УДК 512.542

С.Ф. КАМОРНИКОВ, Л.А. ВОРОБЕЙ, И.А. КУЗМЕНКОВА

О РЕШЕТКЕ РЕГУЛЯРНЫХ ТРАНЗИТИВНЫХ ПОДГРУППОВЫХ ФУНКТОРОВ

В работе изучаются свойства регулярных транзитивных подгрупповых функторов. Доказывается, что решетка всех разрешимых регулярных транзитивных подгрупповых функторов является решеткой с дополнением.

В работе рассматриваются только конечные группы. Используемые определения и обозначения стандартны, их можно найти в ([1; 2]). Напомним лишь некоторые. Отображение θ, сопоставляющее каждой группе G некоторую непустую систему $\theta(G)$ ее подгрупп, называется *подгрупповым функтором*, если для любого изоморфизма φ каждой группы G выполняется равенство

$$(\theta(G))^{\varphi} = \theta(G^{\varphi}).$$

Подгрупповой функтор θ называется *регулярным*, если для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ имеет место

$$(\theta(A))^{\varphi} = \theta(B),\ (\theta(B))^{\varphi^{-1}} \subseteq \theta(A),$$

и, кроме того, $G \in \theta(G)$ для любой группы G.

Если же из $K \in \theta(H)$ и $H \in \theta(G)$ всегда следует $K \in \theta(G)$, то подгрупповой функтор θ называется *транзитивным*.

В теории формаций идея регулярного транзитивного подгруппового функтора связана с $\mathfrak{F}$-субнормальными (Картер, Хоукс [3], Л.А. Шеметков [4]) и $\mathfrak{F}$-достижимыми (Кегель [5]) подгруппами, естественно обобщающими понятие субнормальной подгруппы.

Следуя [1], обозначим через $Reg_{tr}(\Theta)$ множество всех регулярных транзитивных подгрупповых функторов и введем на этом множестве частичный порядок $\leq$, полагая, что отношение $\theta_1 \leq \theta_2$ имеет место тогда и только тогда, когда для любой группы G справедливо включение

$$\theta_1(G) \subseteq \theta_2(G).$$

Для совокупности $\{\theta_i | i \in I\}$ из $Reg_{tr}(\Theta)$ определим пересечение $\theta = \bigcap_{i \in I} \theta_i$ следующим образом:

$$\theta(G) = \bigcap_{i \in I} \theta_i(G)$$

для любой группы G.

Простая проверка показывает, что θ — регулярный транзитивный подгрупповой функтор. Этот функтор является точной нижней

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

гранью множества $\{\theta_i | i \in I\}$ в $Reg_{tr}(\mathfrak{G})$. Таким образом, $Reg_{tr}(\mathfrak{G})$ – полная решетка, единицей которой является подгрупповой функтор 1_G, выделяющий в каждой группе все ее подгруппы, а нулем – тривиальный подгрупповой функтор 0_G, выделяющий в каждой группе G только саму группу G.

Подгрупповой функтор θ, рассматриваемый только на множестве всех разрешимых групп, называется разрешимым. Множество всех разрешимых регулярных транзитивных подгрупповых функторов обозначим через $Reg_{tr}(\mathfrak{S})$.

В [6] под номером 1.5.26 поставлен следующий вопрос: *“Существуют ли в решетке $Reg_{tr}(\mathfrak{G})$ дополняемые элементы, отличные от 0_G и 1_G?”*. Частично ответ на этот вопрос дан в работе [7], где построены формационные примеры нетривиальных регулярных транзитивных подгрупповых функторов, имеющих дополнения в $Reg_{tr}(\mathfrak{G})$. Практически исчерпывающий ответ на вопрос 1.5.26 предлагается в данной работе: в $Reg_{tr}(\mathfrak{G})$ существует континуум дополняемых элементов, а в $Reg_{tr}(\mathfrak{S})$ все элементы дополняемы.

Таким образом, ситуация с дополняемостью элементов в решетках $Reg_{tr}(\mathfrak{G})$ и $Reg_{tr}(\mathfrak{S})$ полярно отличается от той ситуации, которая имеет место в решетке $Reg(\mathfrak{G})$ всех регулярных подгрупповых функторов. Напомним, что в $Reg(\mathfrak{G})$ дополняемы только нулевой и единичный элементы ([8]).

Отметим еще, что исследования выполнены в контексте общей задачи классификации всех регулярных транзитивных подгрупповых функторов, предложенной А.Н. Скибой (вопрос 1.2.12 из [2]).

Пусть θ – подгрупповой функтор. Подгруппа H группы G называется:

1) *θ-субнормальной*, если либо H=G, либо существует такая максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G,$$

что $H_{i-1} \in \theta(H_i)$ для всех i = 1, 2, ..., n;

2) *θ-субабнормальной*, если либо H=G, либо существует такая максимальная цепь

$$H = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_k = G,$$

что $M_{i-1} \notin \theta(M_i)$ для всех i = 1, 2, ..., k.

Если θ – подгрупповой функтор, то множество всех θ-субнормальных подгрупп группы G будем обозначать $sub_\theta(G)$, а множество всех ее θ-субабнормальных подгрупп – $subab_\theta(G)$.

Лемма 1. *Если θ – подгрупповой функтор, то:*

1) *функция* $\mathrm{sub}_\theta : G \mapsto \mathrm{sub}_\theta(G)$ *является подгрупповым функтором;*

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

2) *функция* $\mathrm{subab}_\theta : G \mapsto \mathrm{subab}_\theta(G)$ *является подгрупповым функтором.*

Доказательство. Утверждение 1) доказывается непосредственной проверкой.

2) Пусть $H \in \mathrm{subab}_\theta(G)$ и φ – изоморфизм группы G. Если $H=G$, то, очевидно, $H^\varphi \in \mathrm{subab}_\theta(G^\varphi)$. Значит, $H \neq G$ и существует такая максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G,$$

что $H_{i-1} \notin \theta(H_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим максимальную цепь

$$H^\varphi = H_0^\varphi \subset H_1^\varphi \subset \ldots \subset H_n^\varphi = G^\varphi.$$

Предположим, что $H_{k-1}^\varphi \in \theta(H_k^\varphi)$ для некоторого $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Тогда из того, что θ – подгрупповой функтор, имеем

$$H_{k-1} = \left(H_{k-1}^\varphi\right)^{\varphi^{-1}} \in \left(\theta\left(H_k^\varphi\right)\right)^{\varphi^{-1}} = \theta\left(\left(H_k^\varphi\right)^{\varphi^{-1}}\right) = \theta(H_k)$$

и, тем самым, приходим к противоречию. Таким образом, $H^\varphi \in \mathrm{subab}_\theta(G^\varphi)$, а значит, $(\mathrm{subab}_\theta(G))^\varphi \subseteq \mathrm{subab}_\theta(G^\varphi)$. Обратное включение доказывается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если θ – регулярный подгрупповой функтор, то θ-субабнормальный подгрупповой функтор subab_θ также является регулярным.*

Доказательство. Пусть подгруппа H группы G является θ-субабнормальной и $H \neq G$. Тогда существует такая максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G, \tag{1}$$

что H_{i-1} не принадлежит $\theta(H_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть N – нормальная подгруппа группы G. И пусть H_{i-1} и H_i – такие члены цепи (1), что $H_{i-1}N \neq N$. Покажем, что $H_{i-1}N$ – максимальная подгруппа в H_iN. Допустим, что $H_{i-1}N \subset L \subset H_iN$ для некоторой подгруппы L. Тогда поскольку подгруппа H_{i-1} максимальна в H_i, то из $H_{i-1} \subseteq H_{i-1} \cap L \subseteq H_i \cap L \subseteq H_i$ следует, что либо $H_i \cap L = H_{i-1}$, либо $H_i \cap L = H_i$. Пусть имеет место первое. Тогда поскольку

$$L = L \cap H_iN = (L \cap H_i)N,$$

то $L = H_{i-1}N$. Противоречие. Значит, $H_i \cap L = H_i$, то есть $H_i \subseteq L$. Поэтому $H_iN \subseteq L$. Противоречие.

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

Итак, ряд

$$HN/N = H_0N/N \subseteq H_1N/N \subseteq \ldots \subseteq H_nN/N = G/N \qquad (2)$$

таков, что в нем для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$ имеет место одно из двух условий:

1) $H_{i-1}N/N = H_i N/N$;

2) $H_{i-1}N/N$ – максимальная подгруппа в $H_i N/N$.

Не нарушая общности рассуждений, мы можем считать, что все члены ряда (2) различны.

Допустим, что $H_{i-1}N/N \in \theta(H_iN/N)$. Так как из максимальности подгруппы H_{i-1} в H_i справедливы равенства

$$H_{i-1}/H_i \cap N = H_i \cap H_{i-1}N/H_i \cap N = H_{i-1}(H_i \cap N)/H_i \cap N,$$

то $H_{i-1}/H_i \cap N \in \theta(H_i/H_i \cap N)$. Отсюда и из регулярности подгруппового функтора θ следует, что $H_{i-1} \in \theta(H_i)$. Полученное противоречие доказывает, что $HN/N \in \mathrm{subab}_\theta(G/N)$.

Пусть теперь $H/N \in \mathrm{subab}_\theta(G/N)$ и $H/N \neq G/N$. Тогда существует такая максимальная цепь

$$H/N = H_0/N \subset H_1/N \subset \ldots \subset H_k/N = G/N,$$

что H_{i-1}/N не принадлежит $\theta(H_i/N)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Так как θ – регулярный подгрупповой функтор, то H_{i-1} не принадлежит $\theta(H_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Значит, $H \in \mathrm{subab}_\theta(G)$. Лемма доказана.

Если θ – регулярный подгрупповой функтор, то непосредственной проверкой устанавливается справедливость следующих лемм, имеющих самостоятельное значение.

Лемма 3. *Пусть θ – регулярный подгрупповой функтор. Тогда θ-субнормальный подгрупповой функтор sub_θ также является регулярным.*

Лемма 4. *Для любого подгруппового функтора θ подгрупповые функторы sub_θ и $subab_\theta$ являются транзитивными.*

Пусть θ – подгрупповой функтор. Собственная подгруппа H группы G называется θ-максимальной, если $H \in \theta(G)$ и всегда из $H \subseteq K \subseteq G$ и $K \in \theta(G)$ следует, что либо $K = H$, либо $K = G$.

Лемма 5. *Пусть θ – разрешимый регулярный подгрупповой функтор. Если H – θ-максимальная подгруппа группы G, то подгруппа H максимальна в группе G.*

Доказательство. Пусть G – разрешимая группа. Предположим, что подгруппа H не максимальна в G. Пусть M – максимальная подгруппа группы G, содержащая H. Пусть $C=Core_G(M)$ и K/C – главный фактор группы G. Заметим, что $G = MK$ и $M \cap K = C$. Рассмотрим два случая.

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

1. Пусть $C \subseteq H$. Допустим, что $HK = G$. Тогда из $H \subseteq M$ и $M \cap K = C$ следует, что $H = M$, то есть H – максимальная подгруппа группы G. Пришли к противоречию. Значит, $HK \neq G$. Тогда из определения подгруппового функтора следует, что $HK/K \in \theta(G/K)$, а следовательно, $HK \in \theta(G)$. Так как K не содержится в H, то $H \subset HK$. Кроме того, $HK \subset G$. Пришли к противоречию с тем, что H – θ-максимальная подгруппа группы G.

2. Пусть C не входит в H. Тогда $H \subset HC \subseteq M \subseteq G$ и $HC \in \theta(G)$. Снова пришли к противоречию. Лемма доказана.

Следуя [9], подгрупповой функтор θ будем называть *включающим*, если для любой подгруппы U группы G всегда из $H \in \theta(G)$ и $H \subseteq U \subseteq G$ следует $H \in \theta(G)$.

Лемма 6. *Пусть θ – разрешимый регулярный транзитивный включающий подгрупповой функтор. Если H – собственная подгруппа группы G и $H \in \theta(G)$, то существует такая максимальная цепь*

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G,$$

что $H_i \in \theta(G)$ для всех $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой лемма не верна. Заключим H в θ-максимальную подгруппу группы G. Ввиду леммы 5 имеем, что M – максимальная подгруппа группы G. Так как функтор θ является включающим, то из $H \in \theta(G)$ следует $H \in \theta(M)$. Теперь из $|M| \leq |G|$ заключаем, что существует максимальная цепь

$$H = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_t = M,$$

в которой $M_i \in \theta(M)$ для всех $i = 0, 1, 2, \ldots, t$. Так как функтор θ транзитивен, то из $M \in \theta(G)$ следует, что $M_i \in \theta(G)$ для всех $i = 0, 1, 2, \ldots, t$. Значит, цепь

$$H = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_t = M \subset G$$

является искомой. Лемма доказана.

Следующая теорема устанавливает связь разрешимых регулярных транзитивных включающих подгрупповых функторов с рассмотренными выше θ-субнормальными подгрупповыми функторами.

Теорема 1. *Пусть θ – разрешимый регулярный транзитивный включающий подгрупповой функтор. Тогда $\theta = \mathrm{sub}_\theta$.*

Доказательство. Пусть G – произвольная разрешимая группа и $H \in \theta(G)$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $H \neq G$. Тогда ввиду леммы 6 существует такая максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G,$$

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

что $H_i \in \theta(G)$ для всех $i = 0, 1, 2, ..., n$. Так как подгрупповой функтор θ является включающим, то $H_{i-1} \in \theta(H_i)$ для любого $i = 1, 2, ..., n$. Таким образом, $\theta(G) \subseteq \mathrm{sub}_\theta(G)$.

Пусть теперь $K \in \mathrm{sub}_\theta(G)$. Тогда ввиду транзитивности функтора θ имеем, что $K \in \theta(G)$. Таким образом, $\mathrm{sub}_\theta(G) \subseteq \theta(G)$. Теорема доказана.

Замечание. Не каждый регулярный транзитивный подгрупповой функтор θ является θ-субнормальным. Например, подгрупповой функтор sn, выделяющий в каждой группе G все ее субнормальные подгруппы, не является sn-субнормальным, так как для простой неабелевой группы A справедливы равенства $\mathrm{sn}(A) = \{1, A\}$, $\mathrm{sub}_{\mathrm{sn}}(A) = \{A\}$. Поэтому условие разрешимости функтора θ в теореме 1 существенно и его отбросить нельзя.

Отметим еще, что в [10] леммы 5 и 6 приведены для так называемых ЕТР-функторов, которые являются включающими.

Лемма 7. *Пусть θ – разрешимый регулярный транзитивный подгрупповой функтор. Тогда и только тогда θ-подгруппа H разрешимой группы G является θ-субабнормальной в G, когда $H = G$.*

Доказательство. Предположим, что лемма не верна. Пусть тогда G – группа наименьшего порядка, для которой лемма не выполняется, т.е. в G имеется собственная θ-субабнормальная θ-подгруппа H.

Если N – минимальная нормальная подгруппа группы G, то ввиду регулярности подгруппового функтора θ и на основании леммы 2 имеем, что HN/N – θ-субабнормальная θ-подгруппа группы G/N. Так как $|G/N| < |G|$, то для G/N лемма выполняется, а потому $HN/N = G/N$ и $HN = G$. Если $N \subseteq H$, то $H = G$ и мы приходим к противоречию с выбором группы G.

Значит, N не содержится в H. Так как группа G разрешима, а N – ее минимальная нормальная подгруппа, то H – максимальная подгруппа группы G. Ввиду условия леммы имеем, что $H \in \theta(G)$. А так как подгруппа H является θ-субабнормальной в G, то ввиду максимальности H в G имеем, что $H \notin \theta(G)$. Снова пришли к противоречию. Значит, $H = G$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Решетка всех разрешимых регулярных транзитивных подгрупповых функторов является решеткой с дополнением.*

Доказательство. Пусть θ – произвольный элемент решетки $Reg_{tr}(\mathfrak{S})$, а $\tau = \mathrm{subab}_\theta$. Ввиду лемм 2 и 4 подгрупповой функтор τ является регулярным и транзитивным. Пусть $\alpha = \theta \vee \tau$ – точная верхняя грань множества $\{\theta, \tau\}$ в решетке $Reg_{tr}(\mathfrak{S})$. Тогда, в частности, $\theta \le \alpha$, $\tau \le \alpha$, а значит, $\theta(G) \subseteq \alpha(G)$ и $\tau(G) \subseteq \alpha(G)$ для любой группы G.

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

Пусть H – произвольная подгруппа разрешимой группы G и $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_t = G$ – произвольная максимальная цепь, соединяющая подгруппу H с группой G. Очевидно, что для любого $i = 1, 2, \ldots, t$ либо $H_{i-1} \in \theta(H_i)$, либо $H_{i-1} \notin \theta(H_i)$, а значит, либо $H_{i-1} \in \theta(H_i)$, либо $H_{i-1} \in \tau(H_i)$. Поэтому $H_{i-1} \in (\theta \vee \tau)(H_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, t$. Так как подгрупповой функтор $\alpha = \theta \vee \tau$ является транзитивным, то $H \in \alpha(G)$. Следовательно, $\alpha(G)$ – множество всех подгрупп группы G. Таким образом, $\theta \vee \tau = 1_G$ – единица решетки $Reg_{tr}(\mathfrak{S})$.

Ввиду леммы 7, θ-подгруппа H разрешимой группы G является θ-субабнормальной тогда и только тогда, когда $H = G$. Поэтому для любой разрешимой группы G справедливо равенство $\theta(G) \cap \tau(G) = \{G\}$, а значит, точная нижняя грань $\theta \wedge \tau$ множества $\{\theta, \tau\}$ в решетке $Reg_{tr}(\mathfrak{S})$ является нулем этой решетки.

Итак, $\theta \wedge \tau = 0_G$, $\theta \vee \tau = 1_G$, поэтому подгрупповой функтор θ дополняем в решетке $Reg_{tr}(\mathfrak{S})$. Теорема доказана.

Вопрос. *Является ли $Reg_{tr}(\mathfrak{S})$ решеткой с дополнением?*

ЛИТЕРАТУРА

1. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников [и др.]. – Мн.: Беларуская навука, 2003.
2. ***Скиба, А.Н.*** Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн.: Беларуская навука, 1997.
3. ***Carter, R.*** The $\mathfrak{F}$-normalisers of a finite soluble groups / R. Carter, T. Hawkes // J. Algebra. – 1967. – V.5. – № 2. – P. 175-202.
4. ***Шеметков, Л.А.*** Ступенчатые формации групп / Л.А. Шеметков // Мат. сб. – 1974. – Т. 94. – № 4. – С. 628-648.
5. ***Kegel O.H.*** Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Bd. 30. – № 3. – S. 225-228.
6. ***Каморников, С.Ф.*** Подгрупповые функторы в теории классов конечных групп / С.Ф. Каморников и др. // Препринты ГГУ им. Ф. Скорины. 2001. – № 2(107). – Гомель: ГГУ.
7. ***Воробей, Л.А.*** О свойствах решетки транзитивных регулярных подгрупповых функторов / Л.А. Воробей // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2003. – № 2. – С. 22-24.
8. ***Воробей, Л.А.*** О дополняемых элементах решетки подгрупповых функторов гомоморфа / Л.А. Воробей, С.Ф. Каморников // Вопросы алгебры. – 1998. – Вып. 12. – С. 74-77. – Гомель: ГГУ.
9. ***Barnes, D.W.*** Gaschütz functors of finite soluble groups / D.W. Barnes, O.H. Kegel // Math. Z. – 1966. – Vol. 94. – № 2. – P. 134-142.
10. ***Васильев, А.Ф.*** О функторном методе изучения решеток подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников // Сиб. матем. журнал. – 2001. – Т. 42. – № 1. – С. 30-40.

Поступила в редакцию 09.12.2009 г.

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова