УДК 512.548

Н.А. ЩУЧКИН

ПОРОЖДАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА ПОДАЛГЕБР n-АРНЫХ ГРУПП

В теории групп известен способ получения множества порождающих элементов подгруппы H группы G, порожденной множеством X, использующий элементы множества X и элементы множества S всех представителей правых смежных классов группы G по подгруппе H. Более точно: подгруппа H порождается множеством всех элементов вида $sx\{sx\}^{-1}$, где s и x пробегают множества S и X соответственно, а символом $\{g\}$ обозначается фиксированный представитель правого смежного класса Hg. В данной работе установлено, что аналогичный результат имеет место и в теории n-арных групп. При этом тернарный (n = 3) и n-арный (n ≥ 4) случаи существенно отличаются друг от друга и поэтому рассматриваются отдельно.

Существуют различные определения n-арной группы ($n \geq 3$), эквивалентность которых доказывается многими авторами (см., например, [1], [2]). Мы выберем определение, предложенное в [3], согласно которому множество G с одной n-арной операцией [ ] и одной унарной операцией $^{-}$ называется n-арной группой, если в G выполнены тождества

$$[[x_1 \ldots x_n]x_{n+1} \ldots x_{2n-1}] = [x_1 \ldots x_i[x_{i+1} \ldots x_{i+n}]x_{i+n+1} \ldots x_{2n-1}] \tag{1}$$

для всех $i = 1, \ldots, n-1$ и

$$[y\underbrace{x \ldots x}_{n-2}\bar{x}] = [y\underbrace{x \ldots x}_{n-3}\bar{x}x] = [\bar{x}\underbrace{x \ldots x}_{n-2}y] = [x\bar{x}\underbrace{x \ldots x}_{n-3}y] = y. \tag{2}$$

Таким образом, n-арная группа G является алгеброй $< G, [\ ], ^{-} >$ типа $(n, 1)$, в которой выполнены указанные тождества (1) и (2).

Полагая в (2) $y = x$, видим, что в n-арной группе G для любого ее элемента x существует элемент $\bar{x}$ такой, что $[\underbrace{x \ldots x}_{n-1}\bar{x}] = x$. Элемент $\bar{x}$ называют косым для x.

Согласно леммам 2.3 и 2.4 из [4] в n-арной группе G выполняются тождества

$$\overline{[x_1 \ldots x_n]} = [\underbrace{\underbrace{x_n \ldots x_n}_{n-3}\overline{x_n} \ldots \underbrace{x_1 \ldots x_1}_{n-3}\overline{x_1} \ldots \underbrace{x_n \ldots x_n}_{n-3}\overline{x_n} \ldots \underbrace{x_1 \ldots x_1}_{n-3}\overline{x_1}}_{n-2}] \quad \text{и} \quad \bar{\bar{x}} = [\underbrace{x \ldots x}_{(n-2)^2}]. \tag{3}$$

Кроме того, по теореме 2.6 из [4] n-арная подгруппа H n-арной группы G, порожденная множеством $X \subseteq G$ (обозначается $< X > = H$), совпадает с множеством всех элементов вида $[x_1 \ldots x_{m(n-1)+1}]$, где

$$x_i \in X \cup \bar{X}, \ i = 1, \ldots m(n-1)+1, \quad \bar{X} = \{\bar{x} \mid x \in X\}.$$

В частности, это верно в случае, когда сама n-арная группа G порождается множеством X.

1. Функция выбора представителя класса смежности по подгруппе.

Пусть H – n-арная подгруппа произвольной n-арной группы G. Известно [5–6], что отношение

$$b \equiv c \Leftrightarrow [\underbrace{H...H}_{n-1} b] = [\underbrace{H...H}_{n-1} c]$$

является эквивалентностью и классы этой эквивалентности равномощны. Кроме того, одним из классов является сама n-арная подгруппа H. Классы этой эквивалентности называют правыми классами смежности по n-арной подгруппе H. По аналогии с группами [7–8] определим на n-арной группе G функцию выбора $g \to \{g\}$, которая всем элементам одного и того же класса смежности ставит в соответствие один и тот же выбранный представитель этого класса. Такую функцию, как и в случае групп, назовем выбирающей функцией.

Отметим важное свойство выбирающей функции:

$$\{[\{x_1\}x_2...x_n]\} = \{[x_1x_2...x_n]\}. \qquad (4)$$

Действительно,

$$[\underbrace{H...H}_{n-1}[\{x_1\}x_2...x_n]] = [[\underbrace{H...H}_{n-1}\{x_1\}]x_2...x_n] =$$

$$= [[\underbrace{H...H}_{n-1} x_1]x_2...x_n] = [\underbrace{H...H}_{n-1}[x_1x_2...x_n]].$$

Ясно, что $\{\{x\}\} = \{x\}$ для любого $x \in G$. Если же x – выбранный представитель некоторого правого смежного класса G по H, то

$$\{\{x\}\} = \{x\} = x. \qquad (5)$$

2. Построение порождающего множества тернарной подгруппы с помощью порождающего множества тернарной группы.

Выбирающая функция позволяет по порождающим элементам n-арной группы строить порождающие элементы n-арной подгруппы. Покажем это вначале для тернарных групп, то есть для n-арных групп при $n = 3$.

Теорема 1. *Пусть X – порождающее множество тернарной группы G, H – ее тернарная подгруппа, $g \to \{g\}$ – выбирающая функция по тернарной подгруппе H, S – множество всех выбранных представителей, a – фиксированный элемент из H,*

$$R = \{r = [[s\bar{a}x]\overline{\{[s\bar{a}x]\}}a] \mid s \in S,\ x \in X \cup \bar{X}\},$$

$$T = \{t = [\bar{a}[sxa]\overline{\{[sxa]\}}] \mid s \in S,\ x \in X \cup \bar{X}\}.$$

Тогда:

1) $R \cup T \subseteq H$;

2) $\bar{R} = T$, $\bar{T} = R$;

3) если $a \in S$, то H порождается любым из множеств R или T.

Доказательство. 1) Покажем, что элементы r и t лежат в H. Действительно, так как

$$[HH[s\bar{a}x]] = [HH\{[s\bar{a}x]\}],$$

то для некоторых h_1, h_2, h_3, h_4 из H верно равенство

$$[h_1h_2[s\bar{a}x]] = [h_3h_4\{[s\bar{a}x]\}],$$

откуда

$$[[h_1h_2a]\bar{a}[s\bar{a}x]] = [[h_3h_4a]\bar{a}\{[s\bar{a}x]\}].$$

Если в полученном равенстве положить $h=[h_1h_2a]$, $h'=[h_3h_4a]$, то оно примет вид

$$[h\bar{a}[s\bar{a}x]] = [h'\bar{a}\{[s\bar{a}x]\}].$$

Из последнего равенства находим

$$h' = [h\bar{a}[[s\bar{a}x]\overline{\{[s\bar{a}x]\}a}]],$$

откуда

$$[[s\bar{a}x]\overline{\{[s\bar{a}x]\}a}] = [a\bar{h}h'] \in H,$$

то есть $r \in H$, $R \subseteq H$. Аналогично доказывается включение $T \subseteq H$.

2) Найдем косой элемент для r. Для этого положим $s' = \{[s\bar{a}x]\} \in S$. Тогда, используя нейтральность в смысле [5] последовательности $\bar{a}\,x\,\bar{x}\,a$, а также (4), получим

$$s = \{s\} = \{[[s\bar{a}x]\bar{x}a]\} = \{[\{[s\bar{a}x]\}\bar{x}a]\} = \{[s'\bar{x}a]\},$$

откуда

$$\bar{s} = \overline{\{[s'\bar{x}a]\}}. \qquad (6)$$

Теперь, используя (3) при $n = 3$, определение элемента s', нейтральность последовательности $\bar{a}\,x\,\bar{x}\,a$, а также (6), получим

$$\bar{r} = \overline{[[s\bar{a}x]\overline{\{[s\bar{a}x]\}a}]} = [\bar{a}\overline{\overline{\{[s\bar{a}x]\}}[s\bar{a}x]}] = [\bar{a}\{[s\bar{a}x]\}[\bar{x}a\bar{s}]] =$$

$$= [\bar{a}s'[\bar{x}a\bar{s}]] = [\bar{a}[s'\bar{x}a]\overline{\{[s'\bar{x}a]\}}] \subseteq T,$$

то есть $\bar{R} \subseteq T$. Аналогично доказывается равенство

$$\bar{t} = \overline{[\bar{a}[sxa]\overline{\{[sxa]\}}]} = [[s''\overline{ax}]\overline{\{[s''\overline{ax}]\}a}],$$

где $s''=\{[sxa]\} \in S$, то есть $\bar{T} \subseteq R$.

Из включений $\bar{R} \subseteq T$ и $\bar{T} \subseteq R$ следуют включения $\bar{\bar{R}} \subseteq \bar{T}$ и $\bar{\bar{T}} \subseteq \bar{R}$, откуда, ввиду выполняющегося в G тождества $\bar{\bar{x}} = x$, получаются включения $R \subseteq \bar{T}$ и $T \subseteq \bar{R}$, а значит, и равенства $\bar{R} = T$, $\bar{T} = R$.

3) Пусть w – произвольный элемент из H. Так как $w \in G$, и G порождается множеством X, то, как отмечалось во введении, этот

элемент может быть представлен в виде $w = [y_1 y_2 ... y_{2m+1}]$, где $y_i \in X \cup \overline{X}$. Полагая

$$u_1 = a,\ u_{2i} = y_1 ... y_{2i-1},\ u_{2i+1} = y_1 ... y_{2i} a$$

для $I = 1, 2, ..., 2m+1$ и используя тот факт, что для любых $b, c \in G$ последовательности $b\overline{b}$, $\overline{b}\,b$ и $b\overline{c}\,c\overline{b}$ являются нейтральными, получим

$$w = [[[a\overline{a}y_1]\overline{\{[a\overline{a}y_1]\}}\{y_1\}][y_2 a[\overline{\{[y_1y_2a]\}}\{[y_1y_2a]\}\overline{a}]]$$

$$[y_3\overline{\{[[y_1y_2a]\overline{a}y_3]\}}\{[y_1y_2y_3]\}][y_4 a[\overline{\{[[y_1y_2y_3]y_4a]\}}\{[[y_1y_2y_3]y_4a]\}\overline{a}]]...$$

$$...[y_{2m}a[\overline{\{[y_1...y_{2m}a]\}}\{[y_1...y_{2m}a]\}\overline{a}]][y_{2m+1}\overline{\{[[y_1...y_{2m}a]\overline{a}y_{2m+1}]\}}\{[y_1...y_{2m+1}]\}]].$$

Последнее равенство, используя равенства $\{w\} = \{a\} = a$ и равенство (4), перепишем в виде

$$w = [[[\{u_1\}\overline{a}y_1]\overline{\{[\{u_1\}\overline{a}y_1]\}}a][\overline{a}[\{u_2\}y_2a]\overline{\{[\{u_2\}y_2a]\}}]$$

$$[[\{u_3\}\overline{a}y_3]\overline{\{[\{u_3\}\overline{a}y_3]\}}a][\overline{a}[\{u_4\}y_4a]\overline{\{[\{u_4\}y_4a]\}}] \;...$$

$$...\; [\overline{a}[\{u_{2m}\}y_{2m}a]\overline{\{[\{u_{2m}\}y_{2m}a]\}}][[\{u_{2m+1}\}\overline{a}y_{2m+1}]\overline{\{[\{u_{2m+1}\}\overline{a}y_{2m+1}]\}}a]]. \quad (7)$$

Введя обозначения $s_i = \{u_i\}$, $I = 1, 2, ..., 2m+1$, равенство (7) можно переписать следующим образом

$$w = [\underbrace{[[s_1\overline{a}y_1]\overline{\{[s_1\overline{a}y_1]\}}a]}_{r_1\in R}\underbrace{[\overline{a}[s_2y_2a]\overline{\{[s_2y_2a]\}}]}_{t_1\in T}\underbrace{[[s_3\overline{a}y_3]\overline{\{[s_3\overline{a}y_3]\}}a]}_{r_2\in R}\underbrace{[\overline{a}[s_4y_4a]\overline{\{[s_4y_4a]\}}]}_{t_2\in T}..$$

$$...\underbrace{[\overline{a}[s_{2m}y_{2m}a]\overline{\{[s_{2m}y_{2m}a]\}}]}_{t_m\in T}\underbrace{[[s_{2m+1}\overline{a}y_{2m+1}]\overline{\{[s_{2m+1}\overline{a}y_{2m+1}]\}}a]]}_{r_{m+1}\in R} = [r_1t_1 ... r_mt_mr_{m+1}].$$

А так как, согласно 2), $t_1, ..., t_m \in \overline{R}$, $r_1, ..., r_{m+1} \in \overline{T}$, то, ввиду отмеченной во введении теоремы 2.6 из [4], $w \in \langle R \rangle$, $w \in \langle T \rangle$, откуда, в силу произвольного выбора $w \in H$, следуют включения $H \subseteq \langle R \rangle$, $H \subseteq \langle T \rangle$. Обратные включения $\langle R \rangle \subseteq H$, $\langle T \rangle \subseteq H$ следуют из доказанных в 1) включений $R \subseteq H$, $T \subseteq H$. Таким образом, $H = \langle R \rangle$, $H = \langle T \rangle$. Теорема доказана.

3. Построение порождающего множества n-арной подгруппы с помощью порождающего множества n-арной группы.

Рассмотрим теперь n-арные группы при $n \geq 4$.

Лемма. Пусть G – n-арная группа, H – ее n-арная подгруппа, $g \to \{g\}$ – выбирающая функция по n-арной подгруппе H. Тогда

$$[cb\underbrace{\{b\}...\{b\}}_{n-3}\overline{\{b\}}] \in H$$

для любых $c \in H$, $b \in G$.

Доказательство. Так как

$$[\underbrace{H...H}_{n-1}b] = [\underbrace{H...H}_{n-1}\{b\}],\ c \in H,$$

то для некоторых $h_1,...,h_{2n-3}$ из H имеем равенство

$$[h_1...h_{n-2}cb] = [h_{n-1}...h_{2n-3}\{b\}],$$

откуда

$$[[h_1...h_{n-2}cb]\underbrace{\{b\}...\{b\}}_{n-3}\overline{\{b\}}c] = [h_{n-1}...h_{2n-3}[\underbrace{\{b\}...\{b\}}_{n-2}\overline{\{b\}}c]]$$

или

$$[h_1...h_{n-2}[cb\underbrace{\{b\}...\{b\}}_{n-3}\overline{\{b\}}]c] = [h_{n-1}...h_{2n-3}c] \in H.$$

Так как H — n-арная подгруппа, то решение $z = [cb\underbrace{\{b\}...\{b\}}_{n-3}\overline{\{b\}}]$ уравнения

$$[h_1...h_{n-2}zc] = [h_{n-1}...h_{2n-3}c]$$

лежит в H, то есть $[cb\underbrace{\{b\}...\{b\}}_{n-3}\overline{\{b\}}] \in H$. Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть n-арная группа G порождается множеством X, H — ее n-арная подгруппа, $g \to \{g\}$ — выбирающая функция по n-арной подгруппе H, S — множество всех выбранных представителей, a — фиксированный элемент из H,

$$T = \{t_0(s,\ y),\ t_1(s,\ y),\ ...,\ t_{n-2}(s,\ y)\ |\ s \in S,\ y \in X \cup \overline{X}\},$$

где

$$t_0(s,\ y) = [\overline{a}[sy\underbrace{a...a}_{n-2}]\underbrace{\{[sy\underbrace{a...a}_{n-2}]\}...\{[sy\underbrace{a...a}_{n-2}]\}}_{n-3}\overline{\{[sy\underbrace{a...a}_{n-2}]\}}],$$

$$t_i(s,\ y) = [\overline{a}[s\underbrace{a...a}_{i-1}\overline{a}y\underbrace{a...a}_{n-2-i}]\underbrace{\{[s\underbrace{a...a}_{i-1}\overline{a}y\underbrace{a...a}_{n-2-i}]\}...\{[s\underbrace{a...a}_{i-1}\overline{a}y\underbrace{a...a}_{n-2-i}]\}}_{n-3}\overline{\{[s\underbrace{a...a}_{i-1}\overline{a}y\underbrace{a...a}_{n-2-i}]\}}],$$

для $i = 1, 2, ..., n-2$. Тогда $T \subseteq H$, если же $a \in S$, то H порождается множеством $T \cup \{a\}$.

Доказательство. Включение $T \subseteq H$ следует из предыдущей леммы, если в ней положить

$$c = \overline{a},\ b = [sy\underbrace{a...a}_{n-2}] \text{ или } b = [s\underbrace{a...a}_{i-1}\overline{a}y\underbrace{a...a}_{n-2-i}],\ i = 1, 2, ..., n-2.$$

Пусть u — произвольный элемент из H. Так как $u \in G$ и G порождается X, то, как отмечалось во введении, этот элемент может быть представлен в виде

$$u = [y_1y_2...y_{m(n-1)+1}],\quad y_j \in X \cup \overline{X},\ j = 1, 2, ..., m(n-1)+1.$$

Полагая

$$u_0 = a,\ \ u_{k(n-1)+1} = [y_1 \dots y_{k(n-1)+1}],\ \ u_{k(n-1)+l} = [y_1 \dots y_{k(n-1)+l} \underbrace{a \dots a}_{n-l}],$$

где при $k = 0, 1, \dots, m-1$ всякий раз $l = 2, 3, \dots, n-1$ и используя свойство (4) выбирающей функции, а также тождество $\{\{x\}\} = \{x\}$, будем иметь

$$\{[\{u_0\} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \bar{a} y_1]\} = \{u_1\},$$

$$\{[\{u_{k(n-1)+1}\} y_{k(n-1)+2} \underbrace{a \dots a}_{n-2}]\} = \{u_{k(n-1)+2}\},$$

$$\{[\{u_{k(n-1)+i+1}\} \underbrace{a \dots a}_{i-1} \bar{a} y_{k(n-1)+i+2} \underbrace{a \dots a}_{n-i-2}]\} = \{u_{k(n-1)+i+2}\},$$

где $i = 1, 2, \dots, n-2$ и $u_{m(n-1)+1} = u$.

Теперь легко устанавливается нейтральность в смысле [4] следующих последовательностей:

$$\underbrace{\{[\{u_0\} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \bar{a} y_1]\} \dots \{[\{u_0\} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \bar{a} y_1]\}}_{n-3} \overline{\{[\{u_0\} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \bar{a} y_1]\}} \underbrace{a \dots a}_{n-2} \bar{a} \{u_1\},$$

$$\underbrace{\{[\{u_{k(n-1)+1}\} y_{k(n-1)+2} \underbrace{a \dots a}_{n-2}]\} \dots \{[\{u_{k(n-1)+1}\} y_{k(n-1)+2} \underbrace{a \dots a}_{n-2}]\}}_{n-3} \overline{\{[\{u_{k(n-1)+1}\} y_{k(n-1)+2} \underbrace{a \dots a}_{n-2}]\}} \underbrace{a \dots a}_{n-2} \bar{a} \{u_{k(n-1)+2}\},$$

$$\underbrace{\{[\{u_{k(n-1)+i+1}\} \underbrace{a \dots a}_{i-1} \bar{a} y_{k(n-1)+i+2} \underbrace{a \dots a}_{n-i-2}]\} \dots \{[\{u_{k(n-1)+i+1}\} \underbrace{a \dots a}_{i-1} \bar{a} y_{k(n-1)+i+2} \underbrace{a \dots a}_{n-i-2}]\}}_{n-3}$$

$$\overline{\{[\{u_{k(n-1)+i+1}\} \underbrace{a \dots a}_{i-1} \bar{a} y_{k(n-1)+i+2} \underbrace{a \dots a}_{n-i-2}]\}} \underbrace{a \dots a}_{n-2} \bar{a} \{u_{k(n-1)+i+2}\},$$

где $i = 1, 2, \dots, n-2$.

По условию $\{a\} = a$, а так как $u, a \in H$, то

$$\{u\} = \{[y_1 y_2 \dots y_{m(n-1)+1}]\} = a.$$

Поэтому, используя нейтральность указанных последовательностей, будем иметь

$$u = [y_1 y_2 \dots y_{m(n-1)+1}] =$$

$$= [\underbrace{a \dots a}_{n-2} \underbrace{[\bar{a}[\{u_0\} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \bar{a} y_1] \underbrace{\{[\{u_0\} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \bar{a} y_1]\} \dots \{[\{u_0\} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \bar{a} y_1]\}}_{n-3} \overline{\{[\{u_0\} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \bar{a} y_1]\}}]}_{v_1} \underbrace{a \dots a}_{n-2}$$

$$\underbrace{[\bar{a}[\{u_1\}y_2\underbrace{a\ldots a}_{n-2}]\underbrace{\{[\{u_1\}y_2\underbrace{a\ldots a}_{n-2}]\}\ldots\{[\{u_1\}y_2\underbrace{a\ldots a}_{n-2}]\}}_{n-3}\overline{\{[\{u_1\}y_2\underbrace{a\ldots a}_{n-2}]\}}]}_{v_2}\underbrace{a\ldots a}_{n-2}$$

$$\underbrace{[\bar{a}[\{u_2\}\bar{a}y_3\underbrace{a\ldots a}_{n-3}]\underbrace{\{[\{u_2\}\bar{a}y_3\underbrace{a\ldots a}_{n-3}]\}\ldots\{[\{u_2\}\bar{a}y_3\underbrace{a\ldots a}_{n-3}]\}}_{n-3}\overline{\{[\{u_2\}\bar{a}y_3\underbrace{a\ldots a}_{n-3}]\}}]}_{v_3}\underbrace{a\ldots a}_{n-2}\ldots$$

$$\ldots v_{m(n-1)+1}\underbrace{a\ldots a}_{n-2}\,\bar{a}\,\{u_{m(n-1)+1}\}] =$$

$$= [\underbrace{a\ldots a}_{n-2}v_1\underbrace{a\ldots a}_{n-2}v_2\underbrace{a\ldots a}_{n-2}v_3\ldots\underbrace{a\ldots a}_{n-2}v_{m(n-1)+1}\{[y_1y_2\ \ldots\ y_{m(n-1)+1}]\}] =$$

$$= [\underbrace{a\ldots a}_{n-2}v_1\underbrace{a\ldots a}_{n-2}v_2\underbrace{a\ldots a}_{n-2}v_3\ldots\underbrace{a\ldots a}_{n-2}v_{m(n-1)+1}a],$$

где

$$v_{m(n-1)+1} = [\bar{a}[\{u_{m(n-1)}\}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}\bar{a}y_{m(n-1)+1}]\underbrace{\{[\{u_{m(n-1)}\}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}\bar{a}y_{m(n-1)+1}]\}\ldots\{[\{u_{m(n-1)}\}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}\bar{a}y_{m(n-1)+1}]\}}_{n-3}$$

$$\overline{\{[\{u_{m(n-1)}\}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}\bar{a}y_{m(n-1)+1}]\}}].$$

Таким образом, доказано равенство

$$u = [\underbrace{a\ldots a}_{n-2}v_1\underbrace{a\ldots a}_{n-2}v_2\underbrace{a\ldots a}_{n-2}v_3\ldots\underbrace{a\ldots a}_{n-2}v_{m(n-1)+1}a].$$

Так как все $v_1, v_2, \ldots, v_{m(n-1)+1}$ принадлежат T и элемент u выбран в H произвольно, то по теореме 2.6 из [4] имеем включение $H \subseteq \langle T \cup \{a\} \rangle$. Обратное включение $\langle T \cup \{a\} \rangle \subseteq H$ следует из доказанного ранее включения $T \subseteq H$. Таким образом, $H = \langle T \cup \{a\} \rangle$. Теорема доказана.

Если n-арная подгруппа H имеет в n-арной группе G конечный индекс, то число всех представителей во множестве S совпадает с этим индексом. Поэтому из доказанной теоремы вытекает

Следствие. n-Арная подгруппа конечного индекса в конечно порожденной n-арной группе конечно порождена.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Гальмак, А.М.*** Определения n-арной группы / А.М. Гальмак // Препринт ГГУ им. Ф. Скорины. – 1994. – № 16. – 43 с.
2. ***Dudek, W.A.*** On some old and new problems in n-ary groups / W.A. Dudek // Quasigroups and Related Systems. – 2001. – Vol. 8. – P. 15-36.
3. ***Gleichgewicht B.*** Remarks on n-groups as abstract algebras / B. Gleichgewicht, K. Glazek // Collq Math. – 1967. – Vol. 17. – № 2. – P. 209-219.
4. ***Гальмак, А.М.*** Конгруэнции полиадических групп / А.М. Гальмак. – Минск: Беларуская навука, 1999. – 182 с.

5. ***Гальмак, А.М.*** n-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.
6. ***Щучкин, Н.А.*** Взаимосвязь п-групп и групп / Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. – 2003. – Т. 4. – Вып. 1(5). – С. 125-141.
7. ***Каргаполов, М.И.*** Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
8. ***Магнус, В.*** Комбинаторная теория групп / В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитер. – М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 15.10.2009 г.