

УДК 514.75

В.Г. ИВАНОВ

ДИАДА В ПРОСТРАНСТВЕ 1V_4

При описании систем отсчета в теории гравитации широко используются различные формализмы (методы), связанные с соответствующими расщеплениями пространственно-временного многообразия [1, 2]. Его диадное $1+1+2$ -

расщепление равносильно также рассмотрению в пространстве-времени ортонормированной пары векторных полей или, иначе, диады. В настоящей работе методом Г.Ф. Лаптева [3 – 5] строится геометрия диады в пространстве 1V_4 .

1. Основные понятия и уравнения

Структурные уравнения пространства 1V_4 имеют вид $(i, j, \dots \in \overline{1,4})$:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad D\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j + R_{i\ k\ l}^j \omega^k \wedge \omega^l, \quad (1.1)$$

где $R_{i\ k\ l}^j$ – тензор кривизны пространства (тензор кручения $T_i^j \equiv 0$). 1-формы ω^i и ω_i^j определяют главные линейные части отображения соседнего локального пространства ${}^1R_4(u+du)$ точки $A(u+du)$ на исходное ${}^1R_4(u)$ [3].

При этом $\Delta g_{ij} \equiv dg_{ij} - g_{kj} \omega_i^k - g_{ik} \omega_j^k = 0$, где $g_{ij} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j$ и $(A, \bar{e}_i)$ – репер локального касательного пространства ${}^1R_4(A)$ точки $A \in {}^1V_4$. В случае ортонормированного подвижного репера с метрическими матрицами

$$\|g_{ij}\| = \|g^{ij}\| = \text{diag} \|\varepsilon_i\| \quad (\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = 1) \quad (1.2)$$

получаем

$$\omega_i^i = 0 \text{ (не суммировать!)}, \quad \varepsilon_i \omega_i^j + \varepsilon_j \omega_j^i = 0 \quad (i \neq j). \quad (1.3)$$

Уравнения

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j \quad (1.4)$$

задают инфинитезимальные смещения репера $(A, \bar{e}_i)$ локального касательного пространства ${}^1R_4(A)$ (вдоль кривых пространства 1V_4).

Диадой пространства 1V_4 называется ортонормированная пара векторных полей $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ пространства. Возможны следующие случаи:

- 1) $\bar{u}^2 = \bar{v}^2 = 1, \quad \bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \quad ((++) - \text{диада});$
- 2) $\bar{u}^2 = 1, \quad \bar{v}^2 = -1, \quad \bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \quad ((+ -) - \text{диада}).$

Проведем частичную канонизацию подвижного репера, совместив его начало с точкой M , а базисные векторы $\bar{e}_{a_1}$ и $\bar{e}_{a_2}$ ($1 \leq a_1, a_2 \leq 4$; $a_1 \neq a_2$) – с составляющими $\bar{u}$ и $\bar{v}$ элемента диады $(M, \bar{u}, \bar{v})$ (реперы нулевого порядка). Пусть также индексы $\alpha, \beta, \dots \in \overline{1,4} \setminus \{a_1, a_2\}$. В случае 1 можно, например, положить $a_1=1, a_2=2$, в случае 2 – $a_1=3, a_2=4$.

Теорема 1.1. Дифференциальные уравнения диады $\{\bar{u}, \bar{v}\} \equiv \{\bar{e}_{a_1}, \bar{e}_{a_2}\}$ пространства 1V_4 имеют в репере нулевого порядка следующий вид:

$$\omega_{\alpha}^{a_1} = \Lambda_{\alpha}^{a_1}{}_i \omega^i, \quad \omega_{\alpha}^{a_2} = \Lambda_{\alpha}^{a_2}{}_i \omega^i, \quad \omega_{a_2}^{a_1} = \Lambda_{a_2}^{a_1}{}_i \omega^i \quad (1.5)$$

(или $\omega_{a_1}^{\alpha} = \Lambda_{a_1}^{\alpha}{}_i \omega^i, \quad \omega_{a_2}^{\alpha} = \Lambda_{a_2}^{\alpha}{}_i \omega^i, \quad \omega_{a_1}^{a_2} = \Lambda_{a_1}^{a_2}{}_i \omega^i$);

$$\begin{aligned} & \left(d\Lambda_{\alpha}^{a_1}{}_i - \Lambda_{\beta}^{a_1}{}_i \omega_{\alpha}^{\beta} - \Lambda_{\alpha}^{a_1}{}_j \omega_i^j + \left(R_{\alpha}^{a_1}{}_{ij} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \Lambda_{a_2}^{a_1}{}_i \Lambda_{\alpha}^{a_2}{}_j \right) \omega^j \right) \wedge \omega^i = 0, \\ & \left(d\Lambda_{\alpha}^{a_2}{}_i - \Lambda_{\beta}^{a_2}{}_i \omega_{\alpha}^{\beta} - \Lambda_{\alpha}^{a_2}{}_j \omega_i^j + \left(R_{\alpha}^{a_2}{}_{ij} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \Lambda_{a_1}^{a_2}{}_i \Lambda_{\alpha}^{a_1}{}_j \right) \omega^j \right) \wedge \omega^i = 0, \\ & \left(d\Lambda_{a_2}^{a_1}{}_i - \Lambda_{a_2}^{a_1}{}_j \omega_i^j + \left(R_{a_2}^{a_1}{}_{ij} - \Lambda_{\alpha}^{a_1}{}_i \Lambda_{a_2}^{\alpha}{}_j \right) \omega^j \right) \wedge \omega^i = 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\Lambda_{ij}^i = 0 \text{ (не суммировать)}, \quad \varepsilon_i \Lambda_i^j{}_k + \varepsilon_j \Lambda_j^i{}_k = 0 \quad (i \neq j). \quad (1.7)$$

Доказательство. Фиксация элемента $(M, \bar{u}, \bar{v})$ диады, в силу уравнений (1.3) и (1.4), обеспечивается равенствами

$$\begin{aligned} \omega^i &= \omega_{a_1}^{\alpha} \left(\equiv -\varepsilon_{a_1} \varepsilon_{\alpha} \omega_{\alpha}^{a_1} \right) = \omega_{a_2}^{\alpha} \left(\equiv -\varepsilon_{a_2} \varepsilon_{\alpha} \omega_{\alpha}^{a_2} \right) = \\ &= \omega_{a_1}^{a_2} \left(\equiv -\varepsilon_{a_1} \varepsilon_{a_2} \omega_{a_2}^{a_1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Следовательно, формы (1.8) являются для рассматриваемого геометрического образа главными. Принимая в качестве базисных формы ω^i , получим уравнения (1.5), а также равенства (1.7). Проводя последующее замыкание с учетом уравнений структуры (1.1), придем к квадратичным уравнениям (1.6).

Теорема доказана.

Теорема 1.2. Система величин

$$\left\{ \Lambda_{\alpha}^{a_1 i}, \Lambda_{\alpha}^{a_2 i}, \Lambda_{a_2}^{a_1 i} \right\} \quad \left(\text{или} \left\{ \Lambda_{a_1}^{\alpha i}, \Lambda_{a_2}^{\alpha i}, \Lambda_{a_2}^{a_1 i} \right\} \right) \quad (1.9)$$

образует геометрический объект – фундаментальный объект первого порядка диады $\{\bar{e}_{a_1}, \bar{e}_{a_2}\}$ пространства 1V_4 . Это тензор [3], из которого выделяются подтензоры:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha}^{a_1 \beta}, \quad \Lambda_{\alpha}^{a_1 a_1}, \quad \Lambda_{\alpha}^{a_1 a_2}, \quad \Lambda_{\alpha}^{a_2 \beta}, \quad \Lambda_{\alpha}^{a_2 a_1}, \quad \Lambda_{\alpha}^{a_2 a_2}, \\ \Lambda_{a_2}^{a_1 \alpha}, \quad \Lambda_{a_2}^{a_1 a_1}, \quad \Lambda_{a_2}^{a_1 a_2}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Доказательство. Символ дифференцирования по вторичным параметрам при фиксированных первичных параметрах обозначим через δ . При учете леммы Картана из уравнений (1.5), (1.6) и (1.8) получим (при $\pi_{\alpha}^{\beta} \equiv \omega_{\alpha}^{\beta}(\delta)$)

$$\begin{aligned} \delta \Lambda_{\alpha}^{a_1 \beta} - \Lambda_{\gamma}^{a_1 \beta} \pi_{\alpha}^{\gamma} - \Lambda_{\alpha}^{a_1 \gamma} \pi_{\beta}^{\gamma} &= \delta \Lambda_{\alpha}^{a_1} - \Lambda_{\beta}^{a_1} \pi_{\alpha}^{\beta} = \\ &= \delta \Lambda_{\alpha}^{a_1} - \Lambda_{\beta}^{a_1} \pi_{\alpha}^{\beta} = \delta \Lambda_{\alpha}^{a_2 \beta} - \Lambda_{\gamma}^{a_2 \beta} \pi_{\alpha}^{\gamma} - \Lambda_{\alpha}^{a_2 \gamma} \pi_{\beta}^{\gamma} = \\ &= \delta \Lambda_{\alpha}^{a_2 \beta} - \Lambda_{\beta}^{a_2} \pi_{\alpha}^{\beta} = \delta \Lambda_{\alpha}^{a_2} - \Lambda_{\beta}^{a_2} \pi_{\alpha}^{\beta} = \delta \Lambda_{a_2}^{a_1} - \\ &\quad - \Lambda_{a_2}^{a_1} \pi_{\alpha}^{\beta} = \delta \Lambda_{a_2}^{a_1} = \delta \Lambda_{a_2}^{a_1} = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что система уравнений (1.11) вполне интегрируема. Это окончательно доказывает теорему.

Произвольную кривую пространства 1V_4 можно задать уравнениями [4]

$$\omega^i = \lambda^i \Theta, \quad \text{где} \quad D\Theta = \Theta \wedge \Theta_1. \quad (1.12)$$

Кривые (1.12), удовлетворяющие уравнениям (1.5) и (1.6), называются *линиями, присоединенными к диаде* $\{\bar{e}_{a_1}, \bar{e}_{a_2}\}$ пространства 1V_4 .

Теорема 1.3. Система величин $\{\lambda^i\}$ образует относительный тензор [5] линий, присоединенных к диаде $\{\bar{e}_{a_1}, \bar{e}_{a_2}\}$, из которого выделяются подтензоры λ^{a_1} , λ^{a_2} и λ^α .

Доказательство теоремы следует из равенств (при $\pi_1 \equiv \Theta_1(\delta)$):

$$\delta \lambda^{a_1} - \lambda^{a_1} \pi_1 = \delta \lambda^{a_2} - \lambda^{a_2} \pi_1 = \delta \lambda^\alpha - \lambda^\alpha \pi_1 + \lambda^\beta \pi_\beta^\alpha = 0 \quad (1.13)$$

(см. (1.1), (1.5), (1.8) и (1.12)).

Касательным вектором кривой (1.12) является касательный вектор развертки этой линии на локальное касательное пространство ${}^1R_4(M)$ [6]. Он имеет вид

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{M}}{\Theta} = \lambda^i \bar{e}_i = \lambda^{a_1} \bar{e}_{a_1} + \lambda^{a_2} \bar{e}_{a_2} + \lambda^\alpha \bar{e}_\alpha. \quad (1.14)$$

Теорема 1.3 и равенства (1.14) позволяют выделить следующие инвариантно связанные с диадой кривые:

$$\lambda^{a_1} \neq 0, \quad \lambda^{a_2} = \lambda^\alpha = 0 \quad (\bar{e}_{a_1} - \text{линии тока}); \quad (1.15)$$

$$\lambda^{a_2} \neq 0, \quad \lambda^{a_1} = \lambda^\alpha = 0 \quad (\bar{e}_{a_2} - \text{линии тока}); \quad (1.16)$$

$$\lambda^{a_1} = \lambda^{a_2} = 0, \quad (\lambda^\alpha) \neq 0 \quad (\text{ортогональные траектории диады}). \quad (1.17)$$

2. Частные классы диад

2.1. Диада $\{\bar{e}_{a_1}, \bar{e}_{a_2}\}$ пространства 1V_4 называется $\bar{e}_{a_1}$ - ($\bar{e}_{a_2}$ -) нормальной, если нормальным является векторное поле $\{\bar{e}_{a_1}\}$ (поле $\{\bar{e}_{a_2}\}$) пространства. Векторное поле псевдориманова пространства будет нормальным, если оно допускает семейство ортогональных гиперповерхностей [7]. Аналогично, саму диаду $\{\bar{e}_{a_1}, \bar{e}_{a_2}\}$ пространства 1V_4 будем называть нормальной, если она допускает семейство ортогональных 2-поверхностей.

Теорема 2.1. Признаки диады $\{\bar{e}_{a_1}, \bar{e}_{a_2}\}$ пространства 1V_4 имеют вид: $\bar{e}_{a_1}$ - ($\bar{e}_{a_2}$ -) нормальной –

$$\Lambda_{[\alpha \beta]}^{a_1} = 0, \quad \Lambda_{\alpha a_2}^{a_1} = \Lambda_{a_2 \alpha}^{a_1} \quad \left(\Lambda_{[\alpha \beta]}^{a_2} = 0, \quad \Lambda_{\alpha a_1}^{a_2} = \Lambda_{a_1 \alpha}^{a_2} \right); \quad (2.1)$$

нормальной –

$$\Lambda_{[\alpha \beta]}^{a_1} = \Lambda_{[\alpha \beta]}^{a_2} = 0. \quad (2.2)$$

Доказательство. В первом случае достаточно убедиться в полной интегрируемости пфафова уравнения $\omega^{a_1} = 0$ (уравнения $\omega^{a_2} = 0$). В случае векторного поля $\{\bar{e}_{a_1}\}$, например, получим

$$D\omega^{a_1} \wedge \omega^{a_1} \equiv \left(\Lambda_{a_2}^{a_1}{}_{\alpha} - \Lambda_{\alpha}^{a_1}{}_{a_2} \right) \omega^{\alpha} \wedge \omega^{a_1} \wedge \omega^{a_2} + \\ + \Lambda_{\alpha}^{a_1}{}_{\beta} \omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \wedge \omega^{a_1} = 0, \quad \Lambda_{[\alpha}^{a_1}{}_{\beta]} = 0, \quad \Lambda_{a_2}^{a_1}{}_{\alpha} - \Lambda_{\alpha}^{a_1}{}_{a_2} = 0$$

(см. (1.1) и (1.5)).

В последнем случае приходим к условиям полной интегрируемости системы уравнений $\omega^{a_1} = \omega^{a_2} = 0$ (см. (1.12), (1.15) и (1.16)). Имеем

$$D\omega^{a_1} \wedge \omega^{a_1} \wedge \omega^{a_2} \equiv \Lambda_{\alpha}^{a_1}{}_{\beta} \omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \wedge \omega^{a_1} \wedge \omega^{a_2} = 0, \quad \Lambda_{[\alpha}^{a_1}{}_{\beta]} = 0;$$

$$D\omega^{a_2} \wedge \omega^{a_1} \wedge \omega^{a_2} \equiv \Lambda_{\alpha}^{a_2}{}_{\beta} \omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \wedge \omega^{a_1} \wedge \omega^{a_2} = 0, \quad \Lambda_{[\alpha}^{a_2}{}_{\beta]} = 0.$$

Теорема доказана.

2.2. Диада $\{\bar{e}_{a_1}, \bar{e}_{a_2}\}$ пространства 1V_4 называется $\bar{e}_{a_1}$ - ($\bar{e}_{a_2}$ -) *геодезической*, если геодезическим является векторное поле $\{\bar{e}_{a_1}\}$ (поле $\{\bar{e}_{a_2}\}$) пространства. Векторное поле псевдориманова пространства будет геодезическим, если геодезическими являются его линии тока [7]. Диаду $\{\bar{e}_{a_1}, \bar{e}_{a_2}\}$ пространства 1V_4 будем называть *геодезической*, если геодезическими являются обе ее составляющих – векторные поля $\{\bar{e}_{a_1}\}$ и $\{\bar{e}_{a_2}\}$.

Теорема 2.2. Признаки диады $\{\bar{e}_{a_1}, \bar{e}_{a_2}\}$ пространства 1V_4 имеют вид: $\bar{e}_{a_1}$ - ($\bar{e}_{a_2}$ -) *геодезической* –

$$\Lambda_{\alpha}^{a_1}{}_{a_1} = \Lambda_{a_2}^{a_1}{}_{a_1} = 0 \quad \left(\Lambda_{\alpha}^{a_2}{}_{a_2} = \Lambda_{a_1}^{a_2}{}_{a_2} = 0 \right); \quad (2.3)$$

геодезической – одновременное выполнение условий (2.3).

Доказательство. В случае $\bar{e}_{a_1}$ -линий тока диады дифференциал касательного вектора $\bar{\tau} = \lambda^{a_1} \bar{e}_{a_1}$ –

$$d\bar{\tau} = d\lambda^{a_1} \cdot \bar{e}_{a_1} + \left(\Lambda_{a_1}^{a_2}{}_{a_1} \cdot \bar{e}_{a_2} + \Lambda_{a_1}^{\alpha}{}_{a_1} \cdot \bar{e}_{\alpha} \right) \cdot \lambda^{a_1} \Theta -$$

будет параллельным вектору $\bar{\tau}$ [8] при условиях:

$$\Lambda_{a_1}^{a_2}{}_{a_1} \left(\equiv -\varepsilon_{a_1} \varepsilon_{a_2} \Lambda_{a_2}^{a_1}{}_{a_1} \right) = 0, \quad \Lambda_{a_1}^{\alpha}{}_{a_1} \left(\equiv -\frac{\varepsilon_{a_1}}{\varepsilon_{\alpha}} \Lambda_{\alpha}^{a_1}{}_{a_1} \right) = 0.$$

Аналогично рассматривается случай поля $\{\bar{e}_{a_2}\}$. Теорема доказана.

2.3. Для произвольной гладкой функции f имеем $df = f_i \omega^i$. Поэтому

$$(-1)^{4-i}(\omega^1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega^i} \wedge \dots \wedge \omega^4 \wedge df) = f_i(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4)$$

(символ $\hat{i}$ означает, что индекс i пропущен) и, следовательно,

$$f_i = (-1)^{4-i}(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4)^{-1} \cdot (\omega^1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega^i} \wedge \dots \wedge \omega^4 \wedge df).$$

С другой стороны, вектор градиента функции f $\text{grad } f = f_i \bar{e}^i = \nabla f$, где $\bar{e}^i \equiv g^{ij} \bar{e}_j$, а ∇ – обобщенный дифференциальный оператор, заданный относительно подвижного репера $(M, \bar{e}_i)$ пространства ${}^1R_4(M)$.

Сравнивая полученные выражения, приходим к формуле

$$\begin{aligned} \nabla &= \left(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 \right)^{-1} \times \\ &\times \sum_i (-1)^{4-i} \bar{e}^i \left(\omega^1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega^i} \wedge \dots \wedge \omega^4 \wedge d \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Дивергенцию и ротор векторного поля $\{\bar{v}\}$ пространства 1V_4 определим равенствами $\text{div } \bar{v} = \nabla \cdot \bar{v}$, $\text{rot } \bar{v} = \nabla \wedge \bar{v}$, где ∇ – оператор (2.4).

В силу уравнений (1.2), (1.4) и (1.7) получим

$$\begin{aligned} \text{div } \bar{e}_{a_1} &= \Lambda_{a_1 a_2}^{a_2} + \Lambda_{a_1}^{\alpha} \alpha = -\varepsilon_{a_1} \left(\varepsilon_{a_2} \Lambda_{a_2 a_2}^{a_1} + g^{\alpha\beta} \Lambda_{(\alpha\beta)}^{a_1} \right), \\ \text{rot } \bar{e}_{a_1} &\equiv \Lambda_{a_1 j}^i \bar{e}^j \wedge \bar{e}_i = \Lambda_{a_1 a_1}^{a_2} \bar{e}^{a_1} \wedge \bar{e}_{a_2} + \Lambda_{a_1}^{a_2} \alpha \bar{e}^\alpha \wedge \bar{e}_{a_2} + \\ &+ \Lambda_{a_1 a_1}^{\alpha} \bar{e}^{a_1} \wedge \bar{e}_\alpha + \Lambda_{a_1 a_2}^{\alpha} \bar{e}^{a_2} \wedge \bar{e}_\alpha + \Lambda_{a_1}^{\alpha\beta} \bar{e}^\beta \wedge \bar{e}_\alpha = \\ &= \varepsilon_{a_1} \left(\Lambda_{a_2 a_1}^{a_1} \bar{e}^{a_2} \wedge \bar{e}^{a_1} + \Lambda_{\alpha}^{a_1} \bar{e}^\alpha \wedge \bar{e}^{a_1} + \right. \\ &\left. + \left(\Lambda_{\alpha a_2}^{a_1} - \Lambda_{a_2}^{a_1} \alpha \right) \bar{e}^\alpha \wedge \bar{e}^{a_2} + \Lambda_{\alpha}^{a_1} \bar{e}^\alpha \wedge \bar{e}^\beta \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

(в случае поля $\{\bar{e}_{a_2}\}$ в (2.5) достаточно выполнить подстановку индексов $a_1 \leftrightarrow a_2$).

Здесь и далее: $g_{\alpha\beta}$ – метрический тензор подпространства $[M, \bar{e}_\alpha] \subset {}^1R_4(M)$, имеющий матрицу компонент (см. (1.2))

$$\|g_{\alpha\beta}\| = \|g^{\alpha\beta}\| = \text{diag} \|\varepsilon_\alpha\| \quad (\text{при } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = 1). \quad (2.6)$$

Диада $\{\bar{e}_{a_1}, \bar{e}_{a_2}\}$ пространства 1V_4 называется $\bar{e}_{a_1}$ - ($\bar{e}_{a_2}$ -) *соленоидальной*, если соленоидальным является векторное поле $\{\bar{e}_{a_1}\}$ (поле $\{\bar{e}_{a_2}\}$) пространства, т.е. если $\text{div } \bar{e}_{a_1} = 0$ ($\text{div } \bar{e}_{a_2} = 0$). Аналогично диада $\{\bar{e}_{a_1}, \bar{e}_{a_2}\}$ будет $\bar{e}_{a_1}$ - ($\bar{e}_{a_2}$ -) *потенциальной*, если потенциальным окажется векторное поле $\{\bar{e}_{a_1}\}$ (поле $\{\bar{e}_{a_2}\}$) пространства, т.е. если $\text{rot } \bar{e}_{a_1} = 0$ ($\text{rot } \bar{e}_{a_2} = 0$) [9]. Диаду $\{\bar{e}_{a_1}, \bar{e}_{a_2}\}$ назовем *соленоидальной* (*потенциальной*), если соленоидальными (соответственно, потенциальными) окажутся обе составляющие диады – $\{\bar{e}_{a_1}\}$ и $\{\bar{e}_{a_2}\}$.

Очевидна

Теорема 2.3. Признаки диады $\{\bar{e}_{a_1}, \bar{e}_{a_2}\}$ пространства 1V_4 имеют вид: $\bar{e}_{a_1}$ - ($\bar{e}_{a_2}$ -) *соленоидальной* –

$$\begin{aligned} \Lambda_{a_1 a_2}^{a_2} + \Lambda_{a_1}^{\alpha} \alpha &\equiv -\varepsilon_{a_1} \left(\varepsilon_{a_2} \Lambda_{a_2 a_2}^{a_1} + g^{\alpha\beta} \Lambda_{(\alpha}^{a_1} \beta) \right) = 0 \\ \left(\Lambda_{a_2 a_1}^{a_1} + \Lambda_{a_2}^{\alpha} \alpha &\equiv -\varepsilon_{a_2} \left(\varepsilon_{a_1} \Lambda_{a_1 a_1}^{a_2} + g^{\alpha\beta} \Lambda_{(\alpha}^{a_2} \beta) \right) = 0 \right); \end{aligned} \quad (2.7)$$

$\bar{e}_{a_1}$ - ($\bar{e}_{a_2}$ -) *потенциальной* – (2.1), (2.3); *соленоидальной* – одновременное выполнение условий (2.7); *потенциальной* – одновременное выполнение всех условий (2.1), (2.3).

3. Геометрия кривых, инвариантно связанных с диадой

3.1. Дифференциал касательного вектора $\bar{\tau} = \lambda^\alpha \bar{e}_\alpha$ линии (1.17) имеет вид

$$d\bar{\tau} = \left(\Lambda_{(\alpha}^{a_1} \beta) \bar{e}_{a_1} + \Lambda_{(\alpha}^{a_2} \beta) \bar{e}_{a_2} \right) \lambda^\alpha \lambda^\beta \Theta + \left(d\lambda^\alpha + \lambda^\beta \omega_\beta^\alpha \right) \bar{e}_\alpha$$

(см. (1.5) и (1.12)). Это позволяет определить *соприкасающуюся 2-плоскость кривой* $\Pi_2(M) = [M, \bar{\tau}, d\bar{\tau}]$.

Ортогональную траекторию диады $\{\bar{e}_{a_1}, \bar{e}_{a_2}\}$ пространства 1V_4 назовем *геодезической линией*, если ее соприкасающаяся 2-плоскость $\Pi_2(M)$

проходит через направление, компланарное векторам диады $\bar{e}_{a_1}$ и $\bar{e}_{a_2}$, т.е. если вектор $d\bar{\tau} \big|_{[M, \bar{e}_\alpha]} \parallel \bar{\tau}$, и геодезической линией (в абсолютном смысле), если вектор $d\bar{\tau} \parallel \bar{\tau}$. Линию (1.17) будем называть $\bar{e}_{a_1}$ - ($\bar{e}_{a_2}$ -) асимптотической, если плоскость $\Pi_2(M)$ перпендикулярна вектору $\bar{e}_{a_1}$ (вектору $\bar{e}_{a_2}$) [7, 8].

Справедлива

Теорема 3.1. Признаки ортогональных траекторий диады $\{\bar{e}_{a_1}, \bar{e}_{a_2}\}$ пространства 1V_4 имеют вид: $\bar{e}_{a_1}$ - ($\bar{e}_{a_2}$ -) асимптотических –

$$\Lambda_{(\alpha}^{a_1}{}_{\beta)} \lambda^\alpha \lambda^\beta = 0 \quad \left(\Lambda_{(\alpha}^{a_2}{}_{\beta)} \lambda^\alpha \lambda^\beta = 0 \right); \quad (3.1)$$

геодезических – пропорциональность

$$\left(d\lambda^\alpha + \lambda^\beta \omega_\beta^\alpha \right) :: \left(\lambda^\alpha \right); \quad (3.2)$$

геодезических (в абсолютном смысле) – (3.1), (3.2).

Орт линии (1.17) имеет вид

$$\bar{\tau}_0 \big|_{(1.17)} = \frac{\lambda^\alpha}{\Lambda'} \bar{e}_\alpha \left(ds \big|_{(1.17)} = \Lambda' \cdot \Theta \equiv \sqrt{\left| \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \lambda^{\alpha^2} \right|} \cdot \Theta \right);$$

вектор первой кривизны

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 \equiv \frac{d\bar{\tau}_0}{ds} \big|_{(1.17)} &= \Lambda_{(\alpha}^{a_1}{}_{\beta)} \lambda^\alpha \lambda^\beta \cdot \frac{\bar{e}_{a_1}}{\Lambda'^2} + \\ &+ \Lambda_{(\alpha}^{a_2}{}_{\beta)} \lambda^\alpha \lambda^\beta \cdot \frac{\bar{e}_{a_2}}{\Lambda'^2} + \left(d \left(\frac{\lambda^\alpha}{\Lambda'} \right) + \left(\frac{\lambda^\beta}{\Lambda'} \right) \omega_\beta^\alpha \right) \cdot \frac{\bar{e}_\alpha}{\Lambda' \Theta}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Векторы $(\dots) \cdot \bar{e}_{a_1}$, $(\dots) \cdot \bar{e}_{a_2}$, $(\dots) \cdot \bar{e}_\alpha$ из (3.3) назовем соответственно векторами $\bar{e}_{a_1}$ -, $\bar{e}_{a_2}$ - нормальной кривизны и вектором геодезической кривизны ортогональных траекторий диады. Саму ортогональную траекторию будем считать геодезической линией (в абсолютном смысле) – если обращается в нуль вектор (3.3), просто геодезической линией, $\bar{e}_{a_1}$ - ($\bar{e}_{a_2}$ -) асимптотической кривой – если становятся нулевыми векторы геодезической кривизны, соответственно векторы $\bar{e}_{a_1}$ - ($\bar{e}_{a_2}$ -) нормальной кривизны кривой [6].

Теорема 3.2. Признаки ортогональных траекторий диады $\{\bar{e}_{a_1}, \bar{e}_{a_2}\}$ пространства 1V_4 имеют вид: $\bar{e}_{a_1}$ - ($\bar{e}_{a_2}$ -) асимптотических – (3.1); геодезических –

$$d \left(\frac{\lambda^\alpha}{\Lambda'} \right) + \left(\frac{\lambda^\beta}{\Lambda'} \right) \omega_\beta^\alpha = 0; \quad (3.4)$$

геодезических (в абсолютном смысле) – (3.1), (3.4).

Оба подхода (теоремы 3.1 и 3.2) равносильны между собой. В самом деле,

$$d \left(\frac{\lambda^\alpha}{\Lambda'} \right) + \left(\frac{\lambda^\beta}{\Lambda'} \right) \omega_\beta^\alpha = \frac{1}{\Lambda'} \cdot \left(d \lambda^\alpha + \lambda^\beta \omega_\beta^\alpha - \lambda^\alpha \cdot \frac{g_{\mu\nu} \lambda^\mu d \lambda^\nu}{g_{\mu\nu} \lambda^\mu \lambda^\nu} \right). \quad (3.5)$$

Если выполняется условие (3.2), т.е. $d \lambda^\alpha + \lambda^\beta \omega_\beta^\alpha = x \cdot \lambda^\alpha$, то коэффициент $x = g_{\mu\nu} \lambda^\mu d \lambda^\nu / g_{\mu\nu} \lambda^\mu \lambda^\nu$, и в соответствии с равенством (3.5) приходим к признаку (3.4). Обратно, при выполнении условия (3.4) при учете (3.5) получим $d \lambda^\alpha + \lambda^\beta \omega_\beta^\alpha = (g_{\mu\nu} \lambda^\mu d \lambda^\nu / g_{\mu\nu} \lambda^\mu \lambda^\nu) \cdot \lambda^\alpha$, т.е. признак (3.2).

3.2. Ортогональную траекторию диады $\{\bar{e}_{a_1}, \bar{e}_{a_2}\}$ пространства 1V_4 будем называть $\bar{e}_{a_1}$ - ($\bar{e}_{a_2}$ -) *линией кривизны 1-го рода*, если она направлена вдоль одного из главных направлений тензора $\Lambda_{(\alpha}^{a_1}{}_{\beta)} \left(\Lambda_{(\alpha}^{a_2}{}_{\beta)} \right)$. Линия (1.17) будет являться $\bar{e}_{a_1}$ - ($\bar{e}_{a_2}$ -) *линией кривизны 2-го рода*, если дифференциал точки 1-мерной нормали $[M, \bar{e}_{a_1}]$ (нормали $[M, \bar{e}_{a_2}]$) компланарен векторам диады [6].

Теорема 3.3. Признаками ортогональных траекторий диады $\{\bar{e}_{a_1}, \bar{e}_{a_2}\}$ пространства 1V_4 являются следующие пропорциональности: для $\bar{e}_{a_1}$ - ($\bar{e}_{a_2}$ -) *линий кривизны 1-го рода* -

$$\left(\Lambda_{(\alpha}^{a_1}{}_{\beta)} \lambda^\beta \right) :: (\lambda_\alpha) \quad \left(\left(\Lambda_{(\alpha}^{a_2}{}_{\beta)} \lambda^\beta \right) :: (\lambda_\alpha) \right); \quad (3.6)$$

для $\bar{e}_{a_1}$ - ($\bar{e}_{a_2}$ -) *линий кривизны 2-го рода* -

$$\left(\Lambda_{\alpha}^{a_1}{}_{\beta} \lambda^\beta \right) :: (\lambda_\alpha) \quad \left(\left(\Lambda_{\alpha}^{a_2}{}_{\beta} \lambda^\beta \right) :: (\lambda_\alpha) \right). \quad (3.7)$$

Здесь и далее: $\lambda_\alpha \equiv g_{\alpha\beta} \lambda^\beta = \lambda^\alpha / \varepsilon_\alpha$ (см. (2.6)).

Доказательство. Условия (3.6) как раз и означают, что линии (1.17) направлены вдоль главных осей соответствующего асимптотического тензора кривой. Можно показать, что их направления соответствуют экстремальным значениям $\bar{e}_{a_1}$ - ($\bar{e}_{a_2}$ -) *нормальных кривизн* (скалярных составляющих векторов $\bar{e}_{a_1}$ - ($\bar{e}_{a_2}$ -) *нормальной кривизны*, см. (3.3)) -

$$k_n^{(a_1)} = \frac{\Lambda_{(\alpha\beta)}^{a_1} \lambda^\alpha \lambda^\beta}{|g_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta|} \quad \left(k_n^{(a_2)} = \frac{\Lambda_{(\alpha\beta)}^{a_2} \lambda^\alpha \lambda^\beta}{|g_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta|} \right). \quad (3.8)$$

Перепишем равенства (3.8) в строчном виде:

$$\left(\Lambda_{(\alpha\beta)}^{a_1} - \varepsilon k_n^{(a_1)} g_{\alpha\beta} \right) \cdot \lambda^\alpha \lambda^\beta = 0, \text{ где } \varepsilon \equiv \text{sign}(g_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta) = \pm 1,$$

и проверив условия стационарности величин $k_n^{(a_1)}$: $\partial k_n^{(a_1)} / \partial \lambda^\alpha = 0$,

получим уравнение $\left(\Lambda_{(\alpha\beta)}^{a_1} - \varepsilon k_n^{(a_1)} g_{\alpha\beta} \right) \cdot \lambda^\beta = 0$, приводящиеся к

(3.6). Для величин $k_n^{(a_2)}$ проверка осуществляется аналогично.

В случае, например, $\bar{e}_{a_1}$ -линий кривизны 2-го рода имеем:

$$\frac{d(\bar{M} + x \cdot \bar{e}_{a_1})}{\Theta} \Big|_{(1.17)} = (\dots) \cdot \bar{e}_{a_1} + (\dots) \cdot \bar{e}_{a_2} + \left(\lambda^\alpha + x \cdot \Lambda_{a_1\beta}^\alpha \lambda^\beta \right) \cdot \bar{e}_\alpha,$$

$$\lambda^\alpha + x \cdot \Lambda_{a_1\beta}^\alpha \lambda^\beta = 0, \quad \lambda_\alpha - \varepsilon_{a_1} x \Lambda_{\alpha\beta}^{a_1} \lambda^\beta = 0, \quad \Lambda_{\alpha\beta}^{a_1} \lambda^\beta = \frac{\varepsilon_{a_1}}{x} \lambda_\alpha$$

(см. (1.4), (1.5), (1.7) и (1.12)), т. е. соответствующий признак из (3.7).

Теорема доказана.

Необходимым и достаточным условием совпадения линий (3.6) и (3.7) является нормальность диады $\{\bar{e}_{a_1}, \bar{e}_{a_2}\}$ пространства 1V_4 (см. теорему 2.2).

4. Инварианты первой дифференциальной окрестности диады

Фундаментальный объект первого порядка диады (1.9) содержит 20 компонент. Имеется также всего один вторичный параметр π_α^β . Поэтому в общем случае полная система инвариантов первой дифференциальной окрестности диады должна содержать 19 функционально независимых величин.

Из характеристических уравнений $\bar{e}_{a_1}$ - ($\bar{e}_{a_2}$ -) асимптотических тензоров

$$\begin{aligned} \pm \det \left\| \Lambda_{(\alpha\beta)}^{a_1} - \lambda g_{\alpha\beta} \right\| &\equiv \lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0, \\ \pm \det \left\| \Lambda_{(\alpha\beta)}^{a_2} - \lambda g_{\alpha\beta} \right\| &\equiv \lambda^2 - I_3 \lambda + I_4 = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

найдем величины I_{1-4} . Составим совместную для этих тензоров величину

$$I_5 = g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \Lambda_{(\alpha}^{a_1}{}_{\mu)} \Lambda_{(\beta}^{a_2}{}_{\nu)} . \quad (4.2)$$

Из компонент кососимметрических тензоров $\Lambda_{[\alpha}^{a_1}{}_{\beta]}$ и $\Lambda_{[\alpha}^{a_2}{}_{\beta]}$, связанных с нормальностью диады (см. теорему 2.2), образуем величины

$$I_6 = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \Lambda_{[\alpha}^{a_1}{}_{\beta]}, \quad I_7 = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \Lambda_{[\alpha}^{a_2}{}_{\beta]}, \quad (4.3)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}$ – ориентационный тензор подпространства $[M, \bar{e}_\alpha] \subset {}^1R_4(M)$,

$\varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \{\bar{e}_{a_1} \bar{e}_{a_2} \bar{e}_\alpha \bar{e}_\beta\}$ – косое произведение указанных векторов. Подъем и опускание индексов $\alpha, \beta, \dots$ осуществляется при помощи метрического тензора (2.6).

С каждым из векторов $X_\alpha \left(= \Lambda_{\alpha}^{a_1}{}_{a_1}, \Lambda_{\alpha}^{a_1}{}_{a_2}, \Lambda_{\alpha}^{a_2}{}_{a_2}, \Lambda_{\alpha}^{a_2}{}_{a_1}, \Lambda_{\alpha}^{a_1}{}_{\alpha} \right)$ (см. (1.10)) свяжем также по две величины вида:

$$J_1(X_\alpha) = g^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta, \quad J_2(X_\alpha) = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \Lambda_{(\alpha}^{a_1}{}_{\beta)} X_\mu X_\nu; \quad (4.4)$$

имеем:

$$\begin{aligned} I_8 &= J_1 \left(\Lambda_{\alpha}^{a_1}{}_{a_1} \right), \quad I_9 = J_2 \left(\Lambda_{\alpha}^{a_1}{}_{a_1} \right); \quad I_{10} = J_1 \left(\Lambda_{\alpha}^{a_1}{}_{a_2} \right), \\ I_{11} &= J_2 \left(\Lambda_{\alpha}^{a_1}{}_{a_2} \right); \quad I_{12} = J_1 \left(\Lambda_{\alpha}^{a_2}{}_{a_2} \right), \quad I_{13} = J_2 \left(\Lambda_{\alpha}^{a_2}{}_{a_2} \right); \\ I_{14} &= J_1 \left(\Lambda_{\alpha}^{a_2}{}_{a_1} \right), \quad I_{15} = J_2 \left(\Lambda_{\alpha}^{a_2}{}_{a_1} \right); \\ I_{16} &= J_1 \left(\Lambda_{a_2}^{a_1}{}_{\beta} \right), \quad I_{17} = J_2 \left(\Lambda_{a_2}^{a_1}{}_{\beta} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Учтем и две оставшиеся в (1.10) величины:

$$I_{18} = \Lambda_{a_2}^{a_1}{}_{a_1}, \quad I_{19} = \Lambda_{a_2}^{a_1}{}_{a_2}. \quad (4.6)$$

Теорема 4.1. Система величин

$$I_1, I_2, \dots, I_{19} \quad (4.7)$$

образует в общем случае полную систему инвариантов первой дифференциальной окрестности диады $\{\bar{e}_{a_1}, \bar{e}_{a_2}\}$ пространства 1V_4 .

Доказательство. Инвариантность величин (4.7) (см. (4.1) – (4.6)) может быть проверена с учетом уравнений (1.11). Величина I будет являться инвариантом первой дифференциальной окрестности диады, если $\delta I = 0$.

Убедимся в функциональной независимости указанных инвариантов. Рассмотрим условие:

$$\left\| \Lambda_{(\alpha}^{a_1}{}_{\beta)} \right\| = \text{diag} \left\| \varepsilon_\alpha \lambda_\alpha \right\|, \quad (4.8)$$

где λ_α – различные собственные значения тензора $\Lambda_{(\alpha}^{a_1}{}_{\beta)}$. В этом случае симметрический тензор обладает системой взаимно ортогональных главных направлений [10]. Вдоль них и направлены базисные векторы $\bar{e}_\alpha$ подвижного репера $(M, \bar{e}_i)$, т. е. проведена его полная канонизация.

В ситуации (4.8), не нарушающей общности рассмотрения, определитель 19-го порядка

$$\det \left\| \frac{\partial (I_1, I_2, \dots, I_{19})}{\partial (\Lambda_\alpha^{a_1}{}_\beta | \alpha \geq \beta, \Lambda_\mu^{a_1}{}_{a_1}, \Lambda_\mu^{a_1}{}_{a_2}, \Lambda_\nu^{a_2}{}_i, \Lambda_{a_2}^{a_1}{}_j)} \right\|$$

принимает квазидиагональный вид и равняется (с точностью до знака) произведению следующих, вообще говоря, ненулевых определителей:

$$\det \left\| \frac{\partial (I_1, I_2, I_6)}{\partial (\Lambda_\alpha^{a_1}{}_\beta | \alpha \geq \beta)} \right\|, \quad \det \left\| \frac{\partial (I_3, I_4, I_5, I_7)}{\partial (\Lambda_\alpha^{a_2}{}_\beta)} \right\|,$$

$$\det \left\| \frac{\partial (J_1(X_\alpha), J_2(X_\alpha))}{\partial (X_\beta)} \right\|$$

$$\left(X_\alpha = \left(\Lambda_\alpha^{a_1}{}_{a_1}, \Lambda_\alpha^{a_1}{}_{a_2}, \Lambda_\alpha^{a_2}{}_{a_2}, \Lambda_\alpha^{a_2}{}_{a_1}, \Lambda_{a_2}^{a_1}{}_\alpha \right) \right).$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Владимиров, Ю.С.** Системы отсчета в теории гравитации / Ю.С. Владимиров. – М.: Энергоиздат, 1982. – 256 с.
2. **Владимиров, Ю.С.** Диадный метод в общей теории относительности / Ю.С. Владимиров; МГУ им. М.В. Ломоносова. – М., 1973. – 27 с. – Деп. в ВИНТИ 01.11.73, № 7228-73.
3. **Лаптев, Г.Ф.** Дифференциальная геометрия погруженных многообразий / Г.Ф. Лаптев // Тр. Москов. матем. об-ва. – М., 1953. – № 2. – С. 275–382.
4. **Лаптев, Г.Ф.** Распределения касательных элементов / Г.Ф. Лаптев // Тр. геометр. семин. – М.: ВИНТИ, 1971. – Т. 3. – С. 29–48.
5. **Лаптев, Г.Ф.** Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности / Г.Ф. Лаптев, Н.М. Остиану // Тр. геометр. семин. – М.: ВИНТИ, 1971. – Т. 3. – С. 49–94.
6. **Близникас, В.И.** Дифференциальная геометрия неголономной гиперповерхности риманова пространства / В.И. Близникас // Литов. матем. сб. – 1971. – Т. XI. – № 1. – С. 63–75.

7. **Схоутен, И.А.** Введение в новые методы дифференциальной геометрии / И.А. Схоутен, Д.Дж. Стройк. – М.-Л. : ИЛ, 1948. – Т. 2. – 348 с.
8. **Картан, Э.** Пространства аффинной, проективной и конформной связности / Э. Картан. – Казань : Изд-во Казанск. ун-та, 1962. – 210 с.
9. **Лаптев, Г.Ф.** Элементы векторного исчисления / Г.Ф. Лаптев. – М. : Наука, 1975. – 336 с.
10. **Широков, П.А.** Тензорное исчисление / П.А. Широков. – Казань : Изд-во Казанск. ун-та, 1961. – 448 с.

Поступила в редакцию 02.07.2010 г.