| d\tau \Big\} \leq \\ &\leq \gamma \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau \left\| A(\sigma) \right\| d\sigma \right) \left[\left(\left\| A(\tau) \right\| + \left\| B(\tau) \right\| \right) \left\| \tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right\| + \right. \right. \\ &+ \left\| \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) \right\| + \left\| F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) - F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) \right\| \Big] d\tau + \\ &+ \int_t^\infty \left(\int_\tau^\infty \left\| A(\sigma) \right\| d\sigma \right) \left[\left(\left\| A(\tau) \right\| + \left\| B(\tau) \right\| \right) \left\| \tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right\| + \right. \\ &+ \left\| \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) \right\| + \left\| F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) - F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) \right\| \Big] d\tau + \\ &+ \int_0^\infty \left[\left\| B(\tau) \right\| \left\| \tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right\| + \left\| \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) \right\| + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| F(\tau, \tilde{X}(\tau)) - F(\tau, \tilde{X}(\tau)) \right\| d\tau \Big\} \leq \gamma \left\{ \alpha(\alpha + \beta + 2\delta\rho + L) \int_0^t \left\| \tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right\| d\tau + \right. \\
& \quad + \alpha(\alpha + \beta + 2\delta\rho + L) \int_t^\omega (\omega - \tau) \left\| \tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right\| d\tau + \\
& \quad \left. + (\beta + 2\delta\rho + L) \int_0^\omega \left\| \tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right\| d\tau \right\} \leq \\
& \leq \gamma\omega \left[\frac{1}{2} \alpha\omega(2\delta\rho + \alpha + \beta + L) + 2\delta\rho + \beta + L \right] \left\| \tilde{X} - \tilde{X} \right\|_c = q \left\| \tilde{X} - \tilde{X} \right\|_c.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем оценку

$$\left\| \mathcal{L}(\tilde{X}) - \mathcal{L}(\tilde{X}) \right\|_c \leq q \left\| \tilde{X} - \tilde{X} \right\|_c. \quad (14)$$

Из анализа соотношений (13), (14) видно, что неравенства (4), (5) являются условиями принципа сжимающих отображений применительно к (11). На основании этого заключаем, что в шаре $\|X\|_c \leq \rho$ решение уравнения (11) существует и единственно. Таким образом, задача (1), (2) однозначно разрешима в области D_ρ . При этом на основании (12) справедлива оценка $\|X\|_c \leq \varphi(\rho)$. Теорема полностью доказана.

Для построения решения матричного интегрального уравнения (10) воспользуемся классическим методом последовательных приближений [10, с. 605], [11, с. 53]:

$$\begin{aligned}
X_{k+1}(t) = & \tilde{A}^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) \left[A(\tau) X_k(\tau) + X_k(\tau) B(\tau) + X_k(\tau) Q(\tau) X_k(\tau) + \right. \right. \\
& \left. \left. + F(\tau, X_k(\tau)) \right] d\tau - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) \left[A(\tau) X_k(\tau) + X_k(\tau) B(\tau) + \right. \right. \\
& \left. \left. + X_k(\tau) Q(\tau) X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau)) \right] d\tau - \right. \\
& \left. - \int_0^\omega \left[X_k(\tau) B(\tau) + X_k(\tau) Q(\tau) X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau)) \right] d\tau \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)
\end{aligned}$$

где $X_0(t)$ – произвольная матричная функция класса $\mathcal{C}[0, \omega]$, принадлежащая множеству D .

Используя условие (4), нетрудно доказать индукцией по k , что все приближенные решения, полученные по алгоритму (15), принадлежат множеству D . Основой доказательства является рекуррентная оценка

$$\|X_{k+1}\|_c \leq \gamma\delta\omega \left(1 + \frac{1}{2} \alpha\omega \right) \|X_k\|_c^2 + \gamma\omega \left[\beta + L + \frac{1}{2} \alpha\omega(\alpha + \beta + L) \right] \|X_k\|_c +$$

$$+\gamma\omega h\left(1+\frac{1}{2}\alpha\omega\right), k=0,1,2,\dots,$$

которую нетрудно получить по аналогии с (12).

Изучим вопрос о сходимости полученной последовательности. Следуя известному приему [11, с. 54], этот вопрос заменим эквивалентным вопросом о сходимости ряда

$$X_0(t) + (X_1(t) - X_0(t)) + (X_2(t) - X_1(t)) + \dots + (X_k(t) - X_{k-1}(t)) + \dots \quad (16)$$

Докажем равномерную по $t \in [0, \omega]$ сходимость ряда (16). Для этого построим сходящийся числовой ряд, который мажорирует на $[0, \omega]$ матричный функциональный ряд (16).

Оценим $\|X_{m+1}(t) - X_m(t)\|$, учитывая, что

$$X_{m+1}(t) - X_m(t) = \mathcal{L}(X_m(t)) - \mathcal{L}(X_{m-1}(t)), m=1,2,\dots \quad (17)$$

Выполнив оценки в (17), получим на основании (14)

$$\|X_{m+1}(t) - X_m(t)\| = \|\mathcal{L}(X_m(t)) - \mathcal{L}(X_{m-1}(t))\| \leq q \|X_m - X_{m-1}\|_{\mathbb{C}}.$$

Отсюда следует рекуррентная оценка

$$\|X_{m+1} - X_m\|_{\mathbb{C}} \leq q \|X_m - X_{m-1}\|_{\mathbb{C}}, m=1,2,\dots \quad (18)$$

На основе (18) получим явную оценку

$$\|X_{m+1} - X_m\|_{\mathbb{C}} \leq q^m \|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}, m=1,2,\dots \quad (19)$$

при этом $\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}} = \|\mathcal{L}(X_0) - X_0\|_{\mathbb{C}}$.

Используя оценку (18), нетрудно доказать с помощью известных приемов [10, с. 605], [11, с. 54], что последовательность $\{X_k(t)\}_0^\infty$ сходится равномерно по $t \in I$ к решению интегрального уравнения (10), при этом справедливы оценки

$$\|X - X_k\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{q^k}{1-q} \|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}, k=0,1,2,\dots, \quad (20)$$

$$\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \|X_0\|_{\mathbb{C}} + \frac{\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}}{1-q}. \quad (21)$$

Замечание. Приближенные решения, построенные по алгоритму (15), вообще говоря, не обязаны удовлетворять краевому условию (2). В связи с этим следует получить соответствующую оценку для $\|X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0)\|$, $k=0,1,2,\dots$. На основании (15) имеем

$$\frac{dX_{k+1}(t)}{dt} = A(t)X_k(t) + X_k(t)B(t) + X_k(t)Q(t)X_k(t) + F(t, X_k(t)). \quad (22)$$

Подставляя (22) в правую часть (15) и выполняя затем интегрирование по частям, получим

$$\tilde{A}^{-1}(\omega) \left\{ X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0) + \int_0^{\omega} A(\tau) [X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)] d\tau \right\} = 0.$$

Отсюда имеем соотношение

$$\Delta_{k+1} \equiv X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0) = - \int_0^{\omega} A(\tau) [X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)] d\tau. \quad (23)$$

Выполнив оценки по норме в (23), получим

$$\begin{aligned} \|\Delta_{k+1}\| &\leq \int_0^{\omega} \|A(\tau) [X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)]\| d\tau \leq \int_0^{\omega} \|A(\tau)\| \|X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq \alpha \int_0^{\omega} \|X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)\| d\tau \leq \alpha\omega \|X_{k+1} - X_k\|_C. \end{aligned}$$

Отсюда на основании (19) имеем оценку

$$\|X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0)\| \leq \alpha\omega q^k \|X_1 - X_0\|_C, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

Оценки (20), (21), (24) следует дополнить оценкой для $\|X_1 - X_0\|_C$. В случае $X_0 = 0$ эту оценку можно получить в конструктивном виде. В самом деле, из (15) при $k = 0$ имеем в этом случае

$$X_1(t) = \int_0^{\omega} K(t, \tau) F(\tau, 0) d\tau. \quad (25)$$

Выполнив оценки по норме в (25), получим

$$\|X_1(t)\| \leq \int_0^{\omega} \|K(t, \tau) F(\tau, 0)\| d\tau \leq h \int_0^{\omega} \|K(t, \tau)\| d\tau \leq \frac{1}{2} \gamma \alpha \omega^2 h. \quad (26)$$

Используя (26), получим из (21)

$$\|X\|_C \leq \frac{\gamma \alpha \omega^2 h}{2(1-q)}. \quad (27)$$

Очевидно, оценка (27) будет эффективной, если

$$\frac{\gamma \alpha \omega^2 h}{2(1-q)} \leq \rho.$$

Легко видеть, что это соотношение выполняется при достаточно малых значениях ω, h .

Итак, доказана

Теорема 2. Пусть выполняются условия (3)–(5). Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением (15).

Заклучение

Основные результаты данной работы заключаются в следующем:

- в невырожденном случае с левосторонней регуляризацией разработана конструктивная методика получения эквивалентного интегрального уравнения для периодической краевой задачи уравнения Ляпунова - Риккати;
- получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости указанного уравнения;
- исследован алгоритм построения приближенных решений с вычислительной схемой классического метода последовательных приближений;
- выведены конструктивные оценки области локализации решения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Murty, K.N.** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems existence and uniqueness / K.N. Murty, G.W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl. – 1992. – V. 167. – P. 505–515.
2. **Лаптинский, В.Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В.Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
3. **Laptinsky, V.N.** On the Two-Point Boundary-Value Problem for the Riccati Matrix Differential Equations / V.N. Laptinsky, I.I. Makovetsky // Central European Science Journal. – 2005. – V. 3(1). – P. 143–154.
4. **Лаптинский, В.Н.** К конструктивному анализу двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова / В.Н. Лаптинский, И.И. Маковецкий // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41. – № 7. – С. 994–996.
5. **Лаптинский, В.Н.** О разрешимости двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова / В.Н. Лаптинский, И.И. Маковецкий // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 3. – С. 218–223.
6. **Лаптинский, В.Н.** О периодических решениях нелинейных матричных дифференциальных уравнений / В.Н. Лаптинский // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1997. – № 4. – С. 14–18.
7. **Лаптинский, В.Н.** Конструктивный анализ периодической краевой задачи для нелинейного матричного дифференциального уравнения Ляпунова / В.Н. Лаптинский. – Могилев : Белорусско-Российский университет, 2007. – 26 с. – (Препринт / ИТМ НАН Беларуси; № 7).
8. **Подолян, С.В.** Периодические решения нелинейных матричных дифференциальных уравнений / С.В. Подолян // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1988. – № 6. – С. 31–34.
9. **Демидович, Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.
10. **Канторович, Л.В.** Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 744 с.
11. **Бибиков, Ю.Н.** Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Н. Бибиков. – М. : Высшая школа, 1991. – 303 с.

Поступила в редакцию 04.10.2011 г.