УДК 517.544

А.Г. АЛЕХНО, А.Б. СЕВРУК

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В статье дан обзор основных результатов, полученных по указанной тематике за пятьдесят лет ее развития. Результаты первых двадцати лет прокомментированы в [27, с. 95-103].

Краевые (граничные) задачи теории аналитических функций состоят в нахождении аналитических в некоторых областях функций, предельные значения которых на границе удовлетворяют заданному соотношению. Постановка таких задач восходит к Б. Риману [31, с. 177], а первое решение линейной краевой задачи дал Д. Гильберт [51].

Центральное место в теории краевых задач занимает задача Римана (задача линейного сопряжения), классическая постановка которой такова. Дан простой гладкий замкнутый контур L, разбивающий комплексную плоскость на две области D^+ и D^-. Требуется найти функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, аналитические и ограниченные соответственно в областях D^+ и D^-, предельные значения которых на контуре удовлетворяют линейному соотношению

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t),\ t \in L, \tag{1}$$

а заданные функции $G(t) \neq 0$ и $g(t)$ подчинены условию Гельдера ($G(t), g(t) \in H$).

Полное решение задачи Римана дал в 1937 г. Ф.Д. Гахов [11], который ввел понятие индекса задачи

$$x = JndG(t) = (2\pi)^{-1} \int_L d \arg G(t),$$

являющегося основной ее характеристикой. При исследовании этой задачи эффективным оказался метод представления аналитических функций интегралом типа Коши. В 1940 г. И.Н. Векуа получил в замкнутом виде решение характеристического сингулярного интегрального уравнения (СИУ) с ядром Коши, сведя его к задаче Римана. Установленная тесная связь между краевыми задачами для аналитических функций и СИУ, а также сведение к ним ряда важных задач механики и математической физики способствовали интенсивному развитию теории краевых задач. Исследования велись по различным направлениям: рассматривались задачи для более широких классов контуров, заданных и искомых функций, изучались задачи с более сложным краевым условием, которое содержит сдвиг и сопряжение искомых функций, а также нелинейные краевые задачи, задачи на римановых поверхностях, векторно-матричные задачи, задачи для обобщенных аналитических функций и для решений некоторых квазилинейных эллиптических систем. Эта работа продолжается и в настоящее время.

Методы, разработанные при решении указанных задач, нашли широкое применение в различных областях математики, механики, физики, главным образом при решении краевых задач математической физики. Особое значение имеют приложения к механике сплошной среды, теории упругости, гидромеханике, электродинамике, теории дисперсионных отношений, установлены также связи с задачами квантовой теории поля, теории массового обслуживания и теории игр.

Классические результаты по теории краевых задач и СИУ изложены в известных монографиях Ф.Д. Гахова [12] и Н.И. Мусхелишвили [26], которые стимулировали научные исследования в различных направлениях развития и обобщения этой теории. Полученные многочисленные результаты и их приложения отражены более чем в 30 монографиях.

В большинстве обобщений краевые задачи и СИУ рассматривались в предположении, что их индекс есть конечное число. В начале 60-х гг. Ф.Д. Гахов поставил вопрос об исследовании краевой задачи Римана с бесконечным индексом. Систематическое изучение этой задачи начал его ученик Н.В. Говоров [13], который рассмотрел ее в предположении, что $L=[1,\infty)$ и

$$\arg G(t) \sim 2\pi\lambda t^{\rho},\ \rho > 0,\ \lambda \neq 0,\ t \to +\infty.$$

При выполнении этого соотношения, следуя Н.В. Говорову, будем говорить, что коэффициент $G(t)$ имеет в точке $t=\infty$ степенное завихрение, ρ называть порядком завихрения, λ − коэффициентом завихрения, а задачу будем называть задачей с бесконечным индексом.

Решения Н.В. Говоров искал в классе ограниченных аналитических функций, обычно используемом в классической постановке. При исследовании этой задачи возникли принципиальные трудности. Они обусловлены тем обстоятельством, что каноническая функция задачи

$$X(z) = \exp\left\{\frac{z^{q+1}}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(\tau)d\tau}{\tau^{q+1}(\tau - z)}\right\},\ q = [\rho] \tag{2}$$

имеет при $z \to \infty$ асимптотическое поведение, аналогичное поведению аналитической функции в окрестности существенно особой точки. Поэтому общее решение однородной задачи представимо в виде

$$\Phi(z) = X(z)F(z),$$

где $F(z)$ − некоторая целая функция. Таким образом, задача сводится к отысканию целых функций, которым соответствуют ее ограниченные решения. Выделение класса таких целых функций производится с учетом асимптотического поведения $X(z)$ при $z \to \infty$ и опирается на свойства функций, аналитических и ограниченных в угловой области $0 < \arg z < 2\pi$, которые по теореме У. Хеймана [50] имеют в указанной области вполне регулярный рост (в.р.р.) при формальном порядке $\sigma = \frac{1}{2}$.

Н.В. Говоров разработал принципиально новый метод исследования задачи Римана с бесконечным индексом степенного порядка $\rho > 0$, привлекающий методы теории целых функций и созданной им теории функций, имеющих в.р.р. в угловых областях. Полученные им результаты изложены в монографии [15], переведенной на английский язык. Они дают полное исследование краевой задачи Римана с бесконечным индексом степенного порядка в случае одностороннего завихрения. Развитые Н.В. Говоровым методы успешно применяются во всех исследованиях по краевым задачам и сингулярным интегральным уравнениям с бесконечным индексом, а также плодотворно используются для решения задач в других областях теории функций комплексной переменной. Наиболее важным приложением этого метода является данное Н.В. Говоровым решение проблемы Пэйли о росте целых функций конечного порядка [14], [16, с. 554-565].

Начатые Н.В. Говоровым исследования продолжены рядом авторов в различных направлениях. Укажем кратко на важнейшие из них.

П.Г. Юров [44, 46] исследовал задачу Римана (1) с бесконечным индексом логарифмического порядка для одностороннего завихрения на луче $L = [1, \infty)$, когда заданные функции $G(t)$, $g(t)$ удовлетворяют при $j = 1$ условиям:

1) $\arg G(t) = \varphi_j(t) \ln^{\alpha}|t|,\ \alpha > 0,\ \varphi(\infty) = \lambda_j \neq 0$, (3)

а функция $\varphi(t)$ принадлежит классу Дини-Липшица D_β с показателем $\beta > \alpha + 2$ [12, с. 519];

2) $\ln|G(t)|,\ g(t) \in D_p,\ p > \max\{2, \alpha\},\ g(\infty) = 0.$ (4)

Для исследования задачи им построена каноническая функция

$$X(z) = \exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(\tau) d\tau}{\tau(\tau - z)}\right\}.$$

Плотность интеграла типа Коши в последней формуле имеет логарифмическую особенность в бесконечно удаленной точке. Для исследования асимптотики таких интегралов П.Г. Юров применил новый метод, использующий теорию конечных разностей [45]. Им показано, что для канонической функции имеет место представление

$$\left|X\left(re^{i\theta}\right)\right| = \exp\left\{-\frac{\lambda(\ln r)^{\alpha+1}}{2\pi(\alpha+1)} + O\left(\ln^{\alpha} r\right)\right\},\ r \to \infty.$$

Отсюда следует, что каноническая функция имеет нулевой порядок и при $\lambda > 0$ ограничена в $D = C \setminus L$. Как и в случае степенного завихрения у Н.В. Говорова, однородная задача Римана

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t),\ t\in L, \tag{5}$$

оказывается неразрешимой в классе B ограниченных аналитических функций при $\lambda<0$, а при $\lambda>0$ она имеет бесконечное множество решений вида

$$\Phi(z)=X(z)F(z), \tag{6}$$

где $F(z)$ – произвольная целая функция нулевого порядка, удовлетворяющая на L оценке

$$\ln|F(t)|<-\ln\left|X^{\pm}(t)\right|+const,\ t\in L. \tag{7}$$

Решение неоднородной задачи с плюс-бесконечным индексом представляется в виде суммы

$$\Phi(z)=\Psi(z)+\Phi_0(z), \tag{8}$$

где $\Psi(z)$ – общее решение соответствующей однородной задачи, а $\Phi_0(z)$ – некоторое частное решение неоднородной задачи. Следуя Н.В. Говорову, $\Phi_0(z)$ берется в виде

$$\Phi_0(z)=\frac{\Psi_0(z)}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)d\tau}{\Psi_0^{+}(\tau)(\tau-z)}\equiv\Psi_0(z)\Gamma(z), \tag{9}$$

где

$$\Psi_0(z)=X(z)F_0(z) \tag{10}$$

решение задачи (6), удовлетворяющее при $0<\alpha<1$ условиям

$$g_0(t)\equiv g(t)\left(\Psi^{+}(t)\right)^{-1}\in H,\ g_0(\infty)=0. \tag{11}$$

Если $\alpha\geq 1$ и $g_0(t)\in D_q$, $q>1$, то строится целая функция

$$F_0(z)=\exp\left\{z\int_1^{\infty}\frac{\left[\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2\pi}\operatorname{Re}(\ln x-\pi i)^{\alpha}\right]}{x(x+z)}dx\right\}$$

с корнями на луче $(-\infty,1]$, такая, что $\Psi_0(z)$ из (10) ограничена и удовлетворяет соотношениям (11).

Если $\alpha\in(0,1)$, то при $g(t)\in H$ указывается целая функция $F_0(z)$, для которой $\Psi_0(z)$ не ограничена, а $\Phi_0(z)\in B$.

Для неоднородной задачи с минус-бесконечным индексом, следуя Н.В. Говорову, строится мероморфное решение

$$\Psi_0(z)=X(z)F_0^{-1}(z) \tag{12}$$

соответствующей однородной задачи, имеющее счетное множество полюсов на указанной последовательности точек $\{z_n\}\not\subset L$. Показано, что неоднородная задача с минус-бесконечным индексом разрешима тогда и только тогда, когда справедливы условия разрешимости

$$\Gamma(z_n)=0,\ n\in N. \tag{13}$$

При их выполнении единственное ограниченное решение задачи дается формулой (9).

М.Э. Толочко [39, 40] рассмотрел задачу Римана для полуплоскости с бесконечным индексом степенного порядка $\rho_j(r)=\rho<1$ в случае двустороннего завихрения, когда $j=1,2$ и

1) $\arg G(t)=2\pi\varphi_j(t)|t|^{\rho_j(|t|)}$, $t\in L_j$, $\rho>0$, $\varphi_j\in H_{L_j}$, $\varphi_j(\infty)=\lambda_j\neq 0$, (14)

где L_1, L_2 – соответственно отрицательный и положительный лучи вещественной оси L,

2) $\ln|G(t)|$, $g(t)\in H$, $g(\infty)=0$. (15)

В работах М.Э. Толочко впервые возник случай неопределенно бесконечного индекса, когда изменение $\arg G(t)$ на контуре не определено. Им получены необходимые и указаны достаточные условия разрешимости однородной задачи Римана в классе B. В статье [40] установлено, что при выполнении одного из условий:

1) $0<\rho<1$, $\lambda_1<0$, $\lambda_2>0$,

2) $0<\rho<\frac{1}{2}$, $\lambda_1\lambda_2>0$, $\left(\lambda_1\lambda_2^{-1}\right)^{\operatorname{sgn}\lambda_j}<\cos\rho\pi$,

однородная задача имеет бесконечное множество ограниченных решений вида (6), где $X(z)$ – каноническая функция (2) с $q=0$, а $F(z)$ – произвольная целая функция порядка не выше ρ, удовлетворяющая соотношению (7). Если в условиях 1), 2) в неравенствах, содержащих λ_j, изменить знаки на противоположные, то однородная задача будет неразрешима. Для задачи с неопределенно бесконечным индексом $(\lambda_1\lambda_2>0)$, когда $\left(\lambda_1\lambda_2^{-1}\right)^{\operatorname{sgn}\lambda_j}=\cos\rho\pi$, показано, что разрешимость задачи зависит от дополнительных свойств $\arg G(t)$, которые не улавливаются соотношениями (14).

Неоднородная задача исследована для случая плюс или минус-бесконечного индекса. Получены результаты, аналогичные результатам Н.В. Говорова.

Уточненным порядком $\rho(r)$ называют [16, с. 69] положительную, непрерывно дифференцируемую на $[0,\infty)$ функцию, удовлетворяющую условиям $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho$, $\lim\limits_{r\to\infty}\rho'(r)r\ln r=0$. Однородную задачу (5) для полуплоскости с бесконечным индексом при уточненном порядке $\rho(r)$, $\rho>0$ изучил И.Е. Сандригайло [36]. В этой работе рассмотрен случай, когда модуль коэффициента задачи неограничен, причем $\ln|G(t)|=O\left(|t|^{\rho_0}\right)$, где $0<\rho_0<\max\{\rho,1\}$. Показано, что при $\rho\geq 1$ разрешима только задача с плюс-бесконечным индексом и условие на рост модуля коэффициента не влияет на ее разрешимость. При $\rho>1$ каноническая функция не ограничена и не существует ограниченных решений, имеющих порядок ρ. Поэтому дано описание множества целых функций $F(z)$ из (6), для которых порядок решения $\Phi(z)$ не превосходит 1 и выписана оценка (7).

Для этого установлены асимптотические свойства нулей ограниченной в полуплоскости функции, причем существенно используется формула Карлемана ее представления. Получено общее решение задачи в классе B и в классе ограниченных функций, имеющих в.р.р. при заданном порядке $\sigma < 1$.

А.Г. Алехно провел полное исследование краевой задачи Римана с бесконечным индексом при уточненном порядке $\rho(r)$ в случае многостороннего завихрения, когда коэффициент задачи $G(t)$ задан соотношениями (14), (15) на контуре L, состоящем из m уходящих в бесконечность лучей $L_j = \{ \arg z = \beta_j \}$, $0 = \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_m < 2\pi$. Указанны необходимые условия разрешимости в классе B ограниченных кусочно-аналитических функций однородной задачи Римана, зависящие от порядков завихрения ρ_j, коэффициентов λ_j и углов β_j, под которыми лучи L_j уходят в бесконечность [7]. Получены достаточные условия разрешимости однородной задачи и при их выполнении построено ее общее решение. Установлен критерий разрешимости однородной задачи Римана с неопределенно бесконечным индексом, позволяющий получить все ее ограниченные решения из общего решения некоторой задачи Римана с плюс-бесконечным индексом. Приведен пример задачи Римана с бесконечным индексом двустороннего завихрения, которая имеет единственное ограниченное решение.

Исследована неоднородная задача Римана с бесконечным индексом степенного порядка $\rho > 0$. В случае разрешимости в классе B однородной задачи указаны условия на свободный член $g(t)$, при выполнении которых, разрешима неоднородная задача. Если неоднородная задача не имеет неограниченных решений, то получены достаточные условия разрешимости неоднородной задачи и в случае плюс-бесконечного индекса, доказана их необходимость. При выполнении установленных условий разрешимости общее решение неоднородной задачи построено в замкнутом виде.

Изучена однородная задача Римана с коэффициентом

$$G(t) = \exp\left\{ 2\pi i \varphi_j(t) |t|^{\rho(|t|)} \right\},\ \varphi_j(t) \in H,\ \varphi_j(\infty) = \lambda_j + i\nu_j \neq 0, \qquad (16)$$

имеющим разрыв второго рода, когда в окрестности бесконечно удаленной точки как аргумент, так и модуль $G(t)$ имеют одинаковый положительный уточненный порядок роста $\rho(r)$ [5]. Получены удобные для проверки достаточные условия разрешимости задачи в классе B и при их выполнении построено ее общее решение.

Работы П.Г. Юрова на случай двустороннего завихрения на вещественной оси при предположениях (3), (4), где $j = 1,2$, обобщил П.Ю. Алекна [1]. Полученные им результаты принципиально аналогичны соответствующим результатам М.Э. Толочко. А.Г. Алехно исследовал однородную задачу Римана с коэффициентом (3) при нулевом уточненном порядке $\rho(r)$.

Необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Римана с конечным числом точек завихрения получил А.Г. Алехно [3].

Л.И. Чибрикова [42, 43] изучила задачу Римана на луче $L=[0,\infty)$ с бесконечным индексом степенно-логарифмического порядка, когда

$$\ln G(t)=2\pi i G_0(t)t^{\rho}\ln^n t,\ \rho>0,\ n\in Z,\ G_0(t)\in H,\ G_0(\infty)=R_0e^{i\theta_0}\neq 0. \quad (17)$$

Получена асимптотика интеграла типа Коши с плотностью (17). Задача Римана решена в классе функций, имеющих в области $D=C\setminus L$ заданный индикатор $h(\theta)$ при уточненном порядке $\rho(r)$, порожденном функцией

$$f(r)=\begin{cases}(1+r)^{\rho}\ln^n(1+r), \rho\neq[\rho],\\(1+r)^{\rho}\ln^{n+1}(1+r), \rho=[\rho].\end{cases}$$

Для однородной задачи получены необходимые и достаточные условия, накладываемые на индикатор целой функции $F(z)$ из формулы (6), дающей решение задачи. Отметим, что эти условия не выражены через исходные данные коэффициента задачи. Для неоднородной задачи даны необходимые условия ее разрешимости. Установлены условия, при которых неоднородная задача безусловно разрешима и указаны случаи, когда для существования решения необходимо и достаточно выполнения счетного числа условий, накладывающих ограничения на $g(t)$.

Результаты Л.И. Чибриковой распространены Ф.Н. Гарифьяновым [10] на случай, когда областью D является плоскость с разрезом по кривой $l_0=l_{2\pi}$ из семейства l_λ, $0\leq\lambda\leq 2\pi$, простых гладких разомкнутых кривых, заполняющих всю плоскость, для которых $\lim\limits_{l_\lambda\ni z\to\infty}\arg z=\lambda$ и равномерно по λ выполняется неравенство $\varliminf\limits_{l_\lambda\ni z\to\infty}|z|S^{-1}(z)>\varepsilon>0$, где $S(z)$ – длина части кривой l_λ, лежащей в круге радиуса $|z|$. При этом коэффициент задачи удовлетворяет условиям (17) при $n=0$.

Для однородной задачи Римана с коэффициентом (16) А.Г. Алехно установил необходимые и достаточные условия разрешимости в классе кусочно-аналитических функций, имеющих заданный индикатор в каждой из угловых областей $D_j=\{\beta_j<\arg z<\beta_{j+1}\}$, $j=\overline{1,m}$, $\beta_{m+1}=2\pi$, и получил ее общее решение. Это позволило ему построить в [8] аналитическую в угловой области функцию, имеющую в ней заданный индикатор $h(\theta)$ при уточненном порядке $\rho(r)$, которая является решением однородной задачи Римана с коэффициентом (16), причем параметры λ_j и ν_j выражены через значения $h(\theta)$ и ее производной.

В.Н. Монахов и Е.В. Семенко [25] решили краевую задачу Римана для полуплоскости с коэффициентом (14), где $\rho_j(r)=\rho<1$, для ограниченных на бесконечности решений $\omega(z)$, определенного во всей плоскости уравнения

$$\omega_{\bar{z}} - \mu_1(\omega, z)\omega_z - \mu_2(\omega, z)\omega_{\bar{z}} = A(\omega, z),$$

где $|\mu_1(\omega, z)| + |\mu_2(\omega, z)| \le \mu_0 < 1$.

Они исследовали также краевую задачу Римана с бесконечным индексом для аналитических функций на замкнутой римановой поверхности.

Ими определены классы корректности краевой задачи Римана для полуплоскости с помощью введения дополнительных условий вида

$$J(G, g, z_n) = 0,\ n \in Z,\ z_n \notin L. \qquad (18)$$

Класс корректности – это класс последовательностей $\{z_n\}$, обеспечивающих единственность и устойчивость ограниченных решений задачи (1). Он определяется свойствами коэффициента $G(t)$. При этом либо $J = \Psi_0(z)$ – в случае безусловной разрешимости задачи, либо $J = \Gamma(z)$ – в случае счетного множества условий ее разрешимости, где Ψ_0 и Γ определены равенством (9).

Рассмотрена также краевая задача Римана для полуплоскости в классе аналитических в верхней и нижней полуплоскостях функций, принадлежащих в них пространствам Харди H_p, $p > 1$. Коэффициент задачи имеет вид

$$G(t) = G_0(t)e^{i\theta(t)},\ \ln G_0(t) \in C^{\alpha}(R),\ \alpha > 0,$$

а монотонная функция $\theta(t)$ обладает свойствами:

1) $\theta(t) \in C^{1+\alpha}(-R, R)$, причем постоянная Гельдера $K(R)$ удовлетворяет неравенству $K(R) \le O(R^{\lambda-1})$, $\lambda \ge \rho - 1$, $\rho > 0$;

2) $m_0 \le |\theta'||t|^{1-\rho} \le m_1$.

Тогда случаи $\theta'(t) \ge 0$ и $\theta'(t) \le 0$ отвечают соответственно плюс и минус-бесконечному индексу. В работе дано описание общего решения как задачи Римана, так и соответствующего ей характеристического сингулярного интегрального уравнения.

Существенное уменьшение жесткости ограничений на поведение в бесконечности аргумента коэффициента однородной задачи Римана достигнуто И.В. Островским [28]. Пусть $\rho(r)$ – уточненный порядок и

$$V(r) = r^{\rho(r)},\ V_0(r) = \int_1^r V(t)t^{-1}dt.$$

На поведение функции $\ln G$ на бесконечности наложены следующие ограничения. Существуют пара уточненных порядков $\rho(r)$, $\rho_1(r)$, для которых

$$\rho < \frac{1}{2},\ V_1(r)\ln r = o(V_0(r)),\ r \to \infty,\ \left(V_1(r) = r^{\rho_1(r)}\right),$$

и неубывающая целозначная функция $n(t) \ge 0$ такие, что

1) $(2\pi)^{-1}\arg G(t) = n(t) + V(t) + O(V_1(t))$,

2) $\lim\limits_{t\to\infty}(V_0(t))^{-1}\{(2\pi)^{-1}\int\limits_0^{K(t)}(\arg G(t+u) - \arg G(t-u))u^{-1}du -$

$- \int\limits_0^{K(t)}(n(t+u) - n(t-u))u^{-1}du\} \le 0$,

3) $\ln|G(t)| = o(V(t))$.

Доказано, что при сделанных предположениях задача имеет бесконечное множество ограниченных решений, а результаты Н.В. Говорова, П.Г. Юрова содержатся в полученном результате. Кроме того, показано, что $\arg G(t)$ может иметь сколь угодно быстрый рост.

Задачу Римана с коэффициентом, удовлетворяющим условиям 1) – 3), на m лучах $L_j = \{\arg z = \beta_j\}$, исследовал А.Г. Алехно.

Задача Римана на луче $L = [1,\infty)$ с коэффициентом, имеющим счетное множество нулей и полюсов, в постановке близкой к условиям Н.В. Говорова, решена М.И. Журавлевой [21]. Коэффициент задачи $G(t) = G_0(t)G_1(t)G_2(t)$ подчинен условиям:

1) $G_0(t) = \exp\left\{2\pi(\psi(t) + i\varphi(t))|t|^{\rho}\right\}$, $0 < \rho < 1/2$,

2) $G_1(t) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - ta_n^{-1}\right)$, $G_2(t) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - tb_n^{-1}\right)^{-1}$,

причем не имеющие общих точек множества $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, лежащие на L, правильно распределены. В этой работе впервые рассмотрен случай, когда $\ln|G(t)|$ имеет рост того же порядка, что и $\arg G(t)$.

Эти результаты в дальнейшем обобщались в работах А.Г. Алехно, Б.В. Дыбина [19], С.В. Рогозина [32], С.В. Рогозина и М.Э. Толочко [33], а в работах [21, 27, с. 143-146] рассмотрен случай, когда коэффициент претерпевает счетное множество разрывов первого рода.

Задачу Римана на замкнутом контуре Ляпунова с коэффициентом

$$G(t) = \exp\{2\pi i(\alpha(t) - i\beta(t))\},$$

допускающих разрывы колебательного типа в окрестностях конечного множества точек $t_j \in L$, рассмотрел Б.А. Кац [22]. Предполагается, что пределы

$$\underline{\lim}_{t\to t_j\pm 0}\alpha(t),\ \overline{\lim}_{t\to t_j\pm 0}\alpha(t)$$

могут независимо друг от друга принимать любые конечные и бесконечные значения. В работе описаны условия конечности числа линейно независимых решений однородной задачи и исследована разрешимость неоднородной задачи.

Краевая задача Римана с бесконечным индексом на различных классах жордановых кривых изучалась в работах А.Г. Алехно [5], Е.А. Данилова [17], Б.А. Каца [23], И.В. Островского [29], С.А. Плакса [30].

Краевая задача Гильберта для полуплоскости состоит в нахождении всех ограниченных аналитических в верхней полуплоскости $D^+ = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ функций $\Phi(z) = u(z) + iv(z)$, непрерывные граничные значения которых удовлетворяют на действительной оси соотношению

$$a(t)u(t) + b(t)v(t) = g(t),\ t \in \mathbf{R}, \tag{19}$$

где $a(t),\ b(t) \in H,\ a^2(t) + b^2(t) \neq 0$.

Задача Гильберта с бесконечным индексом степенного порядка $\rho < 1$ решена И.Е. Сандригайло [35]. Он применил метод Н.И. Мусхелишвили доопределения по симметрии искомой функции $\Phi(z)$ в нижнюю полуплоскость и свел задачу (19) к задаче Римана с коэффициентом $G(t) = (a(t) + ib(t)) \cdot (a(t) - ib(t))^{-1}$, удовлетворяющим условиям (14), (15) при $j = 1,2$. Указанным методом задачу Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка исследовал П.Ю. Алекна [2], а А.Б. Севрук [37] изучил задачу Гильберта для кусочно-аналитических функций с бесконечным индексом при уточненном порядке $\rho(r)$.

Р.Б. Салимов и П.Л. Шабалин [34] решили задачу Гильберта (19) с бесконечным индексом методом регуляризующего множителя, разработанным Ф.Д. Гаховым [12, с. 273]. Предполагается, что коэффициенты $a(t)$, $b(t)$ задачи Гильберта таковы, что функция $G(t) = (a(t) + ib(t)) \cdot (a(t) - ib(t))^{-1}$ удовлетворяет условиям (14), (15) при $\rho(r) \equiv \rho$. А.Г. Алехно этим методом исследовал задачу с бесконечным индексом логарифмического порядка $\alpha = 1$.

Е.М. Конышкова [24] рассмотрела характеристическое СИУ

$$a(t)\varphi(t) + b(t)\frac{(t+i)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau + i)(\tau - t)} = f(t)$$

с бесконечным индексом первого порядка, когда

$$a(t) \pm b(t) = g_\pm(t)e^{i\alpha_\pm t},\ \alpha_+ \neq \alpha_-.$$

Стандартным приемом уравнение сведено к задаче Римана, для исследования которой применяется метод Н.В. Говорова. При сделанных предположениях установлена равносильность СИУ и соответствующей задачи Римана. Приведен пример, доказывающий, что не каждому решению $\varphi(t) \in \widetilde{H}$ СИУ отвечает ограниченное решение задачи Римана. Это показывает, что в случае бесконечного индекса применение результатов по краевым задачам к СИУ связано с большими трудностями.

Указанным методом СИУ с бесконечным индексом при различных предположениях исследованы А.Г. Алехно [4], Ф.Д. Берковичем [9], М.В. Дубатовской и С.В. Рогозиным [18], Л.Н. Скомаха [38]. Глубокие результаты методами функционального анализа в указанном направлении получены В.Б. Дыбиным, С.М. Грудским и В. Скафом [47].

К задачам с бесконечным индексом по характеру исследования примыкают задачи на счетном множестве контуров. Этот факт отражен в монографии [41].

Методы, разработанные при решении задачи Римана с бесконечным индексом в случае многостороннего завихрения, А.Г. Алехно применил для исследования нелинейной краевой задачи

$$\Phi^{+}(t)\Phi^{-}(t)=G(t),\ G(t)\neq 0,\ G(t)\in H,\ t\in L, \qquad (20)$$

на произвольном замкнутом кусочно-гладком контуре L, имеющем конечное число точек самопересечения. Задача (20) на простом гладком замкнутом контуре впервые рассмотрена П.Г. Черепановым, который свел к ней некоторые упругопластические задачи в условиях антиплоской деформации. В дальнейшем исследование задачи (20) было продолжено в работах Н.В. Говорова и Н.К. Кузнецова, В.В. Кашевского, Л.П. Примачука, Г.Г. Чаевского, причем были найдены только те решения, которые имеют конечное множество нулей. А.Г. Алехно [6] построил общее решение задачи (20), зависящее от семейства целых функций. При этом существование у задачи бесконечного множества решений со счетным множеством нулей вызвано не свойствами функции $G(t)$, а наличием узловых точек контура L, в которых краевое условие (20) не выполнено.

Таким образом, в настоящее время теория краевых задач с бесконечным индексом получила широкое развитие. При этом получен ряд новых результатов, не имеющих аналогов в теории задач с конечным индексом. К сожалению, один из авторов этого обзора, доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей математики и информатики БГУ Александр Григорьевич Алехно, безвременно ушел из жизни. В заключение второй соавтор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору А.Г. Алехно, под руководством и с активным участием которого подготовлен этот аналитический обзор.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Алекна, П.Ю.*** Об одной краевой задаче Римана с бесконечным индексом логарифмического типа для полуплоскости / П.Ю. Алекна // Литовский мат. сб. – 1973. – Т. 13. – № 3. – С. 5–13.
2. ***Алекна, П.Ю.*** Краевая задача Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости / П.Ю. Алекна // Литовский мат. сб. – 1977. – Т. 17. – № 1. – С. 15–18.
3. ***Алехно, А.Г.*** О краевой задаче Римана с конечным числом точек завихрения / А.Г. Алехно // Докл. АН БССР. – 1979. – Т. 23. – № 12. – С. 1069–1072.
4. ***Алехно, А.Г.*** О разрешимости характеристического сингулярного интегрального уравнения с бесконечным индексом / А.Г. Алехно // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24. – 10. – С. 1805–1811.
5. ***Алехно, А.Г.*** Однородная задача Римана с коэффициентом, имеющим разрыв второго рода / А.Г. Алехно // Изв. вузов, Математика. – 1990. – № 2. – С. 29–34.
6. ***Алехно, А.Г.*** Об одной нелинейной краевой задаче на простом замкнутом кусочно-гладком контуре с одной угловой точкой / А.Г. Алехно // Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление : труды Междунар. конференции, Минск, 1996 г. / Белорус. гос. ун-т. – Минск, 1996. – С. 9–19.

7. ***Алехно, А.Г.*** Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом в случае многостороннего завихрения / А.Г. Алехно // Докл. АН Беларуси. – 1997. – Т. 41. – № 5. – С. 38–46.
8. ***Алехно, А.Г.*** Построение по заданному индикатору функции, аналитической в плоскости с разрезом по лучу / А.Г. Алехно // Доклады НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54. – № 2. – С. 10–15.
9. ***Беркович, Ф.Д.*** О приложении краевых задач с бесконечным индексом к исследованию интегральных уравнений // Сб. Материалы Всесоюзн. конф. по краевым задачам. – Казань, 1970. – С. 49–54.
10. ***Гарифьянов, Ф.Н.*** К решению однородной задачи Римана для неограниченного контура / Ф.Н. Гарифьянов // Труды семинара по краевым задачам. – Казань, 1980. – № 17. – С. 27–34.
11. ***Гахов, Ф.Д.*** О краевой задаче Римана / Ф.Д. Гахов // Матем. сб. – 1937. – Т. 2. – № 4. – С. 673–683.
12. ***Гахов, Ф.Д.*** Краевые задачи. – М. : Наука, 1977. – 640 с.
13. ***Говоров, Н.В.*** О краевой задаче Римана с бесконечным индексом / Н.В. Говоров // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 154. – № 6. – С. 1247–1249.
14. ***Говоров, Н.В.*** О гипотезе Пэйли / Н.В. Говоров // Функциональный анализ и его приложения. – 1969. – Т. 3. – № 2. – С. 41–45.
15. ***Говоров, Н.В.*** Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М. : Наука, 1986. – 239 с.
16. ***Гольдберг, А.А.*** Распределение значений мероморфных функций / А.А. Гольдберг, И.В. Островский. – М. : Наука, 1970. – 592 с.
17. ***Данилов, Е.А.*** О факторизации положительной функции на контуре неограниченной закругленности / Е.А. Данилов // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 286. – № 5. – С. 1051–1053.
18. ***Дубатовская, М.В.*** Однородное характеристическое уравнение с бесконечным индексом в исключительном случае / М.В. Дубатовская, С.В. Рогозин // Докл. АН Беларуси. – 1996. – Т. 40. – № 4. – С. 19–23.
19. ***Дыбин, В.Б.*** Корректные задачи для сингулярных интегральных уравнений. – Ростов н/Д : Изд-во Ростов. ун-та, 1988. – 160 с.
20. ***Журавлева, М.И.*** Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом со счетным множеством разрывов первого рода ее коэффициента / М.И. Журавлева // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 210. – № 1. – С. 15–17.
21. ***Журавлева, М.И.*** Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом со счетным множеством нулей и полюсов коэффициента / М.И. Журавлева // Докл. АН СССР. – 1974. – Т. 214. – № 4. – С. 755–757.
22. ***Кац, Б.А.*** О краевой задаче Римана с коэффициентом, допускающим разрывы колебательного типа / Б.А. Кац // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244. – № 3. – С. 521–525.
23. ***Кац, Б.А.*** Краевая задача Римана на негладких дугах и фрактальные размерности / Б.А. Кац // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6. – № 1.
24. ***Конышкова, Е.М.*** О характеристическом сингулярном интегральном уравнении с бесконечным индексом / Е.М. Конышкова // Изд. вузов. Математика. – 1974. – № 8. – С.43–53.
25. ***Монахов, В.Н.*** Краевые задачи псевдодифференциальные операторы на римановых поверхностях / В.Н. Монахов, Е.В. Семенко. – М. : Физматлит. – 2003. – 414 с.
26. ***Мусхелишвили, Н.И.*** Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1968. – 512 с.
27. Научные труды юбилейного семинара по краевым задачам. – Минск : Университетское, 1985. – 206 с.
28. ***Островский, И.В.*** Условия разрешимости краевой задачи Римана с бесконечным индексом / И.В. Островский // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 5. – С. 24–27.

29. ***Островский, И.В.*** Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом на криволинейном контуре / И.В. Островский // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1991. – № 4. – С. 8–11.
30. ***Плакса, С.А.*** Краевая задача Римана с плюс-бесконечным индексом на спрямляемой кривой / С.А. Плакса // Украинский мат. журнал. – 1990. – Т. 42. – № 9. – С. 1204–1213.
31. ***Риман, Б.*** Сочинения / Б. Риман. – М. : Гостехиздат, 1948. – 544 с.
32. ***Рогозин, С.В.*** Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом в исключительном случае для полуплоскости / С.В. Рогозин // Вестник БГУ. Сер. 1. – 1983. – № 2. – С. 60–62.
33. ***Рогозин, С.В.*** Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом в исключительном случае / С.В. Рогозин, М.Э. Толочко // Весці АН БССР. Сер. фіз-мат. навук. – 1978. – № 3. – С. 5–10.
34. ***Салимов, Р.Б.*** К решению краевой задачи Гильберта с бесконечным индексом / Р.Б. Салимов, П.Л. Шабалин // Матем. заметки. – 2003. – Т. 73. – № 5. – С. 724–734.
35. ***Сандригайло, И.Е.*** О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости / И.Е. Сандригайло // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1974. – № 6. – С. 16–23.
36. ***Сандригайло, И.Е.*** О краевой задаче Римана с бесконечным индексом для полуплоскости / И.Е. Сандригайло, // Докл. АН БССР. – 1975. – Т. 19. – № 10. – С. 872–875.
37. ***Севрук, А.Б.*** Однородная краевая задача Гильберта с бесконечным индексом для кусочно-аналитических функций / А.Б. Севрук // Вестн. БГУ. – 2010. – Сер. 1. – С. 76–81.
38. ***Скомаха, Л.Н.*** Об одном сингулярном интегральном уравнении с бесконечным индексом для случая аналитического ядра / Л.Н. Скомаха // Литовский мат. сб. – 1976. – Т. 16. – № 3. – С. 117–125.
39. ***Толочко, М.Э.*** О разрешимости краевой задачи Римана с бесконечным индексом для полуплоскости / М.Э. Толочко // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1971. – № 3. – С. 31–38.
40. ***Толочко, М.Э.*** Об однородной задаче Римана с бесконечным индексом для полуплоскости / М.Э. Толочко // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1972. – № 5. – С. 34–41.
41. ***Чибрикова, Л.И.*** Основные граничные задачи для аналитических функций. – Казань : Изд-во КГУ, 1977. – 302 с.
42. ***Чибрикова, Л.И.*** Об одном особом случае задачи Римана на неограниченном контуре, I / Л.И. Чибрикова // Труды семинара по краевым задачам. – Казань, 1978. – № 15.
43. ***Чибрикова, Л.И.*** Об одном особом случае задачи Римана на неограниченном контуре, II / Л.И. Чибрикова // Труды семинара по краевым задачам. – Казань, 1979. – № 116. – С. 185–201
44. ***Юров, П.Г.*** Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического типа / П.Г. Юров // Изв. вузов. Математика. – 1966. – № 2. – С. 158–163.
45. ***Юров, П.Г.*** О представлении интегралов типа Коши / П.Г. Юров // Мат. заметки. – 1969. – Т. 6. – С. 55–63.
46. ***Юров, П.Г.*** Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом порядка $\alpha \geq 1$ / П.Г. Юров // Сб. Материалы Всесоюзн. конф. по краевым задачам. – Казань, 1970. – С. 279–284.
47. ***Dybin, V.B.*** Introduction to the Theory of Toeplitz Operators with Infinite Index / V.B. Dybin, S.M. Grydsky, W.W Schaaf. – Boston : Birkhauses Verlag, 2002.

48. ***Gahov, F.D.*** Boundary value problems / F.D. Gahov. – Oxford and Addison, 1966. – 532 p.
49. ***Govorov, N.V.*** Rieman's boundary problem with infinite index / N.V. Govorov. – Basel – Boston – Berlin : Birkhauser Verlag, 1994. – 274 p.
50. ***Hayman, W.K.*** Questions of regularity connected with the Phragmen–Lindelof principle / W.K. Hayman // I. math. Pures et appl. – 1956. – V. 35. – P. 115–126.
51. ***Hilbert, D.*** Grundzuge der Integralgleihungen / D. Hilbert. – Leipzig – Berlin, 1924.

Поступила в редакцию 28.11.2011 г.