УДК 512.548

А.М. ГАЛЬМАК

ОБ ОПЕРАЦИИ $[\ ]_{l,\sigma,k}$

В предыдущих работах автора изучалась l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая была определена для любых $l \geq 2$, $k \geq 2$ и произвольной подстановки $\sigma \in S_k$ на k-ой декартовой степени A^k полугруппы A. В данной работе в определении операции $[\ ]_{l\Pi\sigma,k}$ полугруппа заменяется произвольным группоидом. В связи с этим возникает естественный вопрос: какие из полученных ранее результатов об операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ для случая полугрупп окажутся верными и для случая произвольных группоидов? Приведены примеры таких результатов. В частности, установлено, что если σ – нетождественная подстановка, а группоид A содержит более одного элемента, то в l-арном группоиде $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ нет единиц; если к тому же группоид A обладает единицей, то l-арный группоид $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ неабелев.

1. Определение. Пусть A – группоид, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из S_k. Определим на A^k вначале бинарную операцию:

$$\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1 y_{\sigma(1)}, x_2 y_{\sigma(2)}, \ldots, x_k y_{\sigma(k)}), \quad (1)$$

а затем l-арную операцию:

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\ldots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)) \ldots)). \quad (2)$$

Понятно, что операция $[\ ]_{2,\sigma,k}$ совпадает с операцией $\overset{\sigma}{\circ}$.

2. Замечание. Легко заметить, что если $\sigma = (12 \ldots k)$, то операция $\overset{\sigma}{\circ}$ совпадает с операцией

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \circ (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1y_2, x_2y_3, \ldots, x_{k-1}y_k, x_ky_1)$$

из [1, определения 2.2.3], а операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ – с операцией $[\ ]_{l,k}$ из того же определения. Операции $\circ$ и $[\ ]_{l,k}$ впервые были определены в [2]. Там же в [2] впервые была определена и операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ для случая полугруппы A. Заметим также, что операция $[\ ]_{n,n-1}$ аналогична n-арной операции, которую Пост определил на множестве всех n-арных подстановок [3].

3. Теорема. Пусть A – полугруппа,

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) \in A^k, \ i = 1, 2, \ldots, l.$$

Тогда

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = (y_1, y_2, \ldots, y_k),$$

где

$$y_j = x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ \ldots \ x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}x_{l\sigma^{l-1}(j)}, \ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Доказательство. Полагая

$$\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l = (y_1^{(l-1)}, y_2^{(l-1)}, \ \ldots, \ y_k^{(l-1)}),$$

$$\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l) = (y_1^{(l-2)}, y_2^{(l-2)}, \ldots, y_k^{(l-2)}),$$

....

$$\mathbf{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\ldots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)) \ldots) = (y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots, y_k^{(2)})$$

и используя (1) и (2), получим

$$y_j^{(l-1)} = x_{(l-1)j} x_{l\sigma(j)},$$

$$y_j^{(l-2)} = x_{(l-2)j} y_{\sigma(j)}^{(l-1)} = x_{(l-2)j} x_{(l-1)\sigma(j)} x_{l\sigma(\sigma(j))} = x_{(l-2)j} x_{(l-1)\sigma(j)} x_{l\sigma^2(j)},$$

....

$$y_j^{(2)} = x_{2j} x_{3\sigma(j)} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-3}(j)} x_{l\sigma^{l-2}(j)},$$

$$y_j = x_{1j} y_{\sigma(j)}^{(2)} = x_{1j} x_{2\sigma(j)} x_{3\sigma(\sigma(j))} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-3}(\sigma(j))} x_{l\sigma^{l-2}(\sigma(j))} =$$

$$= x_{1j} x_{2\sigma(j)} x_{3\sigma^2(j)} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{l\sigma^{l-1}(j)}.$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает, что если A – полугруппа, то определение 1 и определение 3.1.4 из [1] определяют одну и ту же l-арную операцию. Можно также сказать, что определение 1 обобщает l-арную операцию 3.1.4 из [1], на случай группоидов. Из теоремы 3, если учесть замечание 2, вытекает предложение 3.1.5 [1].

Многие утверждения из [1] об операции $[\ ]_{l,k}$ могут быть обобщены на случай операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$. Например, следующие две леммы, являющиеся следствиями определения 1, обобщают леммы 2.2.4 и 2.2.5 из [1] соответственно.

4. Лемма. *Пусть A – группоид, $m \in \{1, \ldots, l-2\}$. Тогда*

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_m [\mathbf{x}_{m+1} \ldots \mathbf{x}_l]_{l-m,\sigma,k}]_{m+1,\sigma,k},$$

в частности,

$$[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} [\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l-1,\sigma,k},$$

$$[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{l-2}(\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)]_{l-1,\sigma,k}.$$

5. Лемма. *Пусть A – группоид с единицей 1,*

$$m \in \{1, \ldots, l-1\},\ \mathbf{e} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}) \in A^k,\ \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in A^k.$$

Тогда

$$[\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l}]_{l,\sigma,k} = \mathbf{e};\ [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_m \underbrace{\mathbf{e} \ \ldots \ \mathbf{e}}_{l-m}]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_m]_{m,\sigma,k}.$$

Следующее предложение обобщает предложение 2.2.7 из [1].

6. Предложение. *Если A – группоид с единицей 1, содержащий более одного элемента, σ – нетождественная подстановка из S_k, то операция $\overset{\sigma}{\circ}$ не является ассоциативной.*

Доказательство. Для $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in A^k$ положим

$$(\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y}) \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{z} = (u_1, u_2, ..., u_k),\ \mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{y} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{z}) = (v_1, v_2, ..., v_k).$$

Тогда, согласно определению операции $\overset{\sigma}{\circ}$,

$$u_j = x_j y_{\sigma(j)} z_{\sigma(j)},\ v_j = x_j y_{\sigma(j)} z_{\sigma^2(j)},\ j = 1, ..., k.$$

Если теперь положить $x_j = y_{\sigma(j)} = z_{\sigma(j)} = 1$, то $u_j = 1$, $v_j = z_{\sigma^2(j)}$. Так как σ – нетождественная подстановка, то $\sigma^2(j) \neq \sigma(j)$, для некоторого $j = 1, ..., k$. Поэтому $v_j = z_{\sigma^2(j)}$ можно выбрать отличным от $z_{\sigma(j)} = 1$, откуда следует $u_j \neq v_j$. Следовательно,

$$(\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y}) \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{z} \neq \mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{y} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{z}).$$

Предложение доказано.

В [1] большинство результатов об операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ получены для случая, когда группоид A является полугруппой. Возникает естественный вопрос: какие из этих результатов останутся верными, если отказаться от ассоциативности операции в группоиде A?

7. Теорема. *Пусть σ – нетождественная подстановка, а группоид A содержит единицу 1 и элемент a, отличный от 1. Тогда l-арный группоид $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ неабелев.*

Доказательство. Так как σ – нетождественная подстановка, то найдется такое $j \in \{1, ..., k\}$, что $\sigma(j) = s \neq j$, где $j \in \{1, ..., k\}$. Положив

$$\mathbf{e} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}),\ \mathbf{a} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{s-1}, a, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-s})$$

и применив лемму 5, получим

$$[\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e} \ \ldots \ \mathbf{e}}_{l-1}]_{l,\sigma,k} = \mathbf{a} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{s-1}, a, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-s}),$$

$$[\mathbf{e}\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e} \ \ldots \ \mathbf{e}}_{l-2}]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{e}\mathbf{a}]_{2,\sigma,k} = \mathbf{e} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{a} =$$

$$= (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}) \overset{\sigma}{\circ} (\underbrace{1, \ldots, 1}_{s-1}, a, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-s}) = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}).$$

Следовательно,

$$[\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e} \ \ldots \ \mathbf{e}}_{l-1}]_{l,\sigma,k} \neq [\mathbf{e}\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e} \ \ldots \ \mathbf{e}}_{l-2}]_{l,\sigma,k},$$

то есть l-арный группоид $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ не является абелевым. Предложение доказано.

Если в теореме 7 положить $\sigma = (12 \ldots k)$, то получим предложение 2.8.1 [1].

Если в теореме 7 в качестве группоида A взять полугруппу, то получим предложение 3.5.1 [1].

8. Лемма. *Если σ – нетождественная подстановка, а группоид A содержит более одного элемента, то в группоиде $< A^k, \circ >$ нет единиц.*

Доказательство. Так как σ – нетождественная подстановка, то найдется такое $j \in \{1, \ldots, k\}$, что $\sigma(j) = s \neq j$, где $s \in \{1, \ldots, k\}$.

Предположим, что $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$ – единица в $< A^k, \overset{\sigma}{\circ} >$, и для любого $a \in A$ положим

$$\mathbf{a} = (e_1, \ldots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \ldots, e_k).$$

Так как $\mathbf{e}$ – единица в $< A^k, \overset{\sigma}{\circ} >$, то

$$\mathbf{a} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{e} = \mathbf{a} = (e_1, \ldots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \ldots, e_k), \tag{3}$$

а, согласно определению 1, j-ая компонента элемента $\mathbf{a} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{e}$ равна $ae_{\sigma(j)} = ae_s$, откуда и из (3) следует $a = ae_s$. Последнее равенство верно для любого $a \in A$, в частности $e_j = e_je_s$.

Так как $\mathbf{e}$ – единица в $< A^k, \overset{\sigma}{\circ} >$, то

$$\mathbf{e} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{a} = \mathbf{a} = (e_k, \ldots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \ldots, e_k), \tag{4}$$

а, согласно определению 1, j-ая компонента элемента $\mathbf{e} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{a}$, ввиду $\sigma(j) = s \neq j$, равна $e_je_{\sigma(j)} = e_je_s$, откуда и из (4) следует $a = e_je_s$. Сравнивая это равенство с полученным выше равенством $e_j = e_je_s$, получаем $a = e_j$, что невозможно, если выбрать $a \neq e_j$. Лемма доказана.

9. Теорема. *Если σ – нетождественная подстановка, а группоид A содержит более одного элемента, то в l-арном группоиде $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,\square k} >$ нет единиц.*

Доказательство. Ввиду леммы 8, считаем $l \geq 3$.

Так как σ – нетождественная подстановка, то найдется такое $j \in \{1, \ldots, k\}$, что $\sigma(j) = s \neq j$, где $s \in \{1, \ldots, k\}$.

Предположим, что $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$ – единица в $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, и для любого $a \in A$ положим

$$\mathbf{a} = (e_1, \ldots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \ldots, e_k).$$

Так как $\mathbf{e}$ – единица в $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, то

$$[\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-1}]_{l,\sigma,k} = \mathbf{a} = (e_1, \ldots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \ldots, e_k), \tag{5}$$

а так как по лемме 4

$$[\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-1}]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{a}\mathbf{e}[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l-2,\sigma,k}]_{3,\sigma,k},$$

то, положив

$$[\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-1}]_{l,\sigma,k} = (u_1, \ldots, u_k),\ [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l-2,\sigma,k} = (v_1, \ldots, v_k)$$

и используя определение операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, получим $u_j = a(e_{\sigma(j)}v_{\sigma^2(j)})$, откуда и из (5) следует $a = a(e_{\sigma(j)}v_{\sigma^2(j)})$. Последнее равенство верно для любого $a \in A$, в частности

$$e_j = e_j(e_{\sigma(j)}v_{\sigma^2(j)}) = e_j(e_s v_{\sigma(s)}). \quad (6)$$

Так как $\mathbf{e}$ – единица в $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, то

$$[\mathbf{e}\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l,\sigma,k} = \mathbf{a} = (e_1, \ldots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \ldots, e_k), \quad (7)$$

а так как по лемме 4

$$[\mathbf{e}\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{e}\mathbf{a}[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l-2,\sigma,k}]_{3,\sigma,k},$$

то, положив

$$[\mathbf{e}\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l,\sigma,k} = (w_1, \ldots, w_k)$$

и используя определение операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, а также условие $\sigma(j) = s \neq j$, получим

$$w_j = e_j(e_{\sigma(j)}v_{\sigma^2(j)}) = e_j(e_s v_{\sigma(s)}),$$

где $(v_1, \ldots, v_k)$ те же, что и выше. Сравнивая w_j с j-ой компонентой в (7), получаем $a = e_j(e_s v_{\sigma(s)})$, откуда и из (6) вытекает $a = e_j$ для любого $a \in A$. Последнее равенство возможно не всегда, так как в A имеются элементы, отличные от e_j. Теорема доказана.

Если в теореме 9 положить $\sigma = (12 \ldots k)$, то получим предложение 2.10.7 [1].

Если в теореме 9 в качестве группоида A взять полугруппу, то получим предложение 3.7.3 [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Гальмак, А.М.*** Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
2. ***Гальмак, А.М.*** Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28-34.
3. ***Post, E.L.*** Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48. – № 2. – P. 208-350.

Поступила в редакцию 21.09.2009 г.