

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

В данной работе исследуется задача о периодических периода ω решениях матричного дифференциального уравнения Ляпунова с ω -периодической по t правой частью. На основе метода регуляризации [1, гл. 2] разработана методика получения эквивалентного интегрального уравнения для исследуемой задачи. Для исследования разрешимости полученного интегрального уравнения применены методы теории интегральных уравнений [2, 3]. Разработан эффективный алгоритм типа [1] построения решения.

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{dX}{dt} = \lambda A(t) X + \lambda X B(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (1)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $F_0(t)$, $F_1(t)$ – непрерывные ω -периодические $(n \times n)$ -матрицы, λ – скалярный вещественный параметр. Примем следующие обозначения:

$$\alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|, \quad h_0 = \max_t \|F_0(t)\|, \quad h_1 = \max_t \|F_1(t)\|, \quad M = \int_0^\omega A(\tau) d\tau, \\ N = - \int_0^\omega B(\tau) d\tau, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad q = \frac{1}{2} \gamma \omega^2 (\alpha + \beta)^2, \quad \|X\|_C = \max_t \|X(t)\|,$$

где $t \in [0, \omega]$, Φ – линейный оператор: $\Phi X = MX - XN$, $\|\cdot\|$ – подходящая норма матриц (например, любая из норм, приведенных в [4, с. 21]), C – банахово пространство непрерывных ω -периодических $(n \times n)$ -матричных функций.

Согласно [4, с. 216] задача об ω -периодических решениях уравнения (1) эквивалентна периодической краевой задаче для (1) с условием

$$X(0, \lambda) = X(\omega, \lambda). \quad (2)$$

Построим матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2).

Пусть $X = X(t, \lambda)$ – решение этой задачи. Тогда из (1) имеем

$$X(t, \lambda) = X(0, \lambda) + \int_0^t (\lambda A(\tau)X(\tau, \lambda) + \lambda X(\tau, \lambda)B(\tau) + F_0(\tau) + \lambda F_1(\tau)) d\tau. \quad (3)$$

Полагая в (3) $t = \omega$, получим на основании условия (2) при $\lambda \neq 0$:

$$\int_0^\omega (A(\tau)X(\tau, \lambda) + X(\tau, \lambda)B(\tau)) d\tau = -\frac{1}{\lambda} \int_0^\omega F_0(\tau) d\tau - \int_0^\omega F_1(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Далее воспользуемся формулой

$$X(\tau, \lambda) = X(t, \lambda) + \int_t^\tau \dot{X}(\sigma, \lambda) d\sigma,$$

где $\dot{X}(\sigma, \lambda) \equiv dX(\sigma, \lambda)/d\sigma$. Используя эту формулу, имеем из (4) в силу (1)

$$\begin{aligned} & \int_0^\omega A(\tau) d\tau X(t, \lambda) + X(t, \lambda) \int_0^\omega B(\tau) d\tau + \int_0^\omega A(\tau) \left(\int_t^\tau (\lambda A(\sigma)X(\sigma, \lambda) + \lambda X(\sigma, \lambda)B(\sigma) + \right. \\ & \left. + F_0(\sigma) + \lambda F_1(\sigma)) d\sigma \right) d\tau + \int_0^\omega \left(\int_t^\tau (\lambda A(\sigma)X(\sigma, \lambda) + \lambda X(\sigma, \lambda)B(\sigma) + F_0(\sigma) + \right. \\ & \left. + \lambda F_1(\sigma)) d\sigma \right) B(\tau) d\tau = -\frac{1}{\lambda} \int_0^\omega F_0(\tau) d\tau - \int_0^\omega F_1(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть матрицы M и N не имеют общих характеристических чисел. Тогда согласно [5, с. 207] оператор Φ обратим и уравнение (5) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} X(t, \lambda) = \Phi^{-1} \left\{ & \int_0^\omega A(\tau) \left(\int_t^\tau (\lambda A(\sigma)X(\sigma, \lambda) + \lambda X(\sigma, \lambda)B(\sigma) + F_0(\sigma) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \lambda F_1(\sigma)) d\sigma \right) d\tau + \int_0^\omega \left(\int_t^\tau (\lambda A(\sigma)X(\sigma, \lambda) + \lambda X(\sigma, \lambda)B(\sigma) + F_0(\sigma) + \lambda F_1(\sigma)) d\sigma \right) B(\tau) d\tau - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\lambda} \int_0^\omega F_0(\tau) d\tau - \int_0^\omega F_1(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, всякое (классическое) решение задачи (1), (2) удовлетворяет матричному интегральному уравнению (6). Покажем обратное: всякое непрерывное решение уравнения (6) является решением задачи (1), (2). Пусть $X = X(t, \lambda)$ – непрерывное решение уравнения (6). Дифференцируя обе части уравнения (6) по переменной t , получим с учетом перестановочности оператора дифференцирования и оператора Φ^{-1}

$$\frac{dX(t, \lambda)}{dt} = \Phi^{-1} \left\{ \int_0^{\omega} A(\tau) d\tau (\lambda A(t) X(t, \lambda) + \lambda X(t, \lambda) B(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t)) + \right. \\ \left. + (\lambda A(t) X(t, \lambda) + \lambda X(t, \lambda) B(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t)) \int_0^{\omega} B(\tau) d\tau \right\},$$

откуда

$$\frac{dX(t, \lambda)}{dt} = \lambda A(t) X(t, \lambda) + \lambda X(t, \lambda) B(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t). \quad (7)$$

Покажем, что данное решение уравнения (6) является ω -периодическим. Из (7) имеем

$$dX(t, \lambda) \equiv [\lambda A(t) X(t, \lambda) + \lambda X(t, \lambda) B(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t)] dt. \quad (8)$$

Выполнив интегрирование по частям в (6) с учетом (8), получим соотношение

$$\int_0^{\omega} [\lambda \dot{A}(t) X(t, \lambda) + \lambda X(t, \lambda) B(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t)] dt = 0;$$

отсюда следует (2).

Таким образом, установлено, что полученное матричное интегральное уравнение (6) в соответствии с [4, с. 216] эквивалентно задаче об ω -периодических решениях дифференциального уравнения (1).

Для исследования разрешимости уравнения (6) воспользуемся методом разложения в ряд по степеням параметра λ [2, 3]. Следуя [1], формальное представление ω -периодического решения будем искать в следующем виде:

$$X(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda} X_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X_k(t). \quad (9)$$

Для определения неизвестных матриц $X_{k-1}(t), k=0, 1, 2, \dots$, подставим (9) в обе части уравнения (6) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ . Тогда получим последовательно

$$X_{-1} = -\Phi^{-1} \int_0^{\omega} F_0(\tau) d\tau,$$

$$X_0(t) = \Phi^{-1} \left\{ \int_0^{\omega} A(\tau) \left(\int_{\tau}^t (A(\sigma) X_{-1} + X_{-1} B(\sigma) + F_0(\sigma)) d\sigma \right) d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^{\omega} \left(\int_{\tau}^t (A(\sigma) X_{-1} + X_{-1} B(\sigma) + F_0(\sigma)) d\sigma \right) B(\tau) d\tau - \int_0^{\omega} F_1(\tau) d\tau \right\},$$

$$X_1(t) = \Phi^{-1} \left\{ \int_0^{\omega} A(\tau) \left(\int_{\tau}^t (A(\sigma) X_0(\sigma) + X_0(\sigma) B(\sigma) + F_1(\sigma)) d\sigma \right) d\tau + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\omega} \left(\int_0^t (A(\sigma)X_0(\sigma) + X_0(\sigma)B(\sigma) + F_1(\sigma))d\sigma \right) B(\tau)d\tau \Bigg\}, \\
X_{k+1}(t) = & \Phi^{-1} \left\{ \int_0^{\omega} A(\tau) \left(\int_0^t (A(\sigma)X_k(\sigma) + X_k(\sigma)B(\sigma))d\sigma \right) d\tau + \right. \\
& \left. + \int_0^{\omega} \left(\int_0^t (A(\sigma)X_k(\sigma) + X_k(\sigma)B(\sigma))d\sigma \right) B(\tau)d\tau \right\}, k=1,2,\dots \quad (10)
\end{aligned}$$

Выполнив оценки по норме в (10), получим следующую рекуррентную формулу:

$$\|X_{k+1}\|_C \leq q \|X_k\|_C, \quad k=1,2,\dots \quad (11)$$

Из (11) имеем явную оценку

$$\|X_{k+1}\|_C \leq q^k \|X_1\|_C, \quad k=1,2,\dots \quad (12)$$

Используя неравенство (12), получим из (9) при $0 < |\lambda| < \frac{1}{q}$:

$$\begin{aligned}
\|X(t, \lambda)\|_C & \leq \frac{1}{\varepsilon} \|X_{-1}\|_C + \|X_0\|_C + \varepsilon \|X_1\|_C + \varepsilon q \|X_1\|_C + \dots + \varepsilon^k q^{k-1} \|X_1\|_C + \dots = \\
& = \frac{1}{\varepsilon} \|X_{-1}\|_C + \|X_0\|_C + \varepsilon \|X_1\|_C \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon q}. \quad (13)
\end{aligned}$$

На основании [4, с. 43] можно заключить, что ряд (9) сходится абсолютно и равномерно относительно $t \in R$ в области $0 < |\lambda| < \frac{1}{q}$.

Согласно [3, с. 160] сумма $X(t, \lambda)$ этого ряда представляет собой решение уравнения (6) в указанной области. Применяя принцип сжимающих отображений [2, с. 605] к уравнению (6), нетрудно доказать, что при выполнении условия $0 < |\lambda|q < 1$ это решение единственно. Таким образом, получена

Теорема. Пусть матрицы M, N не имеют общих характеристических чисел. Тогда в области $0 < |\lambda| < \frac{1}{q}$ ω -периодическое решение уравнения

(1) существует и единственно; оно представимо в виде (9).

Получим оценки, характеризующие скорость сходимости алгоритма (10). Из (9) имеем

$$\begin{aligned}
\|X(t, \lambda) - \tilde{X}_m(t, \lambda)\| & \leq \varepsilon^{m+1} \|X_{m+1}(t)\| + \\
& + \varepsilon^{m+2} \|X_{m+2}(t)\| + \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (14)
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{X}_m(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda} X_{-1} + \sum_{k=0}^m \lambda^k X_k(t).$$

Выполнив оценки по норме в (14), получим

$$\|X(t, \lambda) - \tilde{X}_m(t, \lambda)\|_C \leq \frac{\|X_1\|_C}{1 - \varepsilon q} \varepsilon^{m+1} q^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Поскольку для полученного алгоритма имеют место неравенства

$$\|X_{-1}\|_C \leq \gamma \omega h_0,$$

$$\|X_0\|_C \leq q \|X_{-1}\|_C + \tilde{q} h_0 + \gamma \omega h_1 \leq q \cdot \gamma \omega h_0 + \tilde{q} h_0 + \gamma \omega h_1,$$

$$\|X_1\|_C \leq q \|X_0\|_C + \tilde{q} h_1 \leq (h_1 + q h_0)(\tilde{q} + q \gamma \omega),$$

где $\tilde{q} = \frac{\gamma \omega^2}{2}(\alpha + \beta)$, то оценки (13), (15) нетрудно привести к коэффициентному виду:

$$\|X(t, \lambda)\|_C \leq \frac{(h_0 + \varepsilon h_1)(\gamma \omega + \varepsilon \tilde{q})}{\varepsilon(1 - \varepsilon q)} = \frac{\gamma \omega(h_0 + \varepsilon h_1) [2 + \varepsilon \omega(\alpha + \beta)]}{2\varepsilon(1 - \varepsilon q)},$$

$$\|X(t, \lambda) - \tilde{X}_m(t, \lambda)\|_C \leq \frac{(h_1 + q h_0)(\tilde{q} + q \gamma \omega)}{1 - \varepsilon q} \varepsilon^{m+1} q^m =$$

$$= \frac{\varepsilon \gamma (\alpha + \beta) \omega^2 [\gamma \omega (\alpha + \beta) + 1] \cdot [\gamma (\alpha + \beta)^2 \omega^2 h_0 + 2 h_1]}{4(1 - \varepsilon q)} \cdot (\varepsilon q)^m.$$

Таким образом, на основе подхода [1] получено аналитическое представление ω -периодического решения уравнения (1) с удобным для применения алгоритмом (10) и эффективно проверяемыми условиями сходимости и скорости сходимости.

Затруднения могут возникнуть при получении оператора, обратного к Φ . Однако при дополнительных предположениях о характеристических числах матриц M и N , для Φ^{-1} имеют место явные аналитические представления [5, 6].

Полученные результаты проиллюстрируем на следующем примере, полагая

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2\cos t \\ \sin t & 1 \end{pmatrix}; \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3\sin t \\ \cos t & 1 \end{pmatrix}; \quad F_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & \sin 2t \\ \cos 2t & -1 \end{pmatrix};$$

$$F_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}; \quad \omega = 2\pi.$$

Поскольку $M = 2\pi E$, $N = -2\pi E$, то $\hat{O} = 4\pi E$, где E – единичная (2×2) -матрица. В качестве нормы матриц примем евклидову норму. Тогда

$$\gamma = \frac{\sqrt{2}}{4\pi}, \quad \alpha = \sqrt{6}, \quad \beta = \sqrt{11}, \quad h_0 = \sqrt{3}, \quad h_1 = \sqrt{2},$$

при этом

$$q = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(17 + 2\sqrt{66}). \quad (16)$$

Согласно доказанной теореме 2π -периодическое решение данного уравнения существует и единственно в проколотой окрестности

$$0 < |\lambda| < \frac{\sqrt{2}}{\pi(17 + 2\sqrt{66})}.$$

Построим приближенное решение

$$\tilde{X}_1(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda} X_{-1} + X_0(t) + \lambda X_1(t), \quad (17)$$

используя разработанный алгоритм. Применительно к рассматриваемому уравнению имеем

$$X_{-1} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} F_0(\tau) d\tau, \quad (18)$$

$$X_0(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ A(\tau) \int_{\tau}^t \left[A(\sigma) X_{-1} + X_{-1} B(\sigma) + F_0(\sigma) \right] d\sigma + \right. \\ \left. \int_{\tau}^t \left[A(\sigma) X_{-1} + X_{-1} B(\sigma) + F_0(\sigma) \right] d\sigma B(\tau) - F_1(\tau) \right\} d\tau, \quad (19)$$

$$X_1(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ A(\tau) \int_{\tau}^t \left[A(\sigma) X_0(\sigma) + X_0(\sigma) B(\sigma) + F_1(\sigma) \right] d\sigma + \right. \\ \left. + \int_{\tau}^t \left[A(\sigma) X_0(\sigma) + X_0(\sigma) B(\sigma) + F_1(\sigma) \right] d\sigma B(\tau) \right\} d\tau. \quad (20)$$

Выполнив в (18) – (20) требуемые вычисления, получим соответственно

$$X_{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & \frac{1}{2}(2\sin t + 3\cos t - \cos 2t) \\ \frac{1}{2}(\cos t + \sin t + \sin 2t) & -\frac{5}{8} \end{pmatrix},$$

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sin^3 t - \frac{2}{3}\cos^3 t + \sin^2 t + \frac{5}{8}\sin 2t + \frac{1}{2}\sin t - \frac{17}{32} & \\ \frac{5}{8}\cos t + \frac{3}{8}\sin t - \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{8} & \\ \frac{7}{4}\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{9}{8}\cos t - \frac{7}{16} & \\ \sin^3 t + \frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{3}{2}\sin^2 t - \frac{5}{8}\sin 2t - \frac{1}{2}\cos t + \sin t - \frac{47}{32} & \end{pmatrix}.$$

Подставив в (17) результаты вычислений, получим

$$\tilde{X}_1(t, \lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\lambda} - \frac{5}{8} + \lambda(\frac{1}{3}\sin^3 t - \frac{2}{3}\cos^3 t + \sin^2 t + \frac{5}{8}\sin 2t + \frac{1}{2}\sin t - \frac{17}{32}) & \\ \frac{1}{2}(\cos t + \sin t + \sin 2t) + \lambda(\frac{5}{8}\cos t + \frac{3}{8}\sin t - \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{8}) & \\ \frac{1}{2}(2\sin t + 3\cos t - \cos 2t) + \lambda(\frac{7}{4}\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{9}{8}\cos t - \frac{7}{16}) & \\ \frac{1}{2\lambda} - \frac{5}{8} + \lambda(\sin^3 t + \frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{3}{2}\sin^2 t - \frac{5}{8}\sin 2t - \frac{1}{2}\cos t + \sin t - \frac{47}{32}) & \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Воспользовавшись (15), найдем оценку для $\|X(t, \lambda) - \tilde{X}_1(t, \lambda)\|$.

Поскольку $\|X_1\|_C = \sqrt{16,06444...} \approx 4,008$,

то

$$\|X(t, \lambda) - \tilde{X}_1(t, \lambda)\| < \frac{\varepsilon^2 q \cdot 4,008}{1 - \varepsilon q}, \quad (22)$$

где q дается соотношением (16). Из (22) видно, что при достаточно малых значениях λ , формула (21) имеет высокую точность.

Найдем оценку для $\|X(t, \lambda)\|$ на основе соотношения

$$\|X(t, \lambda)\| \leq \frac{\gamma \omega(\sqrt{3} + \varepsilon\sqrt{2}) [2 + \varepsilon \omega(\sqrt{6} + \sqrt{11})]}{2\varepsilon(1 - \varepsilon q)}. \quad (23)$$

Используя полученные выше конкретные значения величин, входящих в (23), имеем

$$\|X(t, \lambda)\| < \frac{(\sqrt{3} + \varepsilon\sqrt{2}) [1 + \varepsilon \pi(\sqrt{6} + \sqrt{11})]}{\varepsilon [\sqrt{2} - \varepsilon \pi(\sqrt{17} + 2\sqrt{66})]}.$$

Из структуры алгоритма (10) видно, что построение приближенных решений задачи (1), (2) связано с простыми вычислительными процедурами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Лаптинский, В.Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В.Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
2. **Канторович, Л.В.** Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 744 с.
3. **Рисс, Ф.** Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. – М. : ИЛ, 1954. – 499 с.
4. **Демидович, Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1967 – 472 с.
5. **Гантмахер, Ф.Р.** Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 576 с.
6. **Абдикасова, П.А.** Построение интегрального многообразия системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами в банаховом пространстве / П.А. Абдикасова, К.Г. Валеев // Республиканский межведомственный сборник "Математическая физика". – Киев : Наукова думка, 1976. – Вып. 19. – С. 3–10.

Поступила в редакцию 13.10.2011 г.