УДК 535.51

Е.М. ОВСИЮК

О НАХОЖДЕНИИ ПАРАМЕТРОВ МАТРИЦ МЮЛЛЕРА ЛОРЕНЦЕВСКОГО ТИПА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В предположении, что оптический элемент описывается матрицей Мюллера лоренцевского типа, развита методика нахождения 3-мерного комплексного вектор-параметра Федорова соответствующих матриц Мюллера по результатам поляризационных измерений при известном в литературе специальном выборе четырех зондовых пучков света.

Для аналитического описания состояния поляризации света используются 4 параметра Стокса [1]. При любом линейном оптическом процессе параметры Стокса падающего пучка линейно преобразуются в параметры Стокса вышедшего пучка с помощью матрицы Мюллера [2]; любой оптический элемент описывается своей матрицей Мюллера. Поляризация света может описываться также в рамках формализма Джонса [3-6]; при этом состояние поляризации света задается 2-мерным комплексным вектором, линейные оптические элементы описываются 2-мерными матрицами Джонса.

Стоит отметить, что 2-мерный формализм Джонса пригоден только для описания полностью поляризованного света, в то время как формализм Стокса применим также и для описания частично поляризованного света.

Теория матриц Мюллера недеполяризующих оптических систем развивалась в работах П.И. Ламекина [7-14]. В частности, были описаны собственные поляризации всех типов недеполяризующих оптических систем; в рамках формализма матриц Мюллера построена общая классификация недеполяризующих оптических систем; построены полярные формы матриц Мюллера недеполяризующих систем.

В настоящей работе основное внимание уделяется другим аспектам теории матриц Мюллера. Известно, что при описании полностью или частично поляризованного света существенную роль может играть группа псевдоортогональных преобразований, изоморфная группе Лоренца. Это означает, что техника оперирования с преобразованиями Лоренца, хорошо развитая в релятивистской физике [15-19], может сыграть существенную эвристическую роль при анализе вопросов оптики поляризованного света. А.А. Богушем и др. были инициированы исследования теории матриц Мюллера с акцентом на их групповой структуре, в частности, на группе псевдоортогональных преобразований, изоморфных группе Лоренца [20-27]. При этом была описана общая факторизованная структура возможных матриц Мюллера, показана эффективность применения параметризации Федорова в теории матриц Мюллера лоренцевского типа, найден способ построения 4-мерных спиноров Джонса для частично поляризованного света, выполнен теоретико-групповой анализ степени неопределенности матрицы Мюллера оптического элемента из результатов одного поляризационного измерения, построена классификация возможных вырожденных матриц Мюллера с нулевым определителем.

1. Действие лоренцевских бустов на частично поляризованный свет

Рассмотрим применение лоренцевских преобразований в контексте формализма Мюллера. При этом будем использовать аналогию между 4-векторами Стокса частично поляризованного света и 4-векторами скорости массивных частиц в релятивистской кинематике:

$$S^a = (I, I\mathbf{p}), \qquad U^a = (U^0, U^0\mathbf{V});$$

эти две 4-мерные величины ведут себя одинаково относительно лоренцевских бустов:

$$L = \begin{vmatrix} \operatorname{ch}\beta & -\mathbf{e}\operatorname{sh}\beta \\ -\mathbf{e}\operatorname{sh}\beta & [\delta_{ij} + (\operatorname{ch}\beta - 1)e_i e_j] \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{e}^2 = 1. \tag{1.1}$$

Такой буст действует на стоксов 4-вектор согласно

$$I' = I\,(\text{ch}\,\beta - \text{sh}\,\beta\,\mathbf{ep}), \quad I'\mathbf{p}' = I\,[\,-\text{sh}\,\beta\,\mathbf{e} + \mathbf{p} + (\text{ch}\,\beta - 1)\,\mathbf{e}(\mathbf{ep})\,]$$

или

$$I' = I\,(\text{ch}\,\beta - \text{sh}\,\beta\,\mathbf{ep}), \quad \mathbf{p}' = \frac{-\text{sh}\,\beta\,\mathbf{e} + \mathbf{p} + (\text{ch}\,\beta - 1)\,\mathbf{e}(\mathbf{ep})}{\text{ch}\,\beta - \text{sh}\,\beta\,\mathbf{ep}}. \tag{1.2}$$

Рассмотрим несколько специальных случаев.

Первый:

$$\mathbf{e}\,\mathbf{p} = 0, \qquad I' = I\,\text{ch}\,\beta, \qquad \mathbf{p}' = \frac{-\text{sh}\,\beta\,\mathbf{e} + \mathbf{p}}{\text{ch}\,\beta}. \tag{1.3}$$

Второй:

$$\mathbf{p} = +p\,\mathbf{e}, \quad I' = I\,(\text{ch}\,\beta - \text{sh}\,\beta\,p), \quad \mathbf{p}' = p'\,\mathbf{e} = \frac{-\text{sh}\,\beta + \text{ch}\,\beta\,p}{\text{ch}\,\beta - \text{sh}\,\beta\,p}\,\mathbf{e}. \tag{1.4}$$

При этом существует “система отсчета покоя”, в которой частично поляризованный свет выглядит как естественный свет:

$$L_0 = L_0(\beta_0, \mathbf{n}), \qquad \text{th}\,\beta_0 = p,$$

$$p' = 0, \qquad I' = I\,(\text{ch}\,\beta_0 - \text{sh}_0\,\beta\,\text{th}\,\beta_0) = \frac{I}{\text{ch}\,\beta_0}. \tag{1.5}$$

Третий:

$$\underline{\mathbf{p} = -p\,\mathbf{e}}, \qquad I' = I\,(\text{ch}\,\beta + \text{sh}\,\beta\,p), \quad \mathbf{p}' = p'\,\mathbf{e} = -\frac{\text{sh}\,\beta + \text{ch}\,\beta\,p}{\text{ch}\,\beta + \text{sh}\,\beta\,p}\,\mathbf{e}; \tag{1.6}$$

здесь также существует аналог “системы покоя” L_0, в которой частично поляризованный свет выглядит как естественный.

Теперь рассмотрим роль релятивистского эллипсоида в поляризационной оптике. Исходим из преобразования Лоренца (Мюллера) (1.2). Учитывая тождество

$$I'^2(1 - p'^2) = I^2(1 - p^2) \qquad \Rightarrow \qquad 1 - p'^2 = \frac{1 - p^2}{[\text{ch}\,\beta - \text{sh}\,\beta\,(\mathbf{ep})]^2} \tag{1.7}$$

и затем исключая переменную $\mathbf{p}$

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}' + \mathbf{e}\,\text{sh}\,\beta + (\text{ch}\,\beta - 1)\,\mathbf{e}(\mathbf{e}\,\mathbf{p}')}{\text{ch}\,\beta + \text{sh}\,\beta\,\mathbf{e}\,\mathbf{p}'},$$

$$\text{ch}\,\beta - \text{sh}\,\beta(\mathbf{ep}) = \frac{1}{\text{ch}\,\beta + \text{sh}\,\beta\,\mathbf{ep}'}, \tag{1.8}$$

приходим к соотношению

$$1 - p'^2 = (1 - p^2)\,(\text{ch}\,\beta + \text{sh}\,\beta\,\mathbf{ep}')^2, \tag{1.9}$$

которое представляет собой уравнение эллипсоида, ориентированного вдоль вектора $\mathbf{e}$.

2. Действие лоренцевских бустов на полностью поляризованный свет

Рассмотрим действие мюллеровских (лоренцевских) бустов на полностью поляризованный свет (аналог изотропных 4-векторов релятивистской кинематики), описываемый 4-вектором Стокса

$$S^a = (I, I\mathbf{n}), \qquad \mathbf{n}^2 = 1. \tag{2.1}$$

Относительно лоренц-мюллеровских бустов (1.1) стоксов 4-вектор (2.1) преобразуется согласно:

$$I' = I\,(\mathrm{ch}\,\beta - \mathrm{sh}\,\beta\,\mathbf{en}), \qquad \mathbf{n}' = \frac{-\mathrm{sh}\,\beta\,\mathbf{e} + \mathbf{n} + (\mathrm{ch}\,\beta - 1)\,\mathbf{e}(\mathbf{en})}{\mathrm{ch}\,\beta - \mathrm{sh}\,\beta\,\mathbf{en}}. \tag{2.2}$$

Можно выделить несколько специальных случаев.

Первый:

$$\underline{\mathbf{e}\,\mathbf{n} = 0}, \qquad I' = I\ \mathrm{ch}\,\beta, \qquad \mathbf{n}' = \frac{\mathbf{n} - \mathrm{sh}\,\beta\,\mathbf{e}}{\mathrm{ch}\,\beta}. \tag{2.3}$$

Второй:

$$\underline{\mathbf{e} = +\,\mathbf{n}}, \qquad I' = I\,(\mathrm{ch}\,\beta - \mathrm{sh}\,\beta) = I\,e^{-\beta},$$

$$\mathbf{n}' = \frac{-\mathrm{sh}\,\beta\,\mathbf{n} + \mathbf{n} + (\mathrm{ch}\,\beta - 1)\,\mathbf{n}}{\mathrm{ch}\,\beta - \mathrm{sh}\,\beta} = +\mathbf{n}. \tag{2.4}$$

Третий:

$$\underline{\mathbf{e} = -\,\mathbf{n}}, \qquad I' = I\,(\mathrm{ch}\,\beta + \mathrm{sh}\,\beta) = I\,e^{+\beta},$$

$$\mathbf{n}' = \frac{\mathrm{sh}\,\beta\,\mathbf{n} + \mathbf{n} + (\mathrm{ch}\,\beta - 1)\,\mathbf{n}}{\mathrm{ch}\,\beta + \mathrm{sh}\,\beta} = +\mathbf{n}. \tag{2.5}$$

Отмечаем, что известный факт отсутствия “системы покоя” для изотропных 4-векторов в релятивистской кинематике проявляется в оптике как невозможность преобразовать полностью поляризованный свет в естественный.

3. Об измерении параметров матриц Лоренца-Мюллера

В книге Снопко [28] изложен способ восстановления 16 элементов матрицы Мюллера (причем не обязательно лоренцевского типа); метод основан на использовании специальным образом выбранных зондирующих пучков света (одного естественного и трех полностью поляризованных). Естественно поставить вопрос о выделении из общей методики [28] специального случая матриц Мюллера лоренцевского типа. Эта задача решена в настоящей работе.

Изложим алгоритм нахождения матриц Мюллера произвольного оптического элемента (пока без всяких ограничений к классу, сопоставимых с лоренцевскими матрицами Мюллера) [28]. Первым зондирующим пучком света выбирается естественный свет

$$S^{a}_{(0)} = (I,0,0,0) \quad \Rightarrow \quad S^{a'}_{(0)},$$

$$M = \begin{vmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I = S^{0}_{(0)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S^{0'}_{(0)} \\ S^{1'}_{(0)} \\ S^{2'}_{(0)} \\ S^{3'}_{(0)} \end{vmatrix},$$

$$m_{00} I = S^{0'}_{(0)}, \qquad m_{10} I = S^{1'}_{(0)}, \qquad m_{20} I = S^{2'}_{(0)}, \qquad m_{30} I = S^{3'}_{(0)}. \tag{3.1}$$

Следующие три зондирующих пучка выбираются полностью поляризованными, причем специального вида. В результате получим

$$S^{a}_{(1)} = (I,I,0,0) \quad \Rightarrow \quad S^{a'}_{(1)},$$

$$M = \begin{vmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I \\ I \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S^{0'}_{(1)} \\ S^{1'}_{(1)} \\ S^{2'}_{(1)} \\ S^{3'}_{(1)} \end{vmatrix},$$

$$S^{0'}_{(0)} + m_{01} I = S^{0'}_{(1)}, \qquad S^{1'}_{(0)} + m_{11} I = S^{1'}_{(1)},$$

$$S^{2'}_{(0)} + m_{21} I = S^{2'}_{(1)}, \qquad S^{3'}_{(0)} + m_{31} I = S^{3'}_{(1)}; \tag{3.2}$$

$$S^{a}_{(2)} = (I,0,I,0) \quad \Rightarrow \quad S^{a'}_{(2)},$$

$$M = \begin{vmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I \\ 0 \\ I \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S^{0'}_{(2)} \\ S^{1'}_{(2)} \\ S^{2'}_{(2)} \\ S^{3'}_{(2)} \end{vmatrix},$$

$$S^{0'}_{(0)} + m_{02} I = S^{0'}_{(2)}, \qquad S^{1'}_{(0)} + m_{12} I = S^{1'}_{(2)},$$

$$S^{2'}_{(0)} + m_{22} I = S^{2'}_{(2)}, \qquad S^{3'}_{(0)} + m_{32} I = S^{3'}_{(2)}; \tag{3.3}$$

$$S^{a}_{(3)} = (I,0,0,I) \quad \Rightarrow \quad S^{a'}_{(3)},$$

$$M = \begin{vmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S^{0'}_{(3)} \\ S^{1'}_{(3)} \\ S^{2'}_{(3)} \\ S^{3'}_{(3)} \end{vmatrix},$$

$$S^{0'}_{(0)} + m_{03} I = S^{0'}_{(3)}, \qquad S^{1'}_{(0)} + m_{13} I = S^{1'}_{(3)},$$

$$S^{2'}_{(0)} + m_{23} I = S^{2'}_{(3)}, \qquad S^{3'}_{(0)} + m_{33} I = S^{3'}_{(3)}. \tag{3.4}$$

Полученные системы уравнения приводят к следующим явным выражениям для 16 элементов матрицы Мюллера:

$$m_{00}=S^{0'}_{(0)}/I\,,\qquad m_{10}=S^{1'}_{(0)}/I\,,\qquad m_{20}=S^{2'}_{(0)}/I\,,\qquad m_{30}=S^{3'}_{(0)}/I\,,$$

$$m_{01}=\frac{S^{0'}_{(1)}-S^{0'}_{(0)}}{I}\,,\qquad m_{11}=\frac{S^{1'}_{(1)}-S^{1'}_{(0)}}{I}\,,\qquad m_{21}=\frac{S^{2'}_{(1)}-S^{2'}_{(0)}}{I}\,,\qquad m_{31}=\frac{S^{3'}_{(1)}-S^{3'}_{(0)}}{I}\,.$$

$$m_{02}=\frac{S^{0'}_{(2)}-S^{0'}_{(0)}}{I}\,,\qquad m_{12}=\frac{S^{1'}_{(2)}-S^{1'}_{(0)}}{I}\,,\qquad m_{22}=\frac{S^{2'}_{(2)}-S^{2'}_{(0)}}{I}\,,\qquad m_{32}=\frac{S^{3'}_{(2)}-S^{3'}_{(0)}}{I}\,.$$

$$m_{03}=\frac{S^{0'}_{(3)}-S^{0'}_{(0)}}{I}\,,\qquad m_{13}=\frac{S^{1'}_{(3)}-S^{1'}_{(0)}}{I}\,,\qquad m_{23}=\frac{S^{2'}_{(3)}-S^{2'}_{(0)}}{I}\,,\qquad m_{33}=\frac{S^{3'}_{(3)}-S^{3'}_{(0)}}{I}\,. \tag{3.5}$$

Нас будет интересовать случай, когда матрица Мюллера изоморфна матрице из группы Лоренца. Это означает, что мы должны учесть для четырех пар векторов Стокса условие инвариантности "релятивистской длины" $g_{ab}S^aS^b=g_{ab}S^{a'}S^{b'}$:

$$I^2=(S^{0'}_{(0)})^2-(\mathbf{S}'_{(0)})^2\,,\qquad 0=(S^{0'}_{(1)})^2-(\mathbf{S}'_{(1)})^2\,,$$

$$0=(S^{0'}_{(2)})^2-(\mathbf{S}'_{(2)})^2\,,\qquad 0=(S^{0'}_{(3)})^2-(\mathbf{S}'_{(3)})^2\,. \tag{3.6}$$

Сначала рассмотрим более простую задачу, предполагая, что матрица Мюллера изоморфна матрице из группы 3-мерных вращений:

$$M=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&m_{11}&m_{12}&m_{13}\\0&m_{21}&m_{22}&m_{23}\\0&m_{31}&m_{32}&m_{33}\end{vmatrix}. \tag{3.7}$$

При этом система (3.5) принимает вид

$$1=1\,,\qquad 0=0\,,\qquad 0=0\,,\qquad 0=0\,,$$

$$0=0\,,\qquad m_{11}=\frac{S^{1'}_{(1)}}{I}\,,\qquad m_{21}=\frac{S^{2'}_{(1)}}{I}\,,\qquad m_{31}=\frac{S^{3'}_{(1)}}{I}\,.$$

$$0=0\,,\qquad m_{12}=\frac{S^{1'}_{(2)}}{I}\,,\qquad m_{22}=\frac{S^{2'}_{(2)}}{I}\,,\qquad m_{32}=\frac{S^{3'}_{(2)}}{I}\,.$$

$$0=0\,,\qquad m_{13}=\frac{S^{1'}_{(3)}}{I}\,,\qquad m_{23}=\frac{S^{2'}_{(3)}}{I}\,,\qquad m_{33}=\frac{S^{3'}_{(3)}}{I}\,; \tag{3.8}$$

дополнительные условия упрощаются

$$I^2=I^2\,,\qquad I^2=(\mathbf{S}'_{(1)})^2\,,\qquad I^2=(\mathbf{S}'_{(2)})^2\,,\qquad I^2=(\mathbf{S}'_{(3)})^2\,. \tag{3.9}$$

Согласно (3.8) матрица (3.7) представима в виде (следим за трехмерной матрицей)

$$M = \frac{1}{I}\begin{vmatrix} S^{1'}_{(1)} & S^{1'}_{(2)} & S^{1'}_{(3)} \\ S^{2'}_{(1)} & S^{2'}_{(2)} & S^{2'}_{(3)} \\ S^{3'}_{(1)} & S^{3'}_{(2)} & S^{3'}_{(3)} \end{vmatrix}. \qquad (3.10)$$

Определитель этой матрицы (для группы вращений он должен быть равен +1) равен

$$\det M = \frac{1}{I}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{I^3}\,\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 1\,. \qquad (3.11a)$$

Если воспользоваться вектором поляризации $\mathbf{S} = I\ \mathbf{p}$, то полученное ограничение можно представить как

$$\mathbf{p}'_{(1)}(\mathbf{p}'_{(2)}\times\mathbf{p}'_{(3)}) = 1\,. \qquad (3.11b)$$

Отметим, что эти три вектора нельзя рассматривать как не связанные величины, поскольку они получены в результате действия одной и той же матрицы на вполне определенные начальные векторы поляризации:

$$\mathbf{p}_{(1)} = (1,0,0)\,, \qquad \mathbf{p}_{(2)} = (0,1,0)\,, \qquad \mathbf{p}_{(3)} = (0,0,1)\,. \qquad (3.11c)$$

Три вектора $\mathbf{p}'_{(1)},\mathbf{p}'_{(2)},\mathbf{p}'_{(3)}$ являются единичными, ортогональными друг другу и составляют правую тройку.

Матрица (3.10) должна быть отождествлена с ортогональной матрицей из группы $SO(3,R)$

$$O = \begin{vmatrix} 1-2(n_2^2+n_3^2) & -2n_0n_3+2n_1n_2 & +2n_0n_2+2n_1n_3 \\ +2n_0n_3+2n_1n_2 & 1-2(n_3^2+n_1^2) & -2n_0n_1+2n_2n_3 \\ -2n_0n_2+2n_1n_3 & +2n_0n_1+2n_2n_3 & 1-2(n_1^2+n_2^2), \end{vmatrix}. \qquad (3.12a)$$

Параметры подчинены условию

$$n_0^2+n_1^2+n_2^2+n_3^2 = +1\,. \qquad (3.12b)$$

Дальше воспользуемся (с небольшими изменениями) развитой в [18] методикой. Вычисляем $\mathrm{Sp}\,M$ и находим n_0:

$$\mathrm{Sp}\,M = (S^{1'}_{(1)} + S^{2'}_{(2)} + S^{3'}_{(3)})/I = p^{1'}_{(1)} + p^{2'}_{(2)} + p^{3'}_{(3)}\,,$$

$$2n_0 = \sqrt{p^{1'}_{(1)} + p^{2'}_{(2)} + p^{3'}_{(3)} + 1}\,. \qquad (3.13)$$

Выделяем в матрице антисимметричную часть матрицы $M_{as} = (M-\tilde{M})/2$ и приравниваем ее к $O_{as} = (O-\tilde{O})/2$:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -(p^{2'}_{(1)} - p^{1'}_{(2)}) & (p^{1'}_{(3)} - p^{3'}_{(1)}) \\ (p^{2'}_{(1)} - p^{1'}_{(2)}) & 0 & -(p^{3'}_{(2)} - p^{2'}_{(3)}) \\ -(p^{1'}_{(3)} - p^{3'}_{(1)}) & (p^{3'}_{(2)} - p^{2'}_{(3)}) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2n_0n_3 & +2n_0n_2 \\ +2n_0n_3 & 0 & -2n_0n_1 \\ -2n_0n_2 & +2n_0n_1 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (3.14)$$

В результате получаем

$$2n_0 n_1 = \frac{1}{2}(p^{3'}_{(2)} - p^{2'}_{(3)}) \Rightarrow n_1 = \frac{p^{3'}_{(2)} - p^{2'}_{(3)}}{2\sqrt{p^{1'}_{(1)} + p^{2'}_{(2)} + p^{3'}_{(3)} + 1}},$$

$$2n_0 n_2 = \frac{1}{2}(p^{1'}_{(3)} - p^{3'}_{(1)}) \Rightarrow n_2 = \frac{p^{1'}_{(3)} - p^{3'}_{(1)}}{2\sqrt{p^{1'}_{(1)} + p^{2'}_{(2)} + p^{3'}_{(3)} + 1}},$$

$$2n_0 n_3 = \frac{1}{2}(p^{2'}_{(1)} - p^{1'}_{(2)}) \Rightarrow n_3 = \frac{p^{2'}_{(1)} - p^{1'}_{(2)}}{2\sqrt{p^{1'}_{(1)} + p^{2'}_{(2)} + p^{3'}_{(3)} + 1}}. \qquad (3.15)$$

Отметим, что согласно методике [26] для восстановления матрицы Мюллера в 3-мерном случае достаточно было только двух пар векторов. Здесь используются три пары.

Возвращаемся к 4-мерной матрице Мюллера

$$M = \frac{1}{I}\begin{vmatrix} S^{0'}_{(0)} & S^{0'}_{(1)} - S^{0'}_{(0)} & S^{0'}_{(2)} - S^{0'}_{(0)} & S^{0'}_{(3)} - S^{0'}_{(0)} \\ S^{1'}_{(0)} & S^{1'}_{(1)} - S^{1'}_{(0)} & S^{1'}_{(2)} - S^{1'}_{(0)} & S^{1'}_{(3)} - S^{1'}_{(0)} \\ S^{2'}_{(0)} & S^{2'}_{(1)} - S^{2'}_{(0)} & S^{2'}_{(2)} - S^{2'}_{(0)} & S^{2'}_{(3)} - S^{2'}_{(0)} \\ S^{3'}_{(0)} & S^{3'}_{(1)} - S^{3'}_{(0)} & S^{3'}_{(2)} - S^{3'}_{(0)} & S^{3'}_{(3)} - S^{3'}_{(0)} \end{vmatrix} \qquad (3.16)$$

и введем следующие обозначения:

$$S^{a'}_{(0)} = F^a, \qquad S^{a'}_{(1)} = A^a, \qquad S^{a'}_{(2)} = B^a, \qquad S^{a'}_{(3)} = C^a. \qquad (3.17)$$

Тогда получим

$$M = \frac{1}{I}\begin{vmatrix} F^0 & A^0 - F^0 & B^0 - F^0 & C^0 - F^0 \\ F^1 & A^1 - F^1 & B^1 - F^1 & C^1 - F^1 \\ F^2 & A^2 - F^2 & B^2 - F^2 & C^2 - F^2 \\ F^3 & A^3 - F^3 & B^3 - F^3 & C^3 - F^3 \end{vmatrix}. \qquad (3.18)$$

Отождествим матрицу (3.18) с матрицей из группы Лоренца и воспользуемся развитой в [29] методикой восстановления параметров матрицы Лоренца по ее явному виду (в главных моментах она совпадает с развитой в книге Федорова [10], отличия связаны с переходом к спинорной накрывающей $SL(2.C)$ для группы Лоренца $L^{\uparrow}_{+}$). Изложим кратко этот алгоритм. Матрицу собственного ортохронного преобразования Лоренца можно представить следующим образом:

$$L_b^{\ a}(k, k^*) = \bar{\delta}^c_b \left[-\delta^a_c\, k^n\, k^*_n + k_c\, k^{a*} + k^*_c\, k^a + i\, \varepsilon_c^{\ anm}\, k_n\, k^*_m \right], \qquad (3.19)$$

где $\bar{\delta}^c_b$ – специальный (отличающийся от обычного) символ Кронекера:

$$\bar{\delta}^c_b = \begin{cases} 0, \text{ если } c \neq b; \\ +1, \text{ если } c = b = 0; \\ -1, \text{ если } c = b = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

Удобно 4-мерный параметр – вектор k_a разложить на действительную и мнимую части:

$$k_0 = m_0 - i\, n_0 = \Delta\, e^{i\kappa}\,, \qquad \vec{k} = (k_j) = \vec{m} - i\,\vec{n} \tag{3.20}$$

и представить матрицу Λ ($L_a^{\ b} = \bar{\delta}_a^c \Lambda_c^{\ b}$) в виде суммы симметричной и антисимметричной частей $\Lambda = (S + A)$: (использованы обозначения: $(\vec{n} \bullet \vec{n})_{ij} = n_i\, n_j$ $(\vec{m} \bullet \vec{m})_{ij} = m_i\, m_j$,$(\vec{b}^{\times})_{ij} = \varepsilon_{ijk}\, b_k$)

$$S = \begin{vmatrix} \Delta^2 + \vec{m}^2 + \vec{n}^2 & 2\,[\vec{n}\,\vec{m}\,] \\ 2\,[\vec{n}\,\vec{m}\,] & -\Delta^2 + \vec{m}^2 + \vec{n}^2 - 2\,\vec{m} \bullet \vec{m} - 2\,\vec{n} \bullet \vec{n} \end{vmatrix},$$

$$A = 2\,\Delta \begin{vmatrix} 0 & -(\vec{m}\cos\kappa - \vec{n}\sin\kappa) \\ (\vec{m}\cos\kappa - \vec{n}\sin\kappa) & (\vec{m}\cos\kappa + \vec{n}\sin\kappa)^{\times} \end{vmatrix}. \tag{3.21}$$

Учитывая характер зависимости элементов матрицы A от параметра κ, фазы комплексного числа k_0, вводим трехмерные векторы $\vec{M}$ и $\vec{N}$:

$$\begin{vmatrix} \vec{M} \\ \vec{N} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa \\ \sin\kappa & \cos\kappa \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{m} \\ \vec{n} \end{vmatrix}. \tag{3.22}$$

Тогда для матриц S и A получаем представления

$$S = \begin{vmatrix} \Delta^2 + \vec{M}^2 + \vec{N}^2 & 2\,[\vec{N}\,\vec{M}] \\ 2\,[\vec{N}\,\vec{M}] & -\Delta^2 + \vec{M}^2 + \vec{N}^2 - 2\,\vec{M} \bullet \vec{M} - 2\,\vec{N} \bullet \vec{N} \end{vmatrix},$$

$$A = 2\,\Delta \begin{vmatrix} 0 & -\vec{M} \\ +\vec{M} & \vec{N}^{\times} \end{vmatrix}. \tag{3.23}$$

Соотношения можно переписать как комплексное равенство

$$e^{-i\kappa}\,\vec{k} = e^{-i\kappa}\,(\,\vec{m} - i\,\vec{n}\,) = \vec{M} - i\,\vec{N}$$

и, соответственно, условие единичности детерминанта матрицы $B(k)$ можно представить в виде

$$\Delta^2 - (\,\vec{M} - i\,\vec{N})^2 = e^{-2i\kappa}\,. \tag{3.24}$$

Сформулируем правило для нахождения по явному виду матрицы $L_a^{\ b}$ отвечающего ей параметра k_a. Прежде всего, поскольку выполняется равенство

$$\mathrm{Sp}\, L = 2\,(g^{nm} + \bar{g}^{nm})\, k_n\, k_m^* = 4\, k_0\, k_0^* = 4\,\Delta^2\,, \tag{3.25}$$

то по значению $\mathrm{Sp}\, L$ нужно вычислить величину Δ. Затем по антисимметричной части A матрицы Λ с учетом уже известного выражения для Δ определяем векторы $\vec{M}$ и $\vec{N}$. И наконец, по найденным таким образом величинам $(\,\Delta, \vec{M}, \vec{N}\,)$ восстанавливаем параметр k_a:

$$(\,k_0, k_j\,) = \frac{\pm 1}{\sqrt{\Delta^2 - (\vec{M} - i\vec{N})^2}} \left(\Delta\,, \vec{M} - i\,\vec{N}\right), \tag{3.26}$$

где (±) отражают возможность нахождения спинорного преобразования из векторного только с точностью до знака.

Применим изложенный алгоритм для нахождения параметров матрицы M из (3.18). Вычисляем след матрицы M и параметр Δ

$$2\Delta = \pm\sqrt{\frac{F^0 + (A^1 - F^1) + (B^2 - F^2) + (C^3 - F^3)}{I}}. \qquad (3.27)$$

По матрице M находим матрицу Λ

$$\Lambda = \frac{1}{I}\begin{vmatrix} F^0 & (A^0 - F^0) & (B^0 - F^0) & (C^0 - F^0) \\ -F^1 & -(A^1 - F^1) & -(B^1 - F^1) & -(C^1 - F^1) \\ -F^2 & -(A^2 - F^2) & -(B^2 - F^2) & -(C^2 - F^2) \\ -F^3 & -(A^3 - F^3) & -(B^3 - F^3) & -(C^3 - F^3) \end{vmatrix}.$$

Вычисляем антисимметричную часть и отождествляем ее с антисимметричной частью матрицы Лоренца

$$\frac{1}{2I}\begin{vmatrix} 0 & -F^0 + F^1 + A^0 & -F^0 + F^2 + B^0 & -F^0 + F^3 + C^0 \\ F^0 - F^1 - A^0 & 0 & -B^1 + F^1 + A^2 - F^2 & -C^1 + F^1 + A^3 - F^3 \\ F^0 - F^2 - B^0 & B^1 - F^1 - A^2 + F^2 & 0 & -C^2 + F^2 + B^3 - F^3 \\ F^0 - F^3 - C^0 & C^1 - F^1 - A^3 + F^3 & C^2 - F^2 - B^3 + F^3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\,\Delta\begin{vmatrix} 0 & -M_1 & -M_2 & -M_3 \\ M_1 & 0 & N_3 & -N_2 \\ M_2 & -N_3 & 0 & N_1 \\ M_2 & N_2 & -N_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отсюда следует, что справедливы соотношения:

$$\frac{F^0 - F^1 - A^0}{2I} = 2\Delta M_1, \quad \frac{F^0 - F^2 - B^0}{2I} = 2\Delta M_2, \quad \frac{F^0 - F^2 - C^0}{2I} = 2\Delta M_3,$$

$$\frac{F^2 - F^3 - C^2 + B^3}{2I} = 2\Delta N^1, \quad \frac{F^3 - F^1 - A^3 + C^1}{2I} = 2\Delta N^2, \quad \frac{F^1 - F^2 - B^1 + A^2}{2I} = 2\Delta N^3. \qquad (3.28)$$

Ответ можно представить в более краткой форме, если перейти к 3-мерному вектор-параметру Федорова

$$\mathbf{q} = i\frac{\mathbf{k}}{k_0} = i\frac{\mathbf{M} - i\mathbf{N}}{\Delta}, \qquad (3.29)$$

т.е.

$$q_1 = 2i\frac{(F^0 - A^0) - F^1 - i[(F^2 - F^3) - (C^2 - B^3)]}{F^0 + (A^1 - F^1) + (B^2 - F^2) + (C^3 - F^3)},$$

$$q_2 = 2i\frac{(F^0 - B^0) - F^2 - i[(F^3 - F^1 - (A^3 - C^1)]}{F^0 + (A^1 - F^1) + (B^2 - F^2) + (C^3 - F^3)},$$

$$q_3 = 2i\frac{(F^0 - C^0) - F^2 - i[(F^1 - F^2) - (B^1 - A^2)]}{F^0 + (A^1 - F^1) + (B^2 - F^2) + (C^3 - F^3)}. \qquad (3.30)$$

Для контроля полученных формул рассмотрим простой пример. Пусть имеется матрица Мюллера лоренцевского типа

$$M = L = \begin{vmatrix} \cosh\beta & 0 & 0 & \sinh\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\beta & 0 & 0 & \cosh\beta \end{vmatrix}.$$

Тогда имеем

$$S^{0'}_{(0)} = F^0 = I\cosh\beta, \quad S^{1'}_{(0)} = F^1 = 0, \quad S^{2'}_{(0)} = F^2 = 0, \quad S^{3'}_{(0)} = F^3 = I\sinh\beta,$$

$$S^{0'}_{(1)} = A^0 = I\cosh\beta, \quad S^{1'}_{(1)} = A^1 = I, \quad S^{2'}_{(1)} = A^2 = 0, \quad S^{3'}_{(1)} = A^3 = I\sinh\beta,$$

$$S^{0'}_{(2)} = B^0 = I\cosh\beta, \quad S^{1'}_{(2)} = B^1 = 0, \quad S^{2'}_{(2)} = B^2 = I, \quad S^{3'}_{(2)} = B^3 = I\sinh\beta,$$

$$S^{0'}_{(3)} = C^0 = I(\cosh\beta + \sinh\beta), \qquad S^{1'}_{(3)} = C^1 = 0,$$

$$S^{2'}_{(3)} = C^2 = 0, \qquad S^{3'}_{(3)} = C^3 = I(\cosh\beta + \sinh\beta).$$

Следовательно, формулы (3.30) приводят к требуемому результату

$$q_1 = 0 \qquad q_2 = 0, \qquad q_3 = -i\frac{\sinh\beta}{\cosh\beta + 1} = -i\tanh\frac{\beta}{2}.$$

Автор благодарна В.М. Редькову за интерес к работе и полезные советы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Stokes, G.G.*** On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources / G.G. Stokes // Trans. Cambridge Phil. Soc. – 1852. – Vol. 9. – P. 399–416.
2. ***Mueller, H.*** Memorandum on the polarization optics of the photo-elestic shutter; Report № 2 of the OSRD project OEMsr576, Boston, MA, USA, 1943.
3. ***Jones, R.C.*** New calculus for the treatment of optical systems. I. Description and discussion of the calculus / R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 488–493.
4. ***Hurwitz, H.*** A new calculus for the treatment of optical systems. II. Proof of three general equivalence theorems / H. Hurwitz, R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 493–499.
5. ***Jones, R.C.*** A new calculus for the treatment of optical systems. III. The Sohncke Theory of optical activity / R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 500–503.
6. ***Jones, R.C.*** A new calculus for the treatment of optical systems, IV / R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1942. – Vol. 32. – P. 486–493.
7. ***Lamekin, P.I.*** Intrinsic polarization states of corner reflectors / P.I. Lamekin // Sov. J. Opt. Tech. – 1987. – Vol. 54. – P. 658–661.
8. ***Ламекин, П.И.*** Необходимые и достаточные условия неделяризуемости оптических систем / П.И. Ламекин // Оптика и спектроскопия. – 1996. – Т. 81. – Вып. 1. – С. 164–168.

9. ***Ламекин, П.И.*** Преобразование степени поляризации излучения оптическими системами / П.И. Ламекин // Оптический журнал. – 1997. – № 6. – С. 50–55.
10. ***Lamekin, P.I.*** Polar forms of Mueller matrices of nondepolarizing optical systems / P.I. Lamekin // Optics and Spectroscopy. – 2000. – Vol. 88. – № 5. – P. 737–742.
11. ***Lamekin, P.I.*** Polarization Eigenstates of Nondepolarizing Optical Systems / P.I. Lamekin // Optics and Spectroscopy. – 2001. – Vol. 91. – № 5. – P. 741–748.
12. ***Lamekin, P.I.*** Formalism of Mueller matrices and its application to calculation of phase-shifting devices / P.I. Lamekin, Yu.V. Sivaev, K.G. Predko // Optics of Crystals: Proceedings of SPIE / V.V. Shepelevich, N.N. Egorov (Eds.). – 2000. – Vol. 4358. – P. 289–293.
13. ***Lamekin, P.I.*** Mueller matrices of nondepolarizing optical systems: the theory and a new method of determination / P.I. Lamekin // Optics of Crystals: Proceedings of SPIE / V.V. Shepelevich, N.N. Egorov (Eds.). – 2000. – Vol. 4358. – P. 294–302.
14. ***Ламекин, П.И.*** Кратные собственные значения и собственные состояния поляризации матриц Мюллера частичных поляризаторов / П.И. Ламекин // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 5(8). – С. 128–132.
15. ***Гельфанд, И.М.*** Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения / И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро. – М. : Физматгиз, 1958. – 367 с.
16. ***Федоров, Ф.И.*** Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1958. – 380 с.
17. ***Федоров, Ф.И.*** Теория гиротропии / Ф.И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1976. – 456 с.
18. ***Федоров, Ф.И.*** Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
19. ***Березин, А.В.*** Кватернионы в релятивистской физике / А.В. Березин, Ю.А. Курочкин, Е.А. Толкачев. – Минск : Наука и техника, 1989. – 211 с.
20. ***Bogush, A.A.*** On Unique Parametrization of the Linear Group $GL(4.C)$ and Its Subgroups by Using the Dirac Algebra Basis / A.A. Bogush, V.M. Red'kov // NPCS. – 2008. – Vol. 11. – № 1. – P. 1–24.
21. Бикватерионы и матрицы Мюллера / А.А. Богуш [и др.] // Доклады НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51. – № 5. – С. 71–76.
22. ***Богуш, А.А.*** Матрицы Мюллера в поляризационной оптике / А.А. Богуш // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 96–102.
24. ***Red'kov, V.M.*** Lorentz group and polarization of the light / V.M. Red'kov // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2011. – Vol. 21. – P. 203–220.
25. ***Овсиюк, Е.М.*** Транзитивность в теории группы трехмерных вращений и формализм Стокса–Мюллера в поляризационной оптике / Е.М. Овсиюк // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2011. – № 1(37). – С. 69–75.
26. ***Редьков, В.М.*** О нахождении матрицы Мюллера оптического элемента по результатам поляризационных экспериментов, теоретико-групповой анализ / В.М. Редьков, Е.М. Овсиюк // Оптика неоднородных структур – 2011 : материалы III Международной научно-практической конференции, г. Могилев, 16-17 февраля 2011 г. / УО "МГУ им. А.А. Кулешова" ; редкол.: В.А. Карпенко (отв. ред.) [и др.]. – Могилев : УО "МГУ им. А.А. Кулешова", 2011. – С. 32–35.

27. ***Red'kov, V.M.*** Classification of degenerate 4-dimensional matrices with semi-group structure and polarization optics / V.M. Red'kov, E.M. Ovsiyuk // arXiv.org e-Print archive [Electronic resource]. – 2012. – Mode of access : http://arxiv.org/abs/1201.6555. – Date of access : 01.02.2012.
28. ***Снопко, В.Н.*** Поляризационные характеристики оптического излучения и методы их измерения / В.Н. Снопко. – Минск : Наука и техника, 1992. – 334 с.
29. ***Редьков, В.М.*** Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск : Белорусская наука, 2009. – 495 с.

Поступила в редакцию 04.05.2012 г.