УДК 517+530.1

С.В. ЖЕСТКОВ, М.А. КОЧЕГАРОВА

О СУЩЕСТВОВАНИИ КИНКОВЫХ ВОЛНОВЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ МОДЕЛЕЙ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИЙ С ДИФФУЗИЕЙ

Известно [1, 2], что происхождение пространственных структур – одна из наиболее важных проблем в биологии развития. Теория формирования пространственной структуры непосредственно связана с изучением систем реакций с диффузией, которые не интегрируются классическими методами, разработанными для солитонных уравнений. Поэтому разработка аналитических методов построения волновых решений этих уравнений является актуальной и важной математической задачей.

Введение

В работах [3-17] предложены различные методы исследования действительных моделей уравнений реакций с диффузией, которые описывают достаточно широкий круг биологических явлений. Менее изученными являются комплекснозначные модели, которые требуют разработки новых методов при изучении сложных механизмов реакций с диффузией [1]. Отметим, что в работах [18-23] обоснованы конструктивные подходы построения волновых решений нелинейных уравнений параболического типа.

В настоящей работе исследуются комплекснозначные модели уравнений реакций с диффузией вида (ср. с [1])

$$w_t = Dw_{xx} + Aw + B|w|^2 w + Cw_x, \tag{1}$$

$$w_t = Dw_{xx} + Aw + B|w|^2 w + Cww_x, \tag{2}$$

где $w = u + iv$ комплексная концентрация, состоящая из вещественных концентраций u, v, а A, B, C, D – произвольные комплексные числа. Основу анализа составляет прямой метод из [24], который основан на использовании дробно-рациональной формы кинковых волновых решений. Отметим, что впервые кинковое волновое решение было построено в работе [9] для действительного уравнения Фишера.

I. Рассмотрим уравнение (1). Полагая, что

$$A = a_1 + ia_2,\ B = b_1 + ib_2,\ C = c_1 + ic_2,\ D = d_1 + id_2,$$

перепишем уравнение (1) в виде системы уравнений

$$\begin{cases} u_t = d_1u_{xx} - d_2v_{xx} + a_1u - a_2v + b_1\left(u^2+v^2\right)\ u - b_2\left(u^2+v^2\right)v + c_1u_x - c_2v_x, \\ v_t = d_1v_{xx} + d_2u_{xx} + a_1v + a_2u + b_1\left(u^2+v^2\right)\ v + b_2\left(u^2+v^2\right)u + c_1v_x + c_2u_x. \end{cases} \tag{3}$$

Решение системы (3) будем строить в виде кинков вида (ср. с [9])

$$
\begin{gathered}
u(t,x)=u(\xi)=\mu_0+\mu_1F^{-1}(\xi),\ v(t,x)=v(\xi)=\chi_0+\chi_1F^{-1}(\xi),\\
\xi=\alpha t+\beta x+\varphi,\ u(\pm\infty)=u_{\pm},\ v(\pm\infty)=v_{\pm},
\end{gathered}
\tag{4}
$$

где $F(\xi)$ – неизвестная волновая функция, α, β, φ, μ_0, μ_1, χ_0, χ_1 – произвольные действительные числа, $u_{\pm}$, $v_{\pm}$ значения на бесконечности. Подставляя (4) в (3), найдем

$$
\begin{gathered}
-\alpha\mu_1FF'=d_1\left[2\beta^2\mu_1(F')^2-\beta^2\mu_1FF''\right]-d_2\left[2\beta^2\chi_1(F')^2-\beta^2\chi_1FF''\right]+\\
+a_1\left[\mu_0F^3+\mu_1F^2\right]-a_2\left[\chi_0F^3+\chi_1F^2\right]+\\
+b_1\left[2F\left(\mu_0\mu_1+\chi_0\chi_1\right)+F^2\left(\mu_0^2+\chi_0^2\right)+\left(\mu_1^2+\chi_1^2\right)\right]\ \left[\mu_0F+\mu_1\right]-\\
-b_2\left[2F\left(\mu_0\mu_1+\chi_0\chi_1\right)+F^2\left(\mu_0^2+\chi_0^2\right)+\left(\mu_1^2+\chi_1^2\right)\right]\ \left[\chi_0F+\chi_1\right]-\\
-c_1\beta\mu_1FF'+c_2\beta\chi_1FF',\\
-\alpha\chi_1FF'=d_1\left[2\beta^2\chi_1(F')^2-\beta^2\chi_1FF''\right]+d_2\left[2\beta^2\mu_1(F')^2-\beta^2\mu_1FF''\right]+\\
+a_1\left[\chi_0F^3+\chi_1F^2\right]+a_2\left[\mu_0F^3+\mu_1F^2\right]+\\
+b_1\left[2F\left(\mu_0\mu_1+\chi_0\chi_1\right)+F^2\left(\mu_0^2+\chi_0^2\right)+\left(\mu_1^2+\chi_1^2\right)\right]\ \left[\left(\chi_0F+\chi_1\right)\right]+\\
+b_2\left[2F\left(\mu_0\mu_1+\chi_0\chi_1\right)+F^2\left(\mu_0^2+\chi_0^2\right)+\left(\mu_1^2+\chi_1^2\right)\right]\ \left[\mu_0F+\mu_1\right]-\\
-c_1\chi_1\beta FF'-c_2\beta\mu_1FF'.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Систему (5) преобразуем к виду

$$
\begin{gathered}
F^3H_3+F^2H_2+FH_1+FF'\left(\alpha\mu_1-c_1\beta\mu_1+c_2\beta\chi_1\right)+\\
+2(F')^2\beta^2\left(d_1\mu_1-d_2\chi_1\right)+\beta^2FF''\left(d_2\chi_1-d_1\mu_1\right)+\\
+\left(b_1\mu_1-b_2\chi_1\right)\left(\mu_1^2+\chi_1^2\right)=0,\\
F^3\tilde{H}_3+F^2\tilde{H}_2+F\tilde{H}_1+FF'\left(\alpha\chi_1-c_1\chi_1\beta-c_2\beta\mu_1\right)+\\
+2\beta^2(F')^2\left(d_1\chi_1+d_2\mu_1\right)-\beta^2FF''\left(d_1\chi_1+d_2\mu_1\right)+\\
+\left(\mu_1^2+\chi_1^2\right)\left(b_1\chi_1+b_2\mu_1\right)=0,
\end{gathered}
\tag{6}
$$

где

$$
H_3\equiv a_1\mu_0-a_2\chi_0+\left(\mu_0^2+\chi_0^2\right)\left(b_1\mu_0-b_2\chi_0\right),
$$

$$H_2 \equiv a_1\mu_1 - a_2\chi_1 + \left(\mu_0^2 + \chi_0^2\right)\left(b_1\mu_1 - b_2\chi_1\right) + 2\left(\mu_0\mu_1 + \chi_0\chi_1\right)\left(b_1\mu_0 - b_2\chi_0\right),$$

$$H_1 \equiv 2\left(\mu_0\mu_1 + \chi_0\chi_1\right)\left(b_1\mu_1 - b_2\chi_1\right) + \left(\mu_1^2 + \chi_1^2\right)\left(b_1\mu_0 - b_2\chi_0\right),$$

$$\tilde{H}_3 \equiv a_2\mu_0 + a_1\chi_0 + \left(\mu_0^2 + \chi_0^2\right)\left(b_1\chi_0 + b_2\mu_0\right),$$

$$\tilde{H}_2 \equiv a_1\chi_1 + a_2\mu_1 + \left(\mu_0^2 + \chi_0^2\right)\left(b_1\chi_1 + b_2\mu_1\right) + 2\left(\mu_0\mu_1 + \chi_0\chi_1\right)\left(b_1\chi_0 + b_2\mu_0\right),$$

$$\tilde{H}_1 \equiv 2\left(\mu_0\mu_1 + \chi_0\chi_1\right)\left(b_1\chi_1 + b_2\mu_1\right) + \left(\mu_1^2 + \chi_1^2\right)\left(b_1\chi_0 + b_2\mu_0\right).$$

Решение системы (6) строится в виде

$$F(\xi) = h_0 + h_1 \exp(\xi), \tag{7}$$

где $h_0 > 0$, $h_1 > 0$ неизвестные действительные числа. Подставляя (7) в (6) и приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях экспоненты, получим:

$$\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&e^3: a_1\mu_0 - a_2\chi_0 + \left(\mu_0^2 + \chi_0^2\right)\left(b_1\mu_0 - b_2\chi_0\right) = 0\\
&e^3: a_2\mu_0 + a_1\chi_0 + \left(\mu_0^2 + \chi_0^2\right)\left(b_1\chi_0 + b_2\mu_0\right) = 0
\end{aligned}\right\}, \text{(I)}\\
&\left.\begin{aligned}
&e^2: H_2 + \left(\alpha\mu_1 - c_1\beta\mu_1 + c_2\beta\chi_1\right) + \beta^2\left(d_1\mu_1 - d_2\chi_1\right) = 0\\
&e^2: \tilde{H}_2 + \left(\alpha\chi_1 - c_1\beta\chi_1 - c_2\beta\mu_1\right) + \beta^2\left(d_1\chi_1 + d_2\mu_1\right) = 0
\end{aligned}\right\}, \text{(II)}\\
&\left.\begin{aligned}
&e: 2h_0H_2 + H_1 + h_0\left(\alpha\mu_1 - c_1\beta\mu_1 + c_2\beta\chi_1\right) + h_0\left(d_2\chi_1 - d_1\mu_1\right)\beta^2 = 0\\
&e: 2h_0\tilde{H}_2 + \tilde{H}_1 + h_0\left(\alpha\chi_1 - c_1\beta\chi_1 - c_2\beta\mu_1\right) - h_0\left(d_1\chi_1 + d_2\mu_1\right)\beta^2 = 0
\end{aligned}\right\}, \text{(III)}\\
&\left.\begin{aligned}
&e^0: h_0^2H_2 + h_0H_1 + \left(b_1\mu_1 - b_2\chi_1\right)\left(\mu_1^2 + \chi_1^2\right) = 0\\
&e^0: h_0^2\tilde{H}_2 + h_0\tilde{H}_1 + \left(b_1\chi_1 + b_2\mu_1\right)\left(\mu_1^2 + \chi_1^2\right) = 0
\end{aligned}\right\}. \text{(IV)}
\end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы система (6) имела решение вида (7) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (8).*

Отметим, что параметр $h_1 > 0$ является произвольным.

Исследуем соотношения (8). С этой целью положим (для упрощения вычислений), что $h_0 = 1$. Тогда система (IV) примет вид

$$\begin{gathered}
a_1\mu_1 - a_2\chi_1 + 2\left(\mu_0\mu_1 + \chi_0\chi_1\right)\left(b_1\mu_0 - b_2\chi_0 + b_1\mu_1 - b_2\chi_1\right) +\\
+\left(\mu_0^2 + \chi_0^2\right)\left(b_1\mu_1 - b_2\chi_1\right) + \left(\mu_1^2 + \chi_1^2\right)\left(b_1\mu_0 - b_2\chi_0 + b_1\mu_1 - b_2\chi_1\right) = 0,
\end{gathered} \tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
&a_1\chi_1 + a_2\mu_1 + 2(\mu_0\mu_1 + \chi_0\chi_1)(b_1\chi_0 + b_2\mu_0 + b_1\chi_1 + b_2\mu_1) + \\
&+(\mu_0^2 + \chi_0^2)(b_1\chi_1 + b_2\mu_1) + (\mu_1^2 + \chi_1^2)(b_1\chi_0 + b_2\mu_0 + b_1\chi_1 + b_2\mu_1) = 0.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Из системы (I) найдем

$$
a_1 = -b_1\Gamma_0,\ a_2 = -b_2\Gamma_0,\ \Gamma_0 \equiv \mu_0^2 + \chi_0^2. \tag{11}
$$

Тогда коэффициенты $H_1,\ H_2,\ \tilde{H}_1,\ \tilde{H}_2$ примут вид

$$
H_1 = 2\Gamma_2(b_1\mu_1 - b_2\chi_1) + \Gamma_1(b_1\mu_0 - b_2\chi_0),\ H_2 = 2\Gamma_2(b_1\mu_0 - b_2\chi_0),
$$

$$
\tilde{H}_1 = 2\Gamma_2(b_1\chi_1 + b_2\mu_1) + \Gamma_1(b_1\chi_0 + b_2\mu_0),
$$

$$
\tilde{H}_2 = 2\Gamma_2(b_1\chi_0 + b_2\mu_0),\ \Gamma_2 \equiv \mu_0\mu_1 + \chi_0\chi_1,\ \Gamma_1 \equiv \mu_1^2 + \chi_1^2.
$$

Используя соотношения (11), уравнение (9) преобразуем к виду

$$
(b_1M - b_2N)(2\Gamma_2 + \Gamma_1) = 0, \tag{12}
$$

где $M \equiv \mu_0 + \mu_1,\ N \equiv \chi_0 + \chi_1$, а уравнение (10) – к виду

$$
(b_1N + b_2M)(2\Gamma_2 + \Gamma_1) = 0. \tag{13}
$$

Из (12), (13) следует, что, либо

$$
2\Gamma_2 + \Gamma_1 = 0, \tag{14}
$$

либо

$$
M = N = 0, \tag{15}
$$

если $b_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0$.

Пусть выполнено условие (14). Тогда остается исследовать системы (II), (III).

Систему (II) преобразуем к виду

$$
\begin{cases}
d_1\beta^2\mu_1 - d_2\beta^2\chi_1 = -H_2 - (\alpha\mu_1 - c_1\beta\mu_1 + c_2\beta\chi_1), \\
d_1\beta^2\chi_1 + d_2\beta^2\mu_1 = -\tilde{H}_2 - (\alpha\chi_1 - c_1\beta\chi_1 - c_2\beta\mu_1).
\end{cases}
$$

Из нее определим параметры $d_1,\ d_2$. Имеем

$$
d_1 = \frac{c_1}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta^2} + \tilde{d}_1, \tag{16}
$$

$$
\tilde{d}_1 = \frac{1}{\Delta_1}\left[2\Gamma_2(b_2\chi_0\mu_1 - b_1\mu_0\mu_1 - b_1\chi_0\chi_1 - b_2\mu_0\chi_1)\right],\ \Delta_1 \equiv \beta^2\Gamma_1,
$$

$$
d_2 = \frac{c_2}{\beta} + \tilde{d}_2, \tag{17}
$$

$$
\tilde{d}_2 = \frac{1}{\Delta_1}\left[2\Gamma_2(-b_1\chi_0\mu_1 - b_2\mu_0\mu_1 + b_1\mu_0\chi_1 - b_2\chi_0\chi_1)\right].
$$

Систему (III) преобразуем к виду

$$\begin{cases} -2\beta\mu_1 c_1 + 2\beta\chi_1 c_2 = -2\alpha\mu_1 - H_1 - 2H_2 - \beta^2\chi_1\tilde{d}_2 + \beta^2\mu_1\tilde{d}_1 \equiv L_1, \\ -2\beta\chi_1 c_1 + 2\beta\mu_1 c_2 = -2\alpha\chi_1 - \tilde{H}_1 - 2\tilde{H}_2 + \beta^2\mu_1\tilde{d}_2 + \beta^2\chi_1\tilde{d}_1 \equiv L_2. \end{cases} \quad (18)$$

Из (18) определим параметры $c_1,\ c_2$. Имеем

$$c_1 = \frac{2\beta(\mu_1 L_1 - \chi_1 L_2)}{\delta_1},\ c_2 = \frac{2\beta(\chi_1 L_1 - \mu_1 L_2)}{\delta_1}, \quad (19)$$

если $\delta_1 = 4\beta^2(\chi_1^2 - \mu_1^2) \neq 0$.

Таким образом, система уравнений (8) представляет собой законы распространения двух кинков вида (4). Их анализ показывает, что если

$$\beta \neq 0,\ \delta_1 \neq 0,\ h_0 = 1, \quad (20)$$

то можно задать произвольным образом параметры $\alpha,\ \beta,\ b_1,\ b_2,\ \mu_0,\ \mu_1,$, $\chi_0,\ \chi_1$ а параметры $a_1,\ a_2,\ d_1,\ d_2,\ c_1,\ c_2$ можно однозначно найти по формулам (11), (16), (17), (19). Значения на бесконечности примут вид

$$\begin{aligned} &u(\xi)\big|_{\xi\to+\infty} = \mu_0, \\ &u(\xi)\big|_{\xi\to-\infty} = \mu_0 + \mu_1,\ v(\xi)\big|_{\xi\to-\infty} = \chi_0 + \chi_1. \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (14), (20). Тогда уравнение (1) имеет решение вида (4), (7), которое удовлетворяет краевым условиям (21).*

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$w_t = \left(-\frac{13}{36} + \frac{13}{36}i\right)w_{xx} + \left(-\frac{13}{72} + \frac{13}{72}i\right)w + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)|w|^2 w + w_x.$$

По теореме 2 оно имеет решение вида

$$w(t,x) = \left[\frac{1}{2} - F^{-1}(\xi)\right] + i\left[\frac{1}{3} - \frac{2}{3}F^{-1}(\xi)\right],\ F(\xi) = 1 + h_1\exp(\xi),\ h_1 > 0.$$

Пусть выполнено условие (15). Тогда $\mu_1 = -\mu_0,\ \chi_1 = -\chi_0$. Формулы (16), (17), (19) примут вид

$$d_1 = \frac{c_1}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta^2} + \tilde{d}_1,\ \tilde{d}_1 = \frac{1}{\beta^2\Gamma_1}\left[2\Gamma_2\Gamma_0 b_1\right],$$

$$d_2 = \frac{c_2}{\beta} + \tilde{d}_2,\ \tilde{d}_2 = \frac{1}{\beta^2\Gamma_1}\left[2\Gamma_2\Gamma_0 b_2\right],$$

$$c_1 = \left.\frac{2\beta(\chi_0 L_2 - \mu_0 L_1)}{\delta_1}\right|_{\substack{\mu_1=-\mu_0 \\ \chi_1=-\chi_0}},\ c_2 = \left.\frac{2\beta(\mu_0 L_2 - \chi_0 L_1)}{\delta_1}\right|_{\substack{\mu_1=-\mu_0 \\ \chi_1=-\chi_0}}.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (15), (20). Тогда уравнение (1) имеет решение вида (4), (7), которое удовлетворяет краевым условиям*

$$\begin{gathered} u(\xi)\big|_{\xi\to+\infty}=\mu_0,\ v(\xi)\big|_{\xi\to+\infty}=\chi_0, \\ u(\xi)\big|_{\xi\to-\infty}=0,\ v(\xi)\big|_{\xi\to-\infty}=0. \end{gathered} \tag{21′}$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$w_t=-\left(\frac{31}{8}+\frac{5}{4}i\right)w_{xx}-\left(\frac{5}{8}+\frac{5}{16}i\right)w+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i\right)|w|^2w-\left(\frac{13}{8}+\frac{5}{8}i\right)w_x.$$

По теореме 3 оно имеет решение вида

$$w(t,x)=\left[1-F^{-1}(\xi)\right]+i\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}F^{-1}(\xi)\right],\ F(\xi)=1+h_1\exp(\xi),\ h_1>0.$$

II. Рассмотрим уравнение (2). Как и выше перепишем его в виде системы уравнений

$$\begin{cases} u_t=d_1u_{xx}-d_2v_{xx}+\left(a_1u-a_2v\right)+b_1\left(u^2+v^2\right)u-b_2\left(u^2+v^2\right)v+ \\ \qquad +c_1\left(uu_x-vv_x\right)-c_2\left(uv_x+u_xv\right), \\ v_t=d_1v_{xx}+d_2u_{xx}+\left(a_1v+a_2u\right)+b_1\left(u^2+v^2\right)v+b_2\left(u^2+v^2\right)u+ \\ \qquad +c_1\left(uv_x+u_xv\right)+c_2\left(uu_x-vv_x\right). \end{cases} \tag{22}$$

Решение системы (22) строится в виде кинков (4). Подставляя (4) в (22), найдем

$$\begin{aligned} &F^3\left[a_1\mu_0-a_2\chi_0+\Gamma_0\left(b_1\mu_0-b_2\chi_0\right)\right]+F^2\left[a_1\mu_1-a_2\chi_1+2\Gamma_2\left(b_1\mu_0-b_2\chi_0\right)+\right. \\ &\quad\left.+\Gamma_0\left(b_1\mu_1-b_2\chi_1\right)\right]+F\left[\Gamma_1\left(b_1\mu_0-b_2\chi_0\right)+2\Gamma_2\left(b_1\mu_1-b_2\chi_1\right)\right]+ \\ &\quad+FF'\left[\alpha\mu_1+\mu_0\left(c_2\chi_1-c_1\mu_1\right)\beta+\chi_0\left(c_1\beta\chi_1+c_2\beta\mu_1\right)\right]+ \\ &\quad+FF''\beta^2\left(d_2\chi_1-d_1\mu_1\right)+2(F')^2\beta^2\left(d_1\mu_1-d_2\chi_1\right)+ \\ &\quad+F'\left[c_1\beta\left(\chi_1^2-\mu_1^2\right)+2c_2\beta\mu_1\chi_1\right]+\left(b_1\mu_1-b_2\chi_1\right)\Gamma_1=0, \\ &F^3\left[a_1\chi_0+a_2\mu_0+\left(b_1\chi_0+b_2\mu_0\right)\Gamma_0\right]+F^2\left[a_1\chi_1+a_2\mu_1+2\Gamma_2\left(b_1\chi_0+b_2\mu_0\right)+\right. \\ &\quad\left.+\Gamma_0\left(b_1\chi_1+b_2\mu_1\right)\right]+F\left[\Gamma_1\left(b_1\chi_0+b_2\mu_0\right)+2\Gamma_2\left(b_1\chi_1+b_2\mu_1\right)\right]+ \\ &\quad+FF'\left[\alpha\chi_1-\mu_0\left(c_1\chi_1+c_2\mu_1\right)\beta+\chi_0\left(c_2\chi_1-c_1\mu_1\right)\beta\right]- \\ &\quad-\beta^2FF''\left(d_1\chi_1+d_2\mu_1\right)+2\beta^2(F')^2\left(d_1\chi_1+d_2\mu_1\right)+ \\ &\quad+F'\left[-2c_1\beta\chi_1\mu_1+c_2\beta\left(\chi_1^2-\mu_1^2\right)\right]+\left(b_1\chi_1+b_2\mu_1\right)\Gamma_1=0. \end{aligned} \tag{23}$$

Введем обозначения

$$H_1 = \Gamma_1\left(b_1\mu_0 - b_2\chi_0\right) + 2\Gamma_2\left(b_1\mu_1 - b_2\chi_1\right),$$

$$H_2 = a_1\mu_1 - a_2\chi_1 + 2\Gamma_2\left(b_1\mu_0 - b_2\chi_0\right) + \Gamma_0\left(b_1\mu_1 - b_2\chi_1\right),$$

$$H_3 = a_1\mu_0 - a_2\chi_0 + \Gamma_0\left(b_1\mu_0 - b_2\chi_0\right),$$

$$R = \alpha\mu_1 + \mu_0\left(c_2\chi_1 - c_1\mu_1\right)\beta + \chi_0\left(c_1\chi_1 + c_2\mu_1\right)\beta,\ Q = c_1\beta\left(\chi_1^2 - \mu_1^2\right) + 2c_2\beta\mu_1\chi_1,$$

$$\tilde{H}_1 = \Gamma_1\left(b_1\chi_0 + b_2\mu_0\right) + 2\Gamma_2\left(b_1\chi_1 + b_2\mu_1\right),$$

$$\tilde{H}_2 = a_1\chi_1 + a_2\mu_1 + 2\Gamma_2\left(b_1\chi_0 + b_2\mu_0\right) + \Gamma_0\left(b_1\chi_1 + b_2\mu_1\right),$$

$$\tilde{H}_3 = a_1\chi_0 + a_2\mu_0 + \Gamma_0\left(b_1\chi_0 + b_2\mu_0\right),$$

$$\tilde{R} = \alpha\chi_1 - \mu_0\left(c_1\chi_1 + c_2\mu_1\right)\beta + \chi_0\left(c_2\chi_1 - c_1\mu_1\right)\beta,\ \tilde{Q} = c_2\beta\left(\chi_1^2 - \mu_1^2\right) - 2c_1\beta\chi_1\mu_1,$$

$$\Gamma_0 = \mu_0^2 + \chi_0^2,\ \Gamma_1 = \mu_1^2 + \chi_1^2,\ \Gamma_2 = \mu_0\mu_1 + \chi_0\chi_1.$$

Решение системы (23) строится в виде

$$F(\xi) = \lambda_0 + \lambda_1\exp(\xi), \qquad (24)$$

где $\lambda_0 > 0,\ \lambda_1 > 0$ – неизвестные действительные числа. Подставляя (24) в (23) и используя линейную независимость экспонент, найдем

$$\left.\begin{aligned}
&e^3: H_3 = 0 \Rightarrow a_1\mu_0 - a_2\chi_0 + \Gamma_0\left(b_1\mu_0 - b_2\chi_0\right) = 0\\
&e^3: H_3 = 0 \Rightarrow a_1\chi_0 + a_2\mu_0 + \Gamma_0\left(b_1\chi_0 + b_2\mu_0\right) = 0
\end{aligned}\right\},\ \text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned}
&e^2: H_2 + R + \beta^2\left(d_2\chi_1 - d_1\mu_1\right) + 2\beta^2\left(d_1\mu_1 - d_2\chi_1\right) = 0\\
&e^2: \tilde{H}_2 + \tilde{R} - \beta^2\left(d_1\chi_1 + d_2\mu_1\right) + 2\beta^2\left(d_1\chi_1 + d_2\mu_1\right) = 0
\end{aligned}\right\},\ \text{(II)}$$

$$\left.\begin{aligned}
&e: 2\lambda_0 H_2 + H_1 + \lambda_0 R + \lambda_0\beta^2\left(d_2\chi_1 - d_1\mu_1\right) + Q = 0\\
&e: 2\lambda_0\tilde{H}_2 + \tilde{H}_1 + \lambda_0\tilde{R} - \lambda_0\beta^2\left(d_1\chi_1 + d_2\mu_1\right) + \tilde{Q} = 0
\end{aligned}\right\},\ \text{(III)} \qquad (25)$$

$$\left.\begin{aligned}
&e^0: \lambda_0^2 H_2 + \lambda_0 H_1 + \left(b_1\mu_1 - b_2\chi_1\right)\Gamma_1 = 0\\
&e^0: \lambda_0^2\tilde{H}_2 + \lambda_0\tilde{H}_1 + \left(b_1\chi_1 + b_2\mu_1\right)\Gamma_1 = 0
\end{aligned}\right\}.\ \text{(IV)}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Для того чтобы система (23) имела решение вида (24) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (25).*

Отметим, что параметр $\lambda_1 > 0$ является произвольным.

Исследуем уравнения (25). Для упрощения вычислений положим, что $\lambda_0 = 1$. Из системы (I) найдем

$$a_1 = -b_1\Gamma_0,\ a_2 = -b_2\Gamma_0. \qquad (26)$$

Систему (IV) преобразуем к виду

$$(2\Gamma_2 + \Gamma_1)(b_1\omega_1 - b_2\omega_2) = 0,\ (2\Gamma_2 + \Gamma_1)(b_1\omega_2 + b_2\omega_1) = 0. \qquad (27)$$

$$\omega_1 = \mu_0 + \mu_1,\ \omega_2 = \chi_0 + \chi_1.$$

Из (27) следует, что либо

$$\Gamma_1 + 2\Gamma_2 = 0, \qquad (28)$$

либо

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \qquad (29)$$

если $b_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0$.

Пусть выполнено условие (28). Тогда остается исследовать системы (II), (III). Систему (II) приведем к виду

$$\begin{cases} H_2 + R + \beta^2(d_1\mu_1 - d_2\chi_1) = 0, \\ \tilde{H}_2 + \tilde{R} + \beta^2(d_1\chi_1 + d_2\mu_1) = 0. \end{cases} \qquad (30)$$

Из (30) можно выразить коэффициенты d_1, d_2 через коэффициенты b_1, b_2, c_1, c_2. Для этого обозначим

$$\Phi_1 = -\frac{H_2 + R}{\beta^2},\ \Phi_2 = \frac{\tilde{H}_2 + \tilde{R}}{\beta^2}.$$

Тогда

$$d_1 = \frac{\mu_1\Phi_1 + \chi_1\Phi_2}{\Gamma_1},\ d_2 = \frac{\mu_1\Phi_2 - \chi_1\Phi_1}{\Gamma_1}. \qquad (31)$$

Систему (III) приведем к виду

$$\begin{cases} H_1 + 3H_2 + 2R + Q = 0, \\ \tilde{H}_1 + 3\tilde{H}_2 + 2\tilde{R} + \tilde{Q} = 0. \end{cases} \qquad (32)$$

Из (32) следует, что параметры c_1, c_2 однозначно определяются, если выполняется хотя бы одно из условий

$$2(\chi_0\chi_1 - \mu_0\mu_1) + \chi_1^2 - \mu_1^2 \neq 0, \qquad (33)$$

или

$$\mu_0\chi_1 + \chi_0\mu_1 + 2\mu_1\chi_1 \neq 0. \qquad (34)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (28), (33) или (34). Тогда уравнение (2) имеет решение вида (4), (24), которое удовлетворяет краевым условиям (21).*

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$w_t = \left(\frac{98}{343}i\right)w_{xx} + \left(\frac{265}{32} + \frac{265}{16}i\right)w - (2+4i)|w|^2 w + \left(-\frac{7791}{1715} + \frac{56}{245}i\right)ww_x .$$

По теореме 5 оно имеет решение вида

$$w(t,x) = \left[2 - \frac{1}{2}F^{-1}(\xi)\right] + i\left[-\frac{3}{8} - F^{-1}(\xi)\right],\ F(\xi) = 1 + \lambda_1 \exp(\xi),\ \lambda_1 > 0 .$$

Пусть выполнены соотношения (29). Тогда $\mu_1 = -\mu_0$, $\chi_1 = -\chi_0$. В этом случае условие (33) примет вид

$$\mu_0^2 - \chi_0^2 \neq 0. \tag{35}$$

Условие (34) не выполняется. Следовательно, справедлива

Теорема 6. *Пусть выполнены условия (29), (35). Тогда уравнение (2) имеет решение вида (4), (24), которое удовлетворяет краевым условиям (21′).*

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$w_t = \left(\frac{63}{5} - 44i\right)w_{xx} + (-20 + 20i)w + (1-i)|w|^2 w + \left(\frac{8}{5} - \frac{109}{5}i\right)ww_x .$$

По теореме 6 оно имет решение вида

$$w(t,x) = \left[4 - 4F^{-1}(\xi)\right] + i\left[2 - 2F^{-1}(\xi)\right],\ F(\xi) = 1 + \lambda_1 \exp(\xi),\ \lambda_1 > 0 .$$

Таким образом, в работе развит прямой метод построения кинковых волновых решений нелинейных систем типа реакции с диффузией.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Murray, J.D.*** Mathematical biology. Springer / J.D. Murray. – 1989.
2. ***Bindu, P.S.*** Symmetries and integrability properties of generalized Fisher type nonlinear diffusion equation / P.S. Bindu, M. Lakshmanan // Proceedings of institute of mathematics of NAS of Ukraine. – 2002. – Vol. 43. – Part. 1. – P. 36–48.
3. ***Lotka, A.J.*** Updaded oscillations derived from the law of mass action / A.J. Lotka // J.Amer. Chem. Soc. – 1920. – Vol. 42. – P. 1595–1599.
4. ***Volterra, V.*** Variazionie fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi / V. Volterra // Mem. Acad. Lincei. – 1926. – Vol. 2. – P. 31–113.
5. ***Fisher, R.A.*** The wave of advance of advantageous genes / R.A. Fisher // Ann. Eugenics. – 1937. – Vol. 7. – P. 353–369.
6. ***Колмогоров, А.Н.*** Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме / А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов // Бюллетень МГУ, Сер. А. Матем. и механика. – 1937. – Т. 1. – С. 1–25.
7. ***Canosa, J.*** Diffusion in nonlinear multiplicative media / J. Canosa // J. Math. Phys. – 1969. – Vol. 10. – P. 1862–1868.
8. ***Aronson, D.G.*** Partial differential equations and related topics / D.G. Aronson, H.F. Weinberger // Lecture Notes in Mathematics. Springer. – 1975. – V. 446. – P. 5–49.

9. ***Ablowitz, M.J.*** Explicit solution of Fisher's equation for a special wave speed / M.J. Ablowitz, A. Zeppetella // Bull. Math. Biol. – 1979. – V. 41. – P. 835–840.
10. ***Shigesada, N.*** Spatial segregation of interacting species / N. Shigesada, K. Kawasaki, E. Teramoto // J. Theor. Biol. – 1979. – Vol. 79. – P. 83–99.
11. ***Brazhnik, P.K.*** Travelling waves and static structures in a two-dimensional exactly solvable reaction-diffusion system / P.K. Brazhnik, J.J. Tyson // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – V. 32. – P. 8033–8044.
12. ***Brazhnik, P.K.*** On travelling wave solutions of Fisher's equation in two spatial dimensions / P.K. Brazhnik, J.J. Tyson // SIAM. J. Appl. Math. – 1999. – V. 60. – P. 371–391.
13. ***Cherniha, R.*** Lie symmetries of nonlinear two-dimensional reaction-diffusion systems / R. Cherniha // Rept. Math. Phys. – 2000. – Vol. 46. – P. 63–76.
14. ***Черніга, Р.М.*** Нові точні розв'язки та іхни властивості одного нелінійного рівняння математичноі біологіі / Р.М. Черніга // Укр. мат. журнал. – 2001. – Т. 53. – № 10. – С. 1409–1421.
15. ***Черніга, Р.М.*** Дифузійна система Лотки – Вольтерра: симметріі Лі, точні та числові розв'язки / Р.М. Черніга, В.А. Дутка // Укр. мат. журнал. – 2004. – Т. 56. – № 10. – С. 1395–1404.
16. ***Баранник, А.Ф.*** Про неліівськи розв'язки нелінійного рівняння реакціі-диффузіі / А.Ф. Баранник, И.И. Юрик // Доп. Нац. АН. Украіни. – 2005. – № 2. – С. 11–17.
17. ***Сидоров, С.В.*** Бегущие волны и динамический хаос в активных средах: численное исследование / С.В. Сидоров // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45. – № 2. – С. 250–254.
18. ***Жестков, С.В.*** О существовании волновых решений в модели нервной проводимости FitzHugh-Nagumo / С.В. Жестков // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. "Герценовские чтения-2009". LXII. 13-18 апреля 2009. – СПб., 2009. – С. 50–54.
19. ***Жестков, С.В.*** О существовании новых форм волновых решений нелинейных уравнений математической биологии / С.В. Жестков, А.А. Романенко // Весці НАНБ. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 2. – С. 46–51.
20. ***Жестков, С.В.*** Аналитическое моделирование волновых решений биологических систем типа Shigesada-Kawasaki-Teramoto / С.В. Жестков, А.С. Платонов // Матер. науч. конф. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. – "Герценовские чтения-2010", 12-17 апреля 2010. – СПб., 2009. – С. 33-35.
21. ***Жестков, С.В.*** Об исследовании новых форм волновых решений двумерных уравнений Фишера и Лотки-Вольтерра / С.В. Жестков, А.А. Романенко // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. Сер. В. – Могилев. – 2010. – № 2(36). – С. 4–15.
22. ***Жестков, С.В.*** О существовании волновых решений двумерных уравнений Фишера с различными типами нелинейности / С.В. Жестков, А.А. Романенко // Доклады НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55. – № 3. – С. 55–58.
23. ***Жестков, С.В.*** Построение точных волновых решений нелинейных параболических уравнений с помощью аналитических функций комплексного аргумента / С.В. Жестков, А.А. Романенко // Весці НАНБ. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. – № 3. – С. 47-53.
24. ***Жестков, С.В.*** Конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных : монография / С.В. Жестков. – Могилев : МГУ им. А.А. Кулешова, 2006.

Поступила в редакцию 14.03.2012 г.