УДК 517.925

О.А. МАКОВЕЦКАЯ

АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА – РИККАТИ (правосторонняя регуляризация)

Получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова – Риккати и априорная оценка области локализации решения. Исследован итерационный алгоритм построения решения, основанный на вычислительной схеме классического метода последовательных приближений.

Введение

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + F(t,X),\ X(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad (1)$$

$$X(0) = X(\omega), \qquad (2)$$

где $t \in I$, A, B, $Q \in \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $F \in \mathbb{C}\left(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$. Предполагается, что матрица-функция $F(t,X)$ в области $D_{\tilde{\rho}} = \left\{(t,X) : t \in I,\ \|X\| < \tilde{\rho}\right\}$ удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально); $F(t,0) \not\equiv 0$; $I = [0,\omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde{\rho} \le \infty$.

При $Q = 0$ двухточечная краевая задача качественными методами исследовалась в работе [1], конструктивными методами [2] – в [3–5], с периодическими краевыми условиями – в [6–8] (в этих работах исследован невырожденный случай с двухсторонней регуляризацией).

Основная часть

Примем следующие обозначения:

$$D_\rho = \{(t,X):\ t \in I,\ \|X\| \le \rho\},\ D = \{X(t): \|X\|_{\mathbb{C}} \le \rho\},\ \tilde{B}(\omega) = \int_0^\omega B(\tau)d\tau,$$

$$\tilde{\gamma} = \|\tilde{B}^{-1}(\omega)\|,\ \alpha = \max_t \|A(t)\|,\quad \beta = \max_t \|B(t)\|,\ \delta = \max_t \|Q(t)\|,\quad h = \max_t \|F(t,0)\|,$$

$$\varphi(\rho) = \tilde{\gamma}\delta\omega\left(1 + \frac{1}{2}\beta\omega\right)\rho^2 + \tilde{\gamma}\omega\left[\alpha + L + \frac{1}{2}\beta\omega(\alpha+\beta+L)\right]\rho + \tilde{\gamma}\omega h\left(1+\frac{1}{2}\beta\omega\right),$$

$$q(\rho) = \tilde{\gamma}\delta\omega(\beta\omega+2)\rho + \frac{1}{2}\tilde{\gamma}\beta\omega^2(\alpha+\beta+L) + \tilde{\gamma}\omega(\alpha+L),\qquad \|X\|_{\mathbb{C}} = \max_t\|X(t)\|,$$

где $0 < \rho < \tilde{\rho}$, $t \in I$, $L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области D_ρ, $\|\cdot\|$ – норма матриц $(S$ и $T)$, удовлетворяющая мультипликативному неравенству $\|ST\| \le \|S\|\cdot\|T\|$, например, любая из норм, приведенных в [9, с. 21].

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$\det\tilde{B}(\omega) \ne 0, \tag{3}$$

$$\varphi(\rho) \le \rho, \tag{4}$$

$$q(\rho) < 1. \tag{5}$$

Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единственно, при этом справедлива оценка $\|X\|_{\mathbb{C}} \le \varphi(\rho)$.

Доказательство. Используя условие (3), выведем матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2).

Пусть $X(t)$ – решение задачи (1), (2). Тогда из (1) имеем

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))\right]d\tau. \tag{6}$$

Полагая в (6) $t = \omega$, получим на основании условия (2)

$$\int_0^\omega \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau,X(\tau))\right]d\tau = 0. \tag{7}$$

Запишем соотношение (7) в следующем виде:

$$\int_0^\omega X(\tau)B(\tau)d\tau = -\int_0^\omega \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau,X(\tau))\right]d\tau. \tag{8}$$

В (8) воспользуемся тождеством типа [2, с. 47]:

$$\int_0^\omega X(\tau)B(\tau)d\tau = X(t)\tilde{B}(\omega) - \int_0^t (dX(\tau))\left(\int_0^\tau B(\sigma)d\sigma\right) + \int_t^\omega (dX(\tau))\left(\int_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma\right). \tag{9}$$

Соотношение (8) на основании (9) и в силу (1) можно записать в следующем виде:

$$X(t)\tilde{B}(\omega)=\int_0^t\Big[A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+$$

$$+F\big(\tau,X(\tau)\big)\Big]\left(\int_0^\tau B(\sigma)d\sigma\right)d\tau-\int_t^\omega\Big[A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+$$

$$+F\big(\tau,X(\tau)\big)\Big]\left(\int_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma\right)d\tau-\int_0^\omega\Big[A(\tau)X(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+F\big(\tau,X(\tau)\big)\Big]d\tau.$$

Так как согласно (3), $\det\tilde{B}(\omega)\neq 0$ то отсюда получим матричное интегральное уравнение

$$X(t)=\Bigg\{\int_0^t\Big[A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+$$

$$+F\big(\tau,X(\tau)\big)\Big]\left(\int_0^\tau B(\sigma)d\sigma\right)d\tau-\int_t^\omega\Big[A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+$$

$$+F\big(\tau,X(\tau)\big)\Big]\left(\int_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma\right)d\tau-\int_0^\omega\Big[A(\tau)X(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+$$

$$+F\big(\tau,X(\tau)\big)\Big]d\tau\Bigg\}\tilde{B}^{-1}(\omega). \qquad (10)$$

Уравнение (10) можно записать в следующем виде:

$$X(t)=\int_0^\omega\Big[A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+F\big(\tau,X(\tau)\big)\Big]K(t,\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^\omega\Big[X(\tau)B(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+F\big(\tau,X(\tau)\big)\Big]d\tau\tilde{B}^{-1}(\omega),$$

где

$$K(t,\tau)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^\tau B(\sigma)d\sigma\tilde{B}^{-1}(\omega),\ 0\le\tau\le t\le\omega,\\ \displaystyle-\int_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma\tilde{B}^{-1}(\omega),\ 0\le t<\tau\le\omega.\end{cases}$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение матричного интегрального уравнения (10) является решением задачи (1), (2). Для доказательства продифференцируем тождество (10). В результате получим

$$dX(t)=\left[A(t)X(t)+X(t)B(t)+X(t)Q(t)X(t)+F(t,X(t))\right]dt.$$

Подставляя это соотношение в (10) и выполняя затем интегрирование по частям, используя известную формулу [9, с. 52], последовательно найдем

$$X(t)=\left\{\int_0^t(dX(\tau))\left(\int_0^\tau B(\sigma)d\sigma\right)-\int_t^\omega(dX(\tau))\left(\int_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma\right)-\right.$$

$$\left.-\int_0^\omega\left[dX(\tau)-X(\tau)B(\tau)d\tau\right]\right\}\tilde{B}^{-1}(\omega)=\left\{X(t)\left(\int_0^t B(\sigma)d\sigma\right)-\int_0^t X(\tau)B(\tau)d\tau+\right.$$

$$\left.+X(t)\left(\int_t^\omega B(\sigma)d\sigma\right)-\int_t^\omega X(\tau)B(\tau)d\tau-\int_0^\omega dX(\tau)+\int_0^\omega X(\tau)B(\tau)d\tau\right\}\tilde{B}^{-1}(\omega)=$$

$$=\left\{X(t)\tilde{B}(\omega)-\int_0^\omega dX(\tau)\right\}\tilde{B}^{-1}(\omega)=X(t)-\int_0^\omega dX(\tau)\tilde{B}^{-1}(\omega).$$

Отсюда имеем

$$\int_0^\omega dX(\tau)=0,$$

или

$$X(\omega)=X(0).$$

А это и есть условие (2).

Исследуем разрешимость уравнения (10). Для этого запишем его в операторной форме

$$X=\mathcal{L}(X), \tag{11}$$

где через $\mathcal{L}$ обозначен соответствующий интегральный оператор в (10). Заметим, что оператор действует на множестве $\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n})$.

Покажем, что из условий (4), (5) следует выполнение принципа Банаха – Каччиопполи [10, с. 605] сжимающих отображений на множестве D, то есть в замкнутом шаре $\|X\|_{\mathbb{C}}\le\rho$.

Проверим, что $\mathcal{L}(X)\in D$ для произвольной матрицы-функции $X(t)\in D$. Выполнив оценки по норме в (11), получим последовательно

$$\|\mathcal{L}(X)\|\le\left\|\int_0^t\left[A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+\right.\right.$$

$$\left.+F(\tau,X(\tau))\right]\left(\int_0^\tau B(\sigma)d\sigma\right)d\tau-\int_t^\omega\left[A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+\right.$$

$$+F\left(\tau,X(\tau)\right)\Big]\left(\int_{\tau}^{\omega}B(\sigma)d\sigma\right)d\tau-\int_{0}^{\omega}\Big[A(\tau)X(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+$$

$$+F\left(\tau,X(\tau)\right)\Big]d\tau\Bigg\|\left\|\tilde{B}^{-1}(\omega)\right\|\le\tilde{\gamma}\left\{\int_{0}^{t}\left\|A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+\right.\right.$$

$$+F\left(\tau,X(\tau)\right)\Bigg\|\Bigg\|\left(\int_{0}^{\tau}B(\sigma)d\sigma\right)\Bigg\|d\tau+\int_{t}^{\omega}\Big\|A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+$$

$$+F\left(\tau,X(\tau)\right)\Bigg\|\Bigg\|\left(\int_{\tau}^{\omega}B(\sigma)d\sigma\right)\Bigg\|d\tau+\int_{0}^{\omega}\Big\|A(\tau)X(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+$$

$$\left.+F\left(\tau,X(\tau)\right)\Big\|d\tau\right\}\le\tilde{\gamma}\left\{\int_{0}^{t}\left(\int_{0}^{\tau}\|B(\sigma)\|d\sigma\right)\Big[\left(\|A(\tau)\|+\|B(\tau)\|\right)\|X(\tau)\|+\|Q(\tau)\|\|X(\tau)\|^{2}+\right.$$

$$+\left\|F\left(\tau,X(\tau)\right)\right\|\Big]d\tau+\int_{t}^{\omega}\left(\int_{\tau}^{\omega}\|B(\sigma)\|d\sigma\right)\Big[\left(\|A(\tau)\|+\|B(\tau)\|\right)\|X(\tau)\|+\|Q(\tau)\|\|X(\tau)\|^{2}+$$

$$\left.+\left\|F\left(\tau,X(\tau)\right)\right\|\Big]d\tau+\int_{0}^{\omega}\Big[\|A(\tau)\|\|X(\tau)\|+\|Q(\tau)\|\|X(\tau)\|^{2}+\left\|F\left(\tau,X(\tau)\right)\right\|\Big]d\tau\right\}\le$$

$$\le\tilde{\gamma}\left\{\beta\int_{0}^{t}\tau\,\Big[(\alpha+\beta)\|X(\tau)\|+\delta\|X(\tau)\|^{2}+\left\|F\left(\tau,X(\tau)\right)\right\|\Big]d\tau+\right.$$

$$+\beta\int_{t}^{\omega}(\omega-\tau)\,\Big[(\alpha+\beta)\|X(\tau)\|+\delta\|X(\tau)\|^{2}+\left\|F\left(\tau,X(\tau)\right)\right\|\Big]d\tau+$$

$$\left.+\int_{0}^{\omega}\Big[\alpha\|X(\tau)\|+\delta\|X(\tau)\|^{2}+\left\|F\left(\tau,X(\tau)\right)\right\|\Big]d\tau\right\}\le$$

$$\le\tilde{\gamma}\omega\left\{\frac{1}{2}\beta\omega\left[\delta\rho^{2}+(\alpha+\beta+L)\rho+h\right]+\delta\rho^{2}+(\alpha+L)\rho+h\right\}=\varphi(\rho).\qquad(12)$$

Из (12) на основании (4) следует соотношение

$$\|\mathcal{L}(X)\|_{\mathbb{C}}\le\rho.\qquad(13)$$

Из (11) имеем для произвольных $\tilde{X},\ \tilde{\tilde{X}}\in D$:

$$\mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}})-\mathcal{L}(\tilde{X})=\left\{\int_{0}^{t}\Big[A(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)+\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)B(\tau)+\right.$$

$$+\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)+F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\Big]\left(\int_0^{\tau}B(\sigma)d\sigma\right)d\tau-$$

$$-\int_t^{\omega}\Big[A(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)+\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)B(\tau)+\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-$$

$$-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)+F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\Big]\left(\int_{\tau}^{\omega}B(\sigma)d\sigma\right)d\tau-$$

$$-\int_0^{\omega}\Big[A(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)+\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)+$$

$$+F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\Big]d\tau\Big\}\tilde{B}^{-1}(\omega).$$

Преобразуем следующее выражение:

$$\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)=\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)+$$

$$+\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)=\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)+$$

$$+\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)Q(\tau)\tilde{X}(\tau),$$

а затем оценим его по норме

$$\left\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)\right\|\le 2\rho\delta\left\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right\|.$$

Используя эту оценку, получим последовательно

$$\left\|\mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}})-\mathcal{L}(\tilde{X})\right\|\le\tilde{\gamma}\Big\{\int_0^t\Big\|A(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)+\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)B(\tau)+$$

$$+\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)+F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\Big\|\left\|\int_0^{\tau}B(\sigma)d\sigma\right\|d\tau+$$

$$+\int_t^{\omega}\Big\|A(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)+\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)B(\tau)+\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-$$

$$-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)+F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\Big\|\left\|\int_{\tau}^{\omega}B(\sigma)d\sigma\right\|d\tau+$$

$$+\int_0^{\omega}\Big\|A(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)+\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)+F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-$$

$$-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\Big\|d\tau\Bigg\}\le\tilde{\gamma}\Bigg\{\int_0^t\Big[\left(\|A(\tau)\|+\|B(\tau)\|\right)\Big\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\Big\|+\Big\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-$$

$$-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)\Big\|+\Big\|F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\Big\|\Big]\left(\int_0^\tau\|B(\sigma)\|d\sigma\right)d\tau+$$

$$+\int_t^\omega\Big[\left(\|A(\tau)\|+\|B(\tau)\|\right)\Big\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\Big\|+\Big\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)\Big\|+$$

$$+\Big\|F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\Big\|\Big]\left(\int_\tau^\omega\|B(\sigma)\|d\sigma\right)d\tau+$$

$$+\int_0^\omega\Big[\|A(\tau)\|\Big\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\Big\|+\Big\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)\Big\|+$$

$$+\Big\|F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\Big\|\Big]d\tau\Bigg\}\le\tilde{\gamma}\Bigg\{\beta(\alpha+\beta+2\delta\rho+L)\int_0^t\tau\Big\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\Big\|d\tau+$$

$$+\beta(\alpha+\beta+2\delta\rho+L)\int_t^\omega(\omega-\tau)\Big\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\Big\|d\tau+$$

$$+(\alpha+2\delta\rho+L)\int_0^\omega\Big\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\Big\|d\tau\Bigg\}\le$$

$$\le\tilde{\gamma}\omega\left[\frac{1}{2}\beta\omega(2\delta\rho+\alpha+\beta+L)+2\delta\rho+\alpha+L\right]\Big\|\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X}\Big\|_{\mathbb{C}}=q\Big\|\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X}\Big\|_{\mathbb{C}}.$$

Отсюда получаем оценку

$$\Big\|\mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}})-\mathcal{L}(\tilde{X})\Big\|_{\mathbb{C}}\le q\Big\|\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X}\Big\|_{\mathbb{C}}. \tag{14}$$

Из анализа соотношений (13), (14) видно, что неравенства (4), (5) являются условиями принципа сжимающих отображений применительно к уравнению (11). На основании этого заключаем, что в шаре $\|X\|_{\mathbb{C}}\le\rho$ решение уравнения (11) существует и единственно. Таким образом, задача (1), (2) однозначно разрешима в области D_ρ. При этом на основании (12) справедлива оценка $\|X\|_{\mathbb{C}}\le\varphi(\rho)$. Теорема полностью доказана.

Для построения решения матричного интегрального уравнения (10) воспользуемся классическим методом последовательных приближений [10, с. 605], [11, с. 53]:

$$X_{k+1}(t)=\Bigg\{\int_0^t\Big[A(\tau)X_k(\tau)+X_k(\tau)B(\tau)+X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau)+$$

$$+F\left(\tau,X_k(\tau)\right)\Big]\left(\int_0^{\tau}B(\sigma)d\sigma\right)d\tau-\int_t^{\omega}\Big[A(\tau)X_k(\tau)+X_k(\tau)B(\tau)+$$

$$+X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau)+F\left(\tau,X_k(\tau)\right)\Big]\left(\int_{\tau}^{\omega}B(\sigma)d\sigma\right)d\tau-$$

$$-\int_0^{\omega}\Big[A(\tau)X_k(\tau)+X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau)+F\left(\tau,X_k(\tau)\right)\Big]d\tau\Bigg\}\tilde{B}^{-1}(\omega),\ k=0,1,2,...,\qquad(15)$$

где $X_0(t)$ – произвольная матричная функция класса $\mathbb{C}[0,\omega]$, принадлежащая множеству D.

Используя условие (4), нетрудно доказать индукцией по k, что все приближенные решения, полученные по алгоритму (15), принадлежат множеству D. Основой доказательства является рекуррентная оценка

$$\|X_{k+1}\|_{\mathbb{C}}\le\tilde{\gamma}\delta\omega\left(1+\frac{1}{2}\beta\omega\right)\|X_k\|_{\mathbb{C}}^2+\tilde{\gamma}\omega\left[\alpha+L+\frac{1}{2}\beta\omega(\alpha+\beta+L)\right]\|X_k\|_{\mathbb{C}}+$$

$$+\tilde{\gamma}\omega h\left(1+\frac{1}{2}\beta\omega\right),\ k=0,1,2,...,$$

которую можно получить по аналогии с (12).

Изучим вопрос о сходимости полученной последовательности. Следуя известному приему [11, с. 54], этот вопрос заменим эквивалентным вопросом о сходимости ряда

$$X_0(t)+(X_1(t)-X_0(t))+(X_2(t)-X_1(t))+...+(X_k(t)-X_{k-1}(t))+...\qquad(16)$$

Докажем равномерную по $t\in[0,\omega]$ сходимость ряда (16). Для этого построим сходящийся числовой ряд, который мажорирует на $[0,\omega]$ матричный функциональный ряд (16). Оценим $\|X_{m+1}(t)-X_m(t)\|$, учитывая, что

$$X_{m+1}(t)-X_m(t)=\mathcal{L}(X_m(t))-\mathcal{L}(X_{m-1}(t)),\ m=1,2,...\qquad(17)$$

Выполнив оценки в (17), получим на основании (14)

$$\|X_{m+1}(t)-X_m(t)\|=\|\mathcal{L}(X_m(t))-\mathcal{L}(X_{m-1}(t))\|\le q\|X_m-X_{m-1}\|_{\mathbb{C}},$$

т.е.

$$\|X_{m+1}-X_m\|_{\mathbb{C}}\le q\|X_m-X_{m-1}\|_{\mathbb{C}},\ m=1,2,...\qquad(18)$$

На основе (18) получим явную формулу

$$\|X_{m+1}-X_m\|_{\mathbb{C}}\le q^m\|X_1-X_0\|_{\mathbb{C}},\ m=1,2,...,\qquad(19)$$

при этом $\|X_1-X_0\|_{\mathbb{C}}=\|\mathcal{L}(X_0)-X_0\|_{\mathbb{C}}$.

Используя оценку (18), нетрудно доказать с помощью известных приемов [10, с. 605], [11, с. 54], что последовательность $\{X_k(t)\}_0^{\infty}$ сходится равномерно по $t \in I$ к решению интегрального уравнения (10), при этом справедливы конструктивные оценки

$$\|X - X_k\|_{\mathbb{C}} \le \frac{q^k}{1-q}\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}},\ k = 0,1,2,\dots, \tag{20}$$

$$\|X\|_{\mathbb{C}} \le \|X_0\|_{\mathbb{C}} + \frac{\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}}{1-q}. \tag{21}$$

Замечание. Приближенные решения, построенные по алгоритму (15) не обязаны удовлетворять краевому условию (2). В связи с этим следует получить соответствующую оценку для $\|X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0)\|$, $k = 0,1,2,\dots$. На основании (15) имеем

$$dX_{k+1}(t) = \left[A(t)X_k(t) + X_k(t)B(t) + X_k(t)Q(t)X_k(t) + F(t, X_k(t))\right]dt. \tag{22}$$

Подставляя (22) в правую часть (15) и выполняя затем интегрирование по частям, получим

$$\left\{X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0) + \int_0^\omega \left[X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)\right]B(\tau)d\tau\right\}\tilde{B}^{-1}(\omega) = 0.$$

Отсюда имеем соотношение

$$\Delta_{k+1} \equiv X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0) = -\int_0^\omega \left[X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)\right]B(\tau)d\tau. \tag{23}$$

Выполнив оценки по норме в (23), получим

$$\|\Delta_{k+1}\| \le \int_0^\omega \left\|\left[X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)\right]B(\tau)\right\|d\tau \le \int_0^\omega \|B(\tau)\|\|X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)\|d\tau \le$$

$$\le \beta \int_0^\omega \|X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)\|d\tau \le \beta\omega\|X_{k+1} - X_k\|_{\mathbb{C}}.$$

Отсюда на основании (19) имеем оценку

$$\|X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0)\| \le \beta\omega q^k \|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}},\ \ k = 0,1,2,\dots. \tag{24}$$

Оценки (20), (21), (24) следует дополнить формулой для $\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}$. В случае $X_0 = 0$ эту формулу можно получить в конструктивном виде. В самом деле из (15) при $k = 0$ имеем

$$X_1(t) = \int_0^\omega F(\tau,0)K(t,\tau)d\tau - \int_0^\omega F(\tau,0)d\tau B^{-1}(\omega). \tag{25}$$

Выполнив оценки по норме в (25), получим

$$\|X_1(t)\| \le \int_0^\omega \|F(\tau,0)K(t,\tau)\|d\tau + \int_0^\omega \|F(\tau,0)\|d\tau \|B^{-1}(\omega)\| \le$$

$$\leq h\int_0^{\omega}\left\|K(t,\tau)\right\|d\tau+\tilde{\gamma}\omega h\leq\tilde{\gamma}\omega h\left(\frac{1}{2}\beta\omega+1\right). \tag{26}$$

Используя (26), получим из (21)

$$\left\|X\right\|_{\mathbb{C}}\leq\frac{\tilde{\gamma}\omega h(\beta\omega+2)}{2(1-q)}. \tag{27}$$

Очевидно, оценка (27) будет эффективной, если

$$\frac{\tilde{\gamma}\omega h(\beta\omega+2)}{2(1-q)}\leq\rho.$$

Легко видеть, что это соотношение выполняется при достаточно малых значениях h.

Итак, доказана

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (3)–(5). Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением (15).*

Заключение

Основные результаты данной работы заключаются в следующем:

– в невырожденном случае с правосторонней регуляризацией получено эквивалентное интегральное уравнение для периодической краевой задачи уравнения Ляпунова – Риккати;

– получены эффективно проверяемые достаточные условия однозначной разрешимости указанного уравнения;

– разработан алгоритм построения приближенных решений с вычислительной схемой классического метода последовательных приближений;

– выведены конструктивные оценки области локализации решения.

Эти результаты обобщают и развивают соответствующие результаты, изложенные в работах [3, 8].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Murty, K.N.*** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems existence and uniqueness / K.N. Murty, G.W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl., 1992. – V. 167. – P. 505–515.
2. ***Лаптинский, В.Н.*** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В.Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
3. ***Laptinsky, V.N.*** On the Two-Point Boundary-Value Problem for the Riccati Matrix Differential Equations / V.N. Laptinsky, I.I. Makovetsky // Central European Science Journal, 2005. – V. 3(1). – P. 143–154.
4. ***Лаптинский, В.Н.*** К конструктивному анализу двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова / В.Н. Лаптинский, И.И. Маковецкий // Дифференц. Уравнения. – 2005. – Т. 41. – № 7. – С. 994–996.

5. ***Лаптинский, В.Н.*** О разрешимости двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова / В.Н. Лаптинский, И.И. Маковецкий // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 3. – С. 218–223.
6. ***Лаптинский, В.Н.*** О периодических решениях нелинейных матричных дифференциальных уравнений / В.Н. Лаптинский // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук,1997. – № 4. – С. 14–18.
7. ***Лаптинский, В.Н.*** Конструктивный анализ периодической краевой задачи для нелинейного матричного дифференциального уравнения Ляпунова / В.Н. Лаптинский. – Могилев : Белорусско-Российский университет, 2007. – 26 с. – (Препринт / ИТМ НАН Беларуси; № 7).
8. ***Подолян, С.В.*** Периодические решения нелинейных матричных дифференциальных уравнений / С.В. Подолян // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1988. – № 6. – С. 31– 34.
9. ***Демидович, Б.П.*** Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.
10. ***Канторович, Л.В.*** Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П Акилов. – М. : Наука, 1977. – 744 с.
11. ***Бибиков, Ю.Н.*** Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Н. Бибиков. – М. : Высшая школа, 1991. – 303 с.

Поступила в редакцию 11.04.2012 г.