УДК 517+530.1

С.В. ЖЕСТКОВ, А.А. РОМАНЕНКО

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ НОВЫХ ФОРМ ВОЛНОВЫХ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ФИШЕРА И ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРА

Известно [1-21], что уравнения Фишера и Лотки-Вольтерра играют важную роль в моделировании широкого круга задач биологии, химии, социологии. Центральное место при этом занимают вопросы, связанные с существованием точных волновых решений нелинейных уравнений параболического типа и разработкой методов их построения. В настоящей работе излагается прямой метод из [16] применительно к двумерным уравнения Фишера и Лотки-Вольтерра.

I. Известно, что классические методы интегрирования нелинейных уравнений в частных производных, например, метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) или метод Хироты, а также их модификации, к указанным уравнениям не применимы. Некоторые классы точных решений построены с помощью методов группового анализа [12-15]. Тем не менее, вопрос о разработке общего метода интегрирования уравнений Фишера и Лотки – Вольтерра остается открытым.

Рассмотрим двумерное уравнение Фишера [14]

$$u_t = D(u_{xx} + u_{yy}) + Au + \frac{B}{1-u}\left(u_x^2 + u_y^2\right) + Ku^2, \quad D > 0 \tag{1}$$

с произвольными действительными коэффициентами и краевыми условиями Неймана

$$u_x(t,x,y)\Big|_{x\to\pm\infty} = 0, \quad u_y(t,x,y)\Big|_{y\to\pm\infty} = 0\,. \tag{2}$$

Краевые условия (2) являются типичными при моделировании биологических процессов (см. [13]). На основе прямого метода из [16] решение задачи (1), (2) будем строить в виде

$$u(t,x,y) = 1 - F^{-1}(\xi), \quad \xi = \alpha t + \beta x + \gamma y + \varphi\,, \tag{3}$$

где $F(\xi)$ – неизвестная функция одной переменной, $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ – произвольные действительные числа. Подставляя (3) в (1), получим

$$F^3(A+K) - F^2(A+2K) + F(K - \alpha F' + Dp^2F'') - 2Dp^2(F')^2 + Bp^2(F')^2 = 0\,, \tag{4}$$

$$p^2 = \beta^2 + \gamma^2\,.$$

Уравнение (4) – это нелинейное уравнение второго порядка. Его решение, с учетом (2), будем строить в виде

$$F(\xi) = a + b\exp(\xi), \tag{5}$$

где $a > 0, b > 0$ неизвестные параметры. Подставляя (5) в (4), получим следующие соотношения:

$$a = 1, \quad B = 2D, \quad A + K = 0, \quad K + \alpha = p^2 D. \tag{6}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение (4) имело решение (5), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (6).*

На основании теоремы 1 устанавливаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (6). Тогда задача (1), (2) имеет решение вида (3), (5), которое удовлетворяет начальному условию*

$$u(0,x,y) = 1 - [1 + b\exp(\beta x + \gamma y + \varphi)]^{-1},$$

причем параметр $b > 0$ является произвольным.

На рис. 1 представлен график решения задачи (1), (2)

$$u(\xi) = 1 - [1 + b\exp(\xi)]^{-1}$$

при следующих значениях параметров: $A = 1.0$, $B = 2.0$, $D = 1.0$, $K = -1.0$, $\alpha = 3.0$, $\beta = 1.0$, $\gamma = 1.0$, $\varphi = 0$, $b = 1.0$.

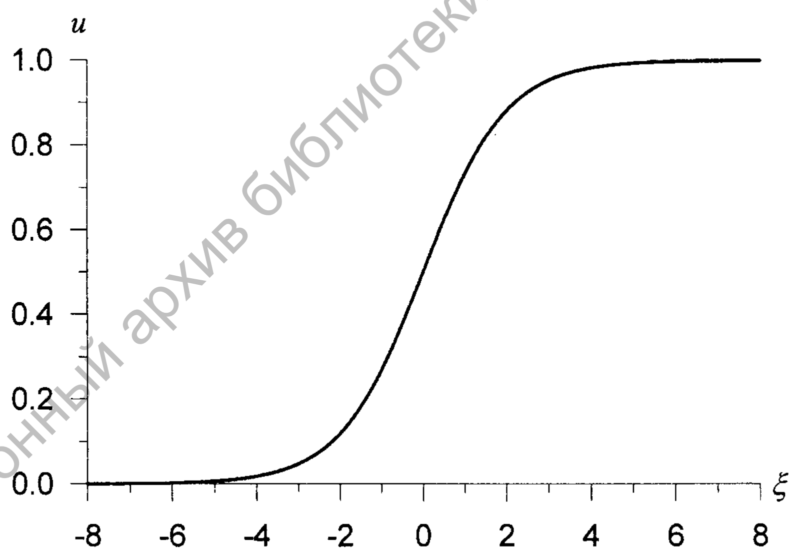

Рис. 1

II. Рассмотрим систему Лотки-Вольтерра

$$u_t = D(u_{xx} + u_{yy}) + \frac{B}{1-u}\left(u_x^2 + u_y^2\right) + u(a_1 - b_1 u - c_1 v), \quad D > 0, \tag{7}$$

$$v_t = D(v_{xx} + v_{yy}) + \frac{B}{1-v}\left(v_x^2 + v_y^2\right) + v(a_2 - b_2 u - c_2 v), \quad D > 0 \tag{8}$$

с произвольными действительными коэффициентами и краевыми условиями

$$\begin{gathered} u_x(t,x,y)\big|_{x\to\pm\infty} = 0, \quad u_y(t,x,y)\big|_{y\to\pm\infty} = 0, \\ v_x(t,x,y)\big|_{x\to\pm\infty} = 0, \quad v_y(t,x,y)\big|_{y\to\pm\infty} = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Исследование системы (7), (8) сведем к одному уравнению Фишера вида (1). С этой целью положим, что

$$v(t,x,y) = \lambda_0 + \lambda_1 u(t,x,y), \tag{10}$$

где $\lambda_0 \neq 0, \lambda_1 \neq 0$ (см. [13]). Подставляя (10) в (7), (8), получим одно уравнение Фишера (1), если выполняются условия

$$\begin{gathered} \lambda_0 = \frac{a_2}{c_2}, \quad \lambda_1 = 1 - \lambda_0, \quad (b_1 - b_2)c_2 = (c_2 - c_1)(c_2 - a_2), \\ a_1 - a_2 = \left(\frac{c_1}{c_2} - 2\right)a_2 - \frac{a_2 b_2}{c_2 - a_2}. \end{gathered} \tag{11}$$

При этом коэффициенты A, K определяются формулами

$$A = a_1 - \frac{c_1 a_2}{c_2}, \quad K = \frac{c_1 a_2}{c_2} - b_1 - c_1.$$

Применяя теорему 2, устанавливаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (11) и, кроме того,*

$$a = 1, \; B = 2D, \; a_1 = b_1 + c_1, \; p^2 D = \alpha + \frac{c_1 a_2}{c_2} - a_1.$$

Тогда краевая задача (7) – (9) имеет решение

$$u(t,x,y) = 1 - \left[1 + b\exp(\xi)\right]^{-1}, \; v(t,x,y) = \lambda_0 + \lambda_1 u(t,x,y),$$

которое удовлетворяет начальному условию

$$u(0,x,y) = 1 - \left[1 + b\exp(\beta x + \gamma y + \varphi)\right]^{-1}, \; v(0,x,y) = \lambda_0 + \lambda_1 u(0,x,y),$$

причем параметр $b > 0$ является произвольным. Графики функций $u(\xi)$, $v(\xi)$, которые являются решением задачи (7) – (9), приведены на рис. 2 при следующих значениях параметров: $B = 2.0$, $D = 1.0$, $a_1 = 2{,}0$, $b_1 = -2{,}0$, $c_1 = 4{,}0$, $a_2 = 0{,}5$, $b_2 = -0{,}5$, $c_2 = 1.0$, $b = 1{,}0$, $\alpha = 1{,}0$,

$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = 0$, $\lambda_0 = 0.5$, $\lambda_1 = 0.5$. Кривая 1 соответствует функции $u(\xi)$, кривая 2 – функции $v(\xi)$.

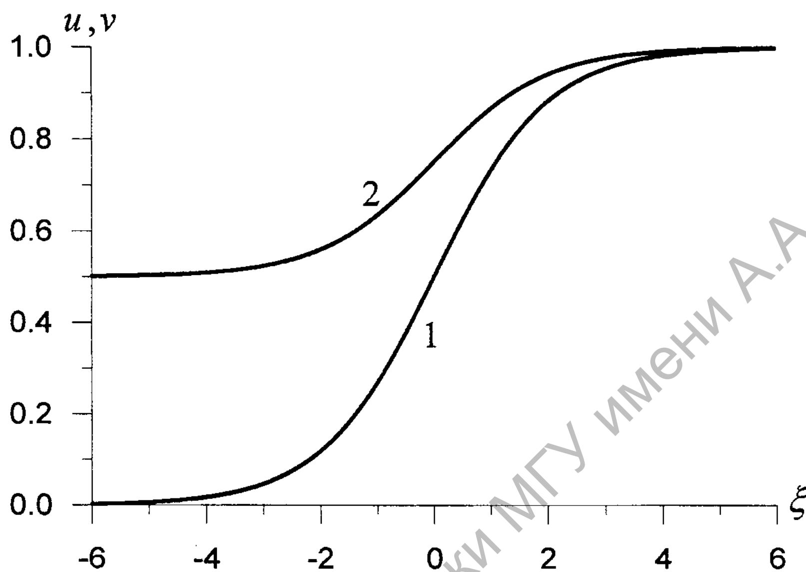

Рис. 2

III. Рассмотрим двумерное уравнение Фишера (ср. с [14])

$$u_t = D(u_{xx} + u_{yy}) + Au + \frac{B}{1-u}\left(u_x^2 + u_y^2\right) + Ru_x + Qu_y + Ku^2,\ D > 0 \quad (12)$$

с произвольными действительными коэффициентами и краевыми условиями Неймана (2). Решение уравнения (12) будем строить в виде (3). Подставляя (3) в (12), получим

$$F^3(A+K) - F^2(A+2K) + F\left[K + (\beta R + \gamma Q - \alpha)F' + Dp^2F''\right] + p^2(B-2D)(F')^2 = 0. \quad (13)$$

Решение уравнения (13), с учетом краевых условий (2), строится в виде

$$F(\xi) = a + b\exp(\xi) + d\exp(-\xi), \quad (14)$$

где $a > 0, b > 0, d > 0$ – неизвестные параметры волн. Подставляя (14) в (13), найдем

$$A + K = 0, \quad \alpha = R\beta + \gamma Q, \quad p^2(B-D) = K, \quad a(3D-2B) = D - B,$$
$$4bd(2D-B) = (a^2 - a)(B-D). \quad (15)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Для того чтобы уравнение (13) имело решение вида (14), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (15).*

На основании теоремы 4 устанавливаем следующий результат.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (15). Тогда задача (12), (2) имеет решение вида (3), (14), которое удовлетворяет начальному условию*

$$u(0,x,y)=1-\left[a+b\exp(\beta x+\gamma y+\varphi)+d\exp(-\beta x-\gamma y-\varphi)\right]^{-1}.$$

График решения задачи (12), (2)

$$u(\xi)=1-\left[a+b\exp(\xi)+d\exp(-\xi)\right]^{-1}$$

представлен на рис. 3 при следующих значениях параметров: $A=-0.8$, $B=1.0$, $D=0.6$, $K=0.8$, $R=2.0$, $Q=-1.0$, $\beta=1.0$, $\gamma=1.0$, $\alpha=1.0$, $a=2.0$, $b=d=1.0$.

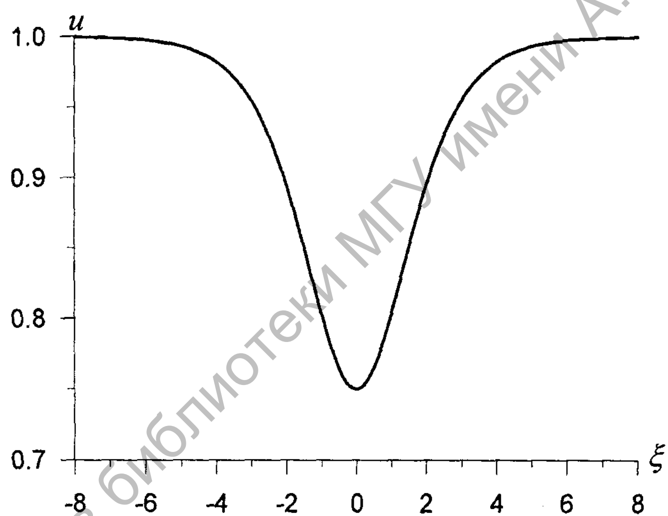

Рис. 3

IV. Задача (12), (2) допускает также решение вида

$$u(t,x,y)=1-F^{-2}(\xi),\quad F(\xi)=a+b\exp(\xi)+d\exp(\xi). \tag{16}$$

Подставляя (16) в уравнение (12), найдем

$$F^4(A+K)-F^2(A+2K)+2(R\beta+\gamma Q-\alpha)FF'+ \\ +2Dp^2FF''+p^2(4B-6D)(F')^2+K=0 \tag{17}$$

и, следовательно,

$$A+K=0,\quad \alpha=R\beta+\gamma Q,\quad 4B=5D,\quad p^2D=K,\quad 4bd=a^2-1. \tag{18}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 6. *Для того чтобы уравнение (17) имело решение вида*

$$F(\xi)=a+b\exp(\xi)+d\exp(-\xi),$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (18).

На основании теоремы (6) устанавливаем следующий результат.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия (18). Тогда задача (12), (2) имеет решение вида (16), которое удовлетворяет начальному условию*

$$u(0,x,y)=1-\left[a+b\exp(\beta x+\gamma y+\varphi)+d\exp(-\beta x-\gamma y-\varphi)\right]^{-2}.$$

На рис. 4 представлен график решения задачи (12), (2)

$$u(\xi)=1-\left[a+b\exp(\xi)+d\exp(-\xi)\right]^{-2}$$

при следующих значениях параметров: $A=-0.8$, $B=0.5$, $D=0.4$, $K=0.8$, $R=2.0$, $Q=-1.0$, $\beta=1.0$, $\gamma=1.0$, $\alpha=1.0$, $a=2.0$, $b=d=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

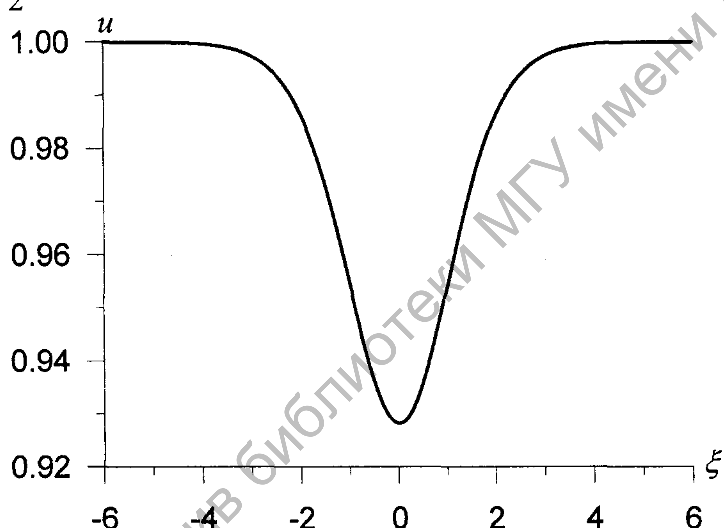

Рис. 4

V. Рассмотрим систему Лотки-Вольтерра

$$u_t=D(u_{xx}+u_{yy})+\frac{B}{1-u}\left(u_x^2+u_y^2\right)+R_1u_x+R_2v_x+Q_1u_y+Q_2v_y+u(a_1-b_1u-c_1v),\quad(19)$$

$$D>0,$$

$$v_t=D(v_{xx}+v_{yy})+\frac{B}{1-v}\left(v_x^2+v_y^2\right)+R_3v_x+R_4u_x+Q_3v_y+Q_4u_y+v(a_2-b_2u-c_2v)\quad(20)$$

с произвольными действительными коэффициентами и краевыми условиями Неймана (9). Сведем систему (19), (20) к одному уравнению вида (12). Для этого положим, что

$$v(t,x,y)=\lambda_0+\lambda_1u(t,x,y),\quad \lambda_0\neq0,\quad \lambda_1\neq0.$$

Тогда при выполнении условий

$$\lambda_0 = \frac{a_2}{c_2}, \quad \lambda_1 = 1 - \frac{a_2}{c_2}, \quad R_1 - R_3 = \frac{R_4 c_2}{c_2 - a_2} - \frac{R_2(c_2 - a_2)}{c_2},$$
$$Q_1 - Q_3 = \frac{Q_4 c_2}{c_2 - a_2} - \frac{Q_2(c_2 - a_2)}{c_2}, \quad a_1 + a_2 = \frac{c_1 a_2}{c_2} - \frac{b_2 a_2}{c_2 - a_2}, \tag{21}$$

$$(b_1 - b_2)c_2 = (c_2 - c_1)(c_2 - a_2)$$

система (19), (20) приводится к одному уравнению вида (12), в котором

$$A = a_1 - \frac{c_1 a_2}{c_2}, \quad R = R_1 + \left(\frac{c_2 - a_2}{a_2}\right) R_2, \quad Q = Q_1 + \left(\frac{c_2 - a_2}{a_2}\right) Q_2,$$

$$K = -b_1 - c_1 + \frac{c_1 a_2}{c_2}.$$

Применяя теорему (5), устанавливаем следующий результат.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия (21) и, кроме того,*

$$a_1 = b_1 + c_1, \quad \alpha = \beta\left[R_1 + \left(\frac{c_2 - a_2}{a_2}\right) R_2\right] + \gamma\left[Q_1 + \left(\frac{c_2 - a_2}{a_2}\right) Q_2\right],$$

$$p^2(B - D) = \frac{c_1 a_2}{c_2} - a_1, \ a(3D - 2B) = D - B, \ 4bd(2D - B) = (a^2 - a)(B - D).$$

Тогда краевая задача (19), (20), (9) имеет решение

$$u(t,x,y) = u(\xi) = 1 - [a + b\exp(\xi) + d\exp(-\xi)]^{-1},$$

$$v(t,x,y) = v(\xi) = \lambda_0 + \lambda_1 u(t,x,y),$$

которое удовлетворяет начальному условию

$$u(0,x,y) = 1 - [a + b\exp(\beta x + \gamma y + \varphi) + d\exp(-\beta x - \gamma y - \varphi)]^{-1},$$
$$v(t,x,y) = v(\xi) = \lambda_0 + \lambda_1 u(\xi).$$

VI. Из пункта IV следует, что система (19), (20) может иметь решение

$$u(t,x,y) = 1 - [a + b\,exp(\xi) + d\,exp(-\xi)]^{-2} = u(\xi),$$
$$v(t,x,y) = \lambda_0 + \lambda_1 u(\xi) = v(\xi) \tag{22}$$

при выполнении условий (21) и следующих соотношений:

$$a_1 = b_1 + c_1\,,\quad \alpha = \beta\left[R_1 + \left(\frac{c_2 - a_2}{a_2}\right)R_2\right] + \gamma\left[Q_1 + \left(\frac{c_2 - a_2}{a_2}\right)Q_2\right], \quad (23)$$
$$p^2 D = \frac{c_1 a_2}{c_2} - a_1\,,\quad 4B = 5D,\quad 4bd = a^2 - 1.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 7. *Пусть выполнены условия (21) и (23). Тогда краевая задача (19), (20), (9) имеет решение вида (22), которое удовлетворяет начальному условию*

$$u(0,x,y) = 1 - [a + b\exp(\beta x + \gamma y + \varphi) + d\exp(-\beta x - \gamma y - \varphi)]^{-2},$$
$$v(0,x,y) = \lambda_0 + \lambda_1 u(0,x,y)\,.$$

VII. Рассмотрим двумерное уравнение Фишера с кубической нелинейностью

$$u_t = D(u_{xx} + u_{yy}) + Au + \frac{B}{1-u}\left(u_x^2 + u_y^2\right) + Ru_x + Qu_y + Ku^2 + Hu^3,\quad D > 0\,,\quad (24)$$

с произвольными коэффициентами и краевыми условиями (2). Решение уравнения (24) будем строить в виде (16). Подставляя (16) в (24), получим нелинейное уравнение

$$2\alpha F^3 F' = Dp^2\left[2F^3F'' - 6F^2(F')^2\right] + A\left[F^6 - F^4\right] + 2(R\beta + Q\gamma)F^3F' + 4p^2BF^2(F')^2 + \\ + K\left[F^6 - 2F^4 + F^2\right] + H\left[F^6 - 3F^4 + 3F^2 - 1\right] \quad (25)$$

и, следовательно,

$$\alpha = R\beta + \gamma Q,\ 4(B - D)p^2 = 2K + 3H + A,\ p^2(4B - 3D) = 2(2K + 3H + A)\,,$$
$$-(6a^2 + 4bd)(2K + 3H + A) + 2Dp^2(3a^2 + 4bd) + (4B - 6D)p^2a^2 + K + 3H = 0,$$
$$-(2a^2 + 6bd)(2K + 3H + A) + Dp^2(a^2 + 9bd) - bdp^2(4B - 6D) + K + 3H = 0\,,\quad (26)$$
$$a^4 + 12a^2bd + 6b^2d^2 + 12Dp^2(a^2bd + b^2d^2) - 2bdp^2(4B - 6D)(bd + a^2) + \\ + (a^2 + 2bd)(K + 3H) - H = 0.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 8. *Для того чтобы уравнение (25) имело решение вида (16), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (26).*

На основании теоремы 8 устанавливаем следующий результат.

Теорема 9. *Пусть выполнены условия (26). Тогда краевая задача (24), (2) имеет решение вида (16), которое удовлетворяет начальному условию*

$$u(0,x,y)=1-\left[a+b\exp(\beta x+\gamma y+\varphi)+d\exp(-\beta x-\gamma y-\varphi)\right]^{-2}.$$

График решения задачи (24), (2) $u(\xi)=1-F^{-2}(\xi)$ представлен на рис. 5 при следующих значениях параметров: $A=1.2$, $B=0.625$, $D=0.5$, $K=-0.57564372$, $H=0.31709581$, $\beta=1.0$, $\gamma=1.0$, $p=\sqrt{2}$, $a=1.0$, $b=d_t=0.39508109$.

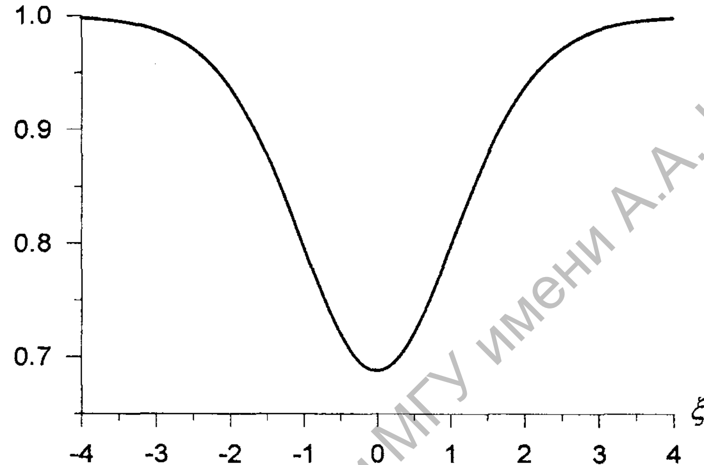

Рис. 5

VIII. Исследуем на основе уравнения (24) систему Лотки-Вольтерра с квадратичными и кубическими членами

$$\begin{aligned} u_t &= D(u_{xx}+u_{yy})+\frac{B}{1-u}\left(u_x^2+u_y^2\right)+R_1u_x+R_2v_x+Q_1u_y+Q_2v_y+a_1u^2+a_2uv+\\ &\quad+a_3v^2+b_1u^3+b_2u^2v+b_3uv^2+b_4v^3,\quad D>0,\\ v_t &= D(v_{xx}+v_{yy})+\frac{B}{1-v}\left(v_x^2+v_y^2\right)+R_3v_x+R_4u_x+Q_3v_y+Q_4u_y+c_1u^2+c_2uv+\\ &\quad+c_3v^2+d_1u^3+d_2u^2v+d_3uv^2+d_4v^3 \end{aligned} \tag{27}$$

с произвольными коэффициентами и краевыми условиями (9). Сведем систему (27) к одному уравнению вида (24) с помощью подстановки

$$v(t,x,y)=\lambda_0+\lambda_1u(t,x,y),\quad \lambda_0\neq 0,\quad \lambda_1\neq 0.$$

Тогда при выполнении соотношений

$$\lambda_0+\lambda_1=1,\quad R_1+\lambda_1R_2=R_3+\frac{R_4}{\lambda_1},\quad Q_1+\lambda_1Q_2=Q_3+\frac{1}{\lambda_1}Q_4,$$

$$a_2\lambda_0+3\lambda_0^2\lambda_1 a_3+b_3\lambda_0^2+3b_4\lambda_0^2\lambda_1=\frac{1}{\lambda_1}c_2\lambda_0+2c_3\lambda_0+\frac{1}{\lambda_1}d_3\lambda_0^2+3d_4\lambda_0^2,$$

$$a_1+a_2\lambda_1+3a_3\lambda_1^2\lambda_0+b_2\lambda_0+2\lambda_0\lambda_1 b_3+3b_4\lambda_0\lambda_1^2= \tag{28}$$

$$=\frac{1}{\lambda_1}c_1+c_2+c_3\lambda_1+\frac{1}{\lambda_1}d_2\lambda_0+2d_3\lambda_0+3d_4\lambda_0\lambda_1,$$

$$a_3\lambda_1^3+b_1+b_2\lambda_1+b_3\lambda_1^2+b_4\lambda_1^3=\frac{1}{\lambda_1}d_1+d_2+d_3\lambda_1+d_4\lambda_1^2$$

система (27) сведется к одному уравнению вида (24) с коэффициентами $R=R_1+\lambda_1 R_2\equiv R^*$, $Q=Q_1+\lambda_1 Q_2\equiv Q^*$, $A=a_2\lambda_0+3\lambda_0^2\lambda_1 a_3+b_3\lambda_0^2+3b_4\lambda_0^2\lambda_1\equiv A^*$,

$$K=a_1+a_2\lambda_1+3a_3\lambda_0\lambda_1^2+b_2\lambda_0+2\lambda_0\lambda_1 b_3+3b_4\lambda_0\lambda_1^2\equiv K^*,$$

$$H=a_3\lambda_1^3+b_1+b_2\lambda_1+b_3\lambda_1^2+b_4\lambda_1^3\equiv H^*.$$

На основании теоремы 9 устанавливаем следующий результат.

Теорема 10. *Пусть выполнены условия (28) и, кроме того,*

$$\alpha=R^*\beta+\gamma Q^*,\quad 4(B-D)p^2=S^*,\quad p^2(4B-3D)=2S^*,$$

$$-(6a^2+4bd)S^*+2Dp^2(3a^2+4bd)+(4B-6D)p^2a^2+K^*+3H^*=0,$$

$$-(2a^2+6bd)S^*+Dp^2(a^2+9bd)-bdp^2(4B-6D)+K^*+3H^*=0,$$

$$a^4+12a^2bd+6b^2d^2+12Dp^2(a^2bd+b^2d^2)-2bdp^2(4B-6D)(bd+a^2)+$$
$$+(a^2+2bd)(K^*+3H^*)-H^*=0,\ S^*\equiv 2K^*+3H^*+A^*.$$

Тогда краевая задача (27), (9) имеет решение вида

$$u(t,x,y)=1-F^{-2}(\xi),\quad F(\xi)=a+b\exp(\xi)+d\exp(-\xi),$$

$$v(t,x,y)=\lambda_0+\lambda_1 u(t,x,y),$$

которое удовлетворяет начальному условию

$$u(0,x,y)=1-[a+b\exp(\beta x+\gamma y+\varphi)+d\exp(-\beta x-\gamma y-\varphi)]^{-2},$$

$$v(0,x,y)=\lambda_0+\lambda_1 u(0,x,y).$$

Таким образом, предложенный метод позволяет аналитически моделировать волновые решения двумерных уравнений Фишера и Лотки-Вольтерра с различными типами нелинейности.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Lotka, A.J.*** Updaded oscillations derived from the law of mass action / A.J. Lotka // J.Amer. Chem. Soc, 1920. – Vol. 42. – P. 1595-1599.
2. ***Volterra, V.*** Variazionie fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi / V. Volterra // Mem. Acad. Lincei, 1926. – Vol. 2. – P. 31-113.
3. ***Fisher, R.A.*** The wave of advance of advantageous genes / R.A. Fisher // Ann. Eugenics, 1937. – Vol. 7. – P. 353-369.
4. ***Колмогоров А.Н.*** Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме / А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов // Бюллетень МГУ. Сер. А. Матем. и механика, 1937. – Т. 1. – С. 1-25.
5. ***Canosa, J.*** Diffusion in nonlinear multiplicative media / J. Canosa // J. Math. Phys, 1969. – Vol. 10. – P. 1862-1868.
6. ***Aronson, D.G.*** Partial differential equations and related topics / D.G. Aronson, H.F. Weinberger // Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1975. – Vol. 446. – P. 5-49.
7. ***Ablowitz, M.J.*** Explicit solution of Fisher's equation for a special wave speed / M.J. Ablowitz, A. Zeppetella//Bull. Math. Biol, 1979. – Vol. 41. – P.835-840.
8. ***Shigesada, N.*** Spatial segregation of interacting species / N. Shigesada, K. Kawasaki, E. Teramoto // J. Theor. Biol, 1979. – Vol. 79. – P. 83-99.
9. ***Murray, J.D.*** Mathematical biology / J.D. Murray. – Springer, 1989.
10. ***Brazhnik, P.K.*** Travelling waves and static structures in a two-dimensional exactly solvable reaction-diffusion system / P.K. Brazhnik, J.J. Tyson // J. Phys. A: Math. Gen, 1999. – Vol. 32. – P. 8033-8044.
11. ***Brazhnik, P.K.*** On travelling wave solutions of Fisher's equation in two spatial dimensions / P.K. Brazhnik, J.J Tyson // SIAM. J. Appl. Math., 1999. – Vol. 60. – P. 371-391.
12. ***Cherniha, R.*** Lie symmetries of nonlinear two-dimensional reaction-diffusion systems / R. Cherniha // Rept. Math. Phys, 2000. – Vol. 46. – P. 63-76.
13. ***Чернига, Р.М.*** Нові точні розв'язки та їхні властивості одного нелінійного рівняння математичноі біологіі / Р.М. Чернига // Укр. мат. журнал, 2001. – Т. 53. – № 10. – С. 1409-1421.
14. ***Bindu, P.S.*** Symmetries and integrability properties of generalized Fisher type nonlinear diffusion equation /P.S. Bindu, M. Lakshmanan // Proceedings of institute of mathematics of NAS of Ukraine, 2002. – Vol. 43. – Part 1. – P. 36-48.
15. ***Чернига, Р.М.*** Дифузійна система Лотки-Вольтерра: симметріі Лі, точні та числові розв'язки / Р.М. Чернига, В.А. Дутка // Укр. мат. журнал, 2004. – Т. 56. – № 10. – С. 1395-1404.
16. ***Жестков, С.В.*** Конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных / С.В. Жестков. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2006.
17. ***Зайцев, В.Ф.*** Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. – М.: Международная программа образования, 1996.
18. ***Жестков, С.В.*** О существовании новых форм волновых решений нелинейных уравнений математической биологии / С.В. Жестков, А.А. Романенко // Весці НАНБ. Сер. фіз.-мат. навук, 2010. – № 2. – С. 46-51.
19. ***Мизохата, С.*** Теория уравнений с частными производными / С. Мизохата. – М.: Мир, 1977.

20. ***Сидоров, С.В.*** Бегущие волны и динамический хаос в активных средах: численное исследование / С.В. Сидоров // Дифференц. уравнения, 2009. – Т. 45. – № 2. – С. 250-254.
21. ***Баранник, А.Ф.*** Про неліівськи розв'язки нелінійного рівняння реакціі-диффузіі / А.Ф. Баранник, И.И. Юрик // Доп. Нац. АН. Украіни, 2005. – № 2. – С. 11-17.

Поступила в редакцию 27.04.2010 г.