

УДК 517.925

А.Н. БОНДАРЕВ, В.Н. ЛАПТИНСКИЙ

АНАЛИЗ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ГРИНА

Получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости многоточечной краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова.

В данной работе рассматривается задача

$$\frac{dX}{dt} = \lambda A(t)X(t) + \lambda X(t)B(t) + F(t), \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^k M_i X(t_i, \lambda) = 0, \quad (2)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $F(t)$ – непрерывные $(n \times n)$ -матрицы на промежутке $I = [0, \omega]$, λ – скалярный вещественный параметр, M_i ($i = \overline{1, k}$) – заданные постоянные $(n \times n)$ -матрицы, $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_k = \omega$.

Уравнение (1) относится к многомерным системам дифференциальных уравнений специального вида (см., например [1-3]). Краевая задача (1), (2) является задачей типа [2] применительно к уравнению Ляпунова вида (1). Такие задачи играют важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений [1-6]. В данной работе с помощью метода [6] в невырожденном случае изучаются следующие вопросы: разрешимость задачи, построение ее решения и оценки его области локализации. Приведен модельный пример, иллюстрирующий применение полученных результатов.

Примем следующие обозначения:

$$M = \sum_{i=1}^k M_i, \quad \alpha_g = \max_i \int_0^\omega \|G(t, \tau)\| \cdot \|A(\tau)\| d\tau, \quad \beta_g = \max_i \int_0^\omega \|G(t, \tau)\| \cdot \|B(\tau)\| d\tau,$$

$$h_g = \max_i \int_0^\omega \|G(t, \tau)\| \cdot \|F(\tau)\| d\tau, \quad q_g = \alpha_g + \beta_g, \quad \delta = \max_{1 \leq p \leq k-1} \delta_p,$$

$$\delta_p = \max \left\{ \|M^{-1}M_1\|, \dots, \|M^{-1} \sum_{i=1}^p M_i\|, \|M^{-1} \sum_{i=p+1}^k M_i\|, \dots, \|M^{-1}M_k\| \right\},$$

$$\varepsilon = |\lambda|, \quad \|X\|_C = \max_t \|X(t)\|,$$

где $t \in I$, $\|\cdot\|$ – любая подходящая норма матриц ($\|PQ\| \leq \|P\| \cdot \|Q\|$), например, норма в [7, с. 21], $C = C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ – банахово пространство непрерывных $(n \times n)$ -матриц.

Теорема. Пусть выполнены условия $\det M \neq 0$, $\varepsilon q_g < 1$. Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима, ее решение $X(t, \lambda)$ представимо в виде

$$X(t, \lambda) = X_0(t) + \lambda X_1(t) + \lambda^2 X_2(t) + \dots + \lambda^l X_l(t) + \dots, \quad (3)$$

при этом справедлива оценка

$$\|X(t, \lambda)\| \leq \frac{h_g}{1 - \varepsilon q_g}. \quad (4)$$

Доказательство. С помощью подхода [6, гл. 1] имеем матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2),

$$X(t, \lambda) = \int_0^\omega G(t, \tau) [\lambda A(\tau) X(\tau, \lambda) + \lambda X(\tau, \lambda) B(\tau) + F(\tau)] d\tau, \quad (5)$$

где

$$G(t, \tau) = \begin{cases} M^{-1} \left(\sum_{i=1}^p M_i \right), t_p \leq \tau \leq t_{p+1} \leq t, p = 1, 2, \dots, j-1; \\ M^{-1} \left(\sum_{i=1}^j M_i \right), t_j \leq \tau \leq t \leq t_{j+1}, j = 1, 2, \dots, k-1; \\ -M^{-1} \left(\sum_{i=j+1}^k M_i \right), t_j \leq \tau \leq t \leq t_{j+1}; \\ M^{-1} \left(\sum_{i=j+q}^k M_i \right), t \leq t_{j+q-1} \leq \tau \leq t_{j+q}, p = 2, 3, \dots, k-j. \end{cases}$$

Запишем уравнение (5) в следующем виде:

$$X(t, \lambda) = \lambda \int_0^\omega G(t, \tau) [A(\tau) X(\tau, \lambda) + X(\tau, \lambda) B(\tau)] d\tau + \int_0^\omega G(t, \tau) F(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) будем искать в виде ряда (3). Подставляя (3) в (6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ ,

получим

$$X_0(t) = \int_0^{\omega} G(t, \tau) F(\tau) d\tau, \quad (7)$$

$$X_i(t) = \int_0^{\omega} G(t, \tau) [A(\tau) X_{i-1}(\tau) + X_{i-1}(\tau) B(\tau)] d\tau, \quad i = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Исследуем вопросы сходимости, скорости сходимости ряда (3). Для этого построим соответствующий числовой мажорантный ряд. Выполним оценки по норме в (8), получим

$$\begin{aligned} \|X_i(t)\| &= \left\| \int_0^{\omega} G(t, \tau) [A(\tau) X_{i-1}(\tau) + X_{i-1}(\tau) B(\tau)] d\tau \right\| \leq \\ &\leq \int_0^{\omega} \|G(t, \tau) A(\tau) X_{i-1}(\tau)\| d\tau + \int_0^{\omega} \|G(t, \tau) X_{i-1}(\tau) B(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq \int_0^{\omega} \|G(t, \tau)\| \cdot \|A(\tau)\| \cdot \|X_{i-1}(\tau)\| d\tau + \int_0^{\omega} \|G(t, \tau)\| \cdot \|X_{i-1}(\tau)\| \cdot \|B(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq \left(\int_0^{\omega} \|G(t, \tau)\| \cdot \|A(\tau)\| d\tau + \int_0^{\omega} \|G(t, \tau)\| \cdot \|B(\tau)\| d\tau \right) \|X_{i-1}\|_C = \\ &= (\alpha_g + \beta_g) \|X_{i-1}\|_C = q_g \|X_{i-1}\|_C. \end{aligned}$$

Отсюда следует рекуррентная оценка

$$\|X_i\|_C \leq q_g \|X_{i-1}\|_C, \quad i = 1, 2, \dots \quad (9)$$

На основании (9) имеем явную оценку

$$\|X_i\|_C \leq q_g^i \|X_0\|_C, \quad i = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Используя (10), составим числовой ряд

$$\|X_0\|_C + \varepsilon \|X_1\|_C + \varepsilon^2 \|X_2\|_C + \dots + \varepsilon^i \|X_i\|_C + \dots \quad (11)$$

Поскольку $\varepsilon q_g < 1$, то ряд (11) сходится. Легко видеть, что для суммы $S(\varepsilon)$ ряда (11) имеет место оценка (4). Тогда, очевидно, ряд (3) сходится равномерно по $t \in [0, \omega]$ в области $|\lambda| < 1/q_g$. Согласно [8, с. 160] сумма этого ряда представляет собой решение уравнения (6). Единственность решения $X(t, \lambda)$ следует из принципа сжатых отображений (см., например, [9, с. 605]), примененного к уравнению (6). Таким образом, теорема полностью доказана.

Используя оценку (10), нетрудно получить следующую оценку:

$$\|X(t, \lambda) - \tilde{X}_i(t, \lambda)\| \leq \frac{(\varepsilon q_g)^{i+1} h_g}{1 - \varepsilon q_g}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где $\tilde{X}_i(t, \lambda) = X_0(t) + \lambda X_1(t) + \lambda^2 X_2(t) + \dots + \lambda^i X_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \dots$.

Далее, наряду с принятыми, введем следующие обозначения:

$$\gamma = \|M^{-1}\|, \quad m = \sum_{i=1}^k \|M_i\|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|, \quad h = \max_t \|F(t)\|,$$

$$\tilde{\alpha} = \int_0^\omega \|A(\tau)\| d\tau, \quad \tilde{\beta} = \int_0^\omega \|B(\tau)\| d\tau, \quad \tilde{h} = \int_0^\omega \|F(\tau)\| d\tau, \quad \tilde{q} = \gamma m (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}).$$

Замечание 1. Поскольку $\alpha_g \leq \delta \tilde{\alpha}$, $\beta_g \leq \delta \tilde{\beta}$, $h_g \leq \delta \tilde{h}$, то при выполнении условия $\det M \neq 0$ в области

$$|\lambda| < \frac{1}{\delta(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})} \quad (13)$$

задача (1), (2) однозначно разрешима, ее решение $X(t, \lambda)$ представимо в виде (3), при этом справедлива оценка

$$\|X(t, \lambda)\| \leq \frac{\delta \tilde{h}}{1 - \varepsilon \delta (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})}. \quad (14)$$

Замечание 2. Поскольку $\tilde{\alpha} \leq \alpha \omega$, $\tilde{\beta} \leq \beta \omega$, $\tilde{h} \leq h \omega$, то в данном случае ($\det M \neq 0$) вместо соотношений (13), (14), очевидно, можно принять коэффициентные соотношения

$$|\lambda| < \frac{1}{\delta(\alpha + \beta)\omega}, \quad \|X(t, \lambda)\| \leq \frac{\delta h \omega}{1 - \varepsilon \delta (\alpha + \beta)\omega}. \quad (15)$$

Отметим еще, что к соотношениям (15) можно прийти на основании оценок

$$\alpha_g \leq \alpha \max_t \int_0^\omega \|G(t, \tau)\| d\tau \leq \delta \alpha \omega, \quad \beta_g \leq \beta \max_t \int_0^\omega \|G(t, \tau)\| d\tau \leq \delta \beta \omega,$$

$$h_g \leq h \max_t \int_0^\omega \|G(t, \tau)\| d\tau \leq \delta h \omega.$$

В приведенных выше соотношениях можно воспользоваться следующей оценкой: $\delta < \gamma m$. Тогда соответствующие условия разрешимости станут более удобными для применения.

Замечание 3. С помощью конструктивного метода регуляризации [6, с. 71] в [10] получен алгоритм построения решения задачи (1), (2), более удобный для применения, чем алгоритм (8), однако соответствующие оценки грубее оценок, приведенных выше. В случае двухточечной краевой задачи конструктивный метод регуляризации и метод функций Грина в принципе дают одинаковые результаты (условия однозначной разрешимости, алгоритмы построения и оценки решения). Отметим, что этот случай весьма важен для теории и приложений дифференциальных уравнений, поскольку включает в себя периодическую краевую задачу.

Для иллюстрации применения полученных в данной работе результатов рассмотрим краевую задачу (1), (2) в случае $n=3, k=3$, полагая

$$A(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3t^2 & 0 \\ 0 & 0 & -3t^2 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 0 \\ 0 & 0 & 2t \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t \\ 0 & t & -1 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \text{diag}(1, 0, 0), \quad M_2 = \text{diag}(0, 1, 0), \quad M_3 = \text{diag}(0, 0, 1),$$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{1}{2}, \quad t_3 = 1.$$

Применительно к этой задаче имеем

$$M = \text{diag}(1, 1, 1), \quad \gamma = 1, \quad m = 3, \quad \tilde{\alpha} = 1, \quad \tilde{\beta} = 1, \quad \tilde{h} = \frac{3}{2}.$$

Таким образом, $\tilde{q} = 6, |\lambda| < \frac{1}{6}$.

Найдем матрицы $X_k(t)$ ($k=0, 1, 2$), используя алгоритм (7), (8):

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & -\frac{1}{2}t^2 \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{8} & -t + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} & t - 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} X_{1(11)} & X_{1(12)} & X_{1(13)} \\ X_{1(21)} & X_{1(22)} & X_{1(23)} \\ X_{1(31)} & X_{1(32)} & X_{1(33)} \end{pmatrix},$$

где

$$X_{1(11)} = \frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3, \quad X_{1(12)} = 0, \quad X_{1(13)} = -\frac{3}{10}t^5 - \frac{1}{4}t^4,$$

$$X_{1(21)} = 0, \quad X_{1(22)} = \frac{3}{10}t^5 - \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{8}t^3 + \frac{1}{8}t^2 - \frac{3}{320}, \quad X_{1(23)} = -\frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{11}{192},$$

$$X_{1(31)} = -\frac{3}{10}t^5 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{20}, \quad X_{1(32)} = -\frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + t^2 - \frac{7}{12}, \quad X_{1(33)} = 0,$$

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} X_{2(11)} & X_{2(12)} & X_{2(13)} \\ X_{2(21)} & X_{2(22)} & X_{2(23)} \\ X_{2(31)} & X_{2(32)} & X_{2(33)} \end{pmatrix},$$

где

$$X_{2(11)} = \frac{9}{28}t^7 + \frac{7}{12}t^6 + \frac{4}{15}t^5, \quad X_{2(12)} = 0, \quad X_{2(13)} = -\frac{9}{80}t^8 - \frac{27}{140}t^7 - \frac{1}{12}t^6, \quad X_{2(21)} = 0,$$

$$X_{2(22)} = \frac{9}{80}t^8 - \frac{27}{140}t^7 + \frac{1}{48}t^6 + \frac{1}{8}t^5 - \frac{1}{16}t^4 - \frac{3}{320}t^3 + \frac{3}{320}t^2 - \frac{37}{86016},$$

$$X_{2(23)} = -\frac{9}{28}t^7 - \frac{1}{3}t^6 + \frac{7}{30}t^5 + \frac{1}{4}t^4 - \frac{11}{192}t^3 - \frac{11}{192}t^2 + \frac{169}{26880},$$

$$X_{2(31)} = \frac{9}{80}t^8 - \frac{27}{140}t^7 - \frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{2}t^5 - \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{20}t^3 + \frac{1}{20}t^2 - \frac{1}{336},$$

$$X_{2(32)} = \frac{9}{28}t^7 + \frac{1}{12}t^6 - \frac{11}{15}t^5 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{7}{12}t^3 + \frac{7}{12}t^2 - \frac{71}{210}, \quad X_{2(33)} = 0.$$

Итак, получено приближенное решение $\tilde{X}_2(t, \lambda)$ задачи (1), (2), при этом на основании (12) имеет место оценка

$$\|X(t, \lambda) - \tilde{X}_2(t, \lambda)\| \leq 1,0340425531914894 \cdot 10^{-3}.$$

Найдем теперь приближенное решение $\tilde{X}_2(t, \lambda)$ в точках $t_i = 0,1 \cdot i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, 10$) при $\lambda = 0,01$ (см. таблицы 1, 2, 3).

Таблица 1

Элементы $\tilde{X}_{2(11)}(t_i, \lambda)$, $\tilde{X}_{2(12)}(t_i, \lambda)$, $\tilde{X}_{2(13)}(t_i, \lambda)$
приближенного решения

t_i	$\tilde{X}_{2(11)}(t_i, \lambda)$	$\tilde{X}_{2(12)}(t_i, \lambda)$	$\tilde{X}_{2(13)}(t_i, \lambda)$
0	0	0	0
0,1	0,10000741699488096	0	-0,00500028001037441
0,2	0,20006534601142859	0	-0,02000496080899048
0,3	0,3002408643546429	0	-0,04502755103089823
0,4	0,4006192313295238	0	-0,08009479310384764
0,5	0,5013040792410715	0	-0,12525032482328868
0,6	0,6024176949942858	0	-0,18055839763337148
0,7	0,7041014084941667	0	-0,2461076772099459
0,8	0,8065161040457144	0	-0,32201515647756196
0,9	0,9098428709539286	0	-0,4084302157284696
1	1,0142838095238096	0	-0,505538869047619

Таблица 2

Элементы $\tilde{X}_{2(21)}(t_i, \lambda)$, $\tilde{X}_{2(22)}(t_i, \lambda)$, $\tilde{X}_{2(23)}(t_i, \lambda)$
приближенного решения

t_i	$\tilde{X}_{2(21)}(t_i, \lambda)$	$\tilde{X}_{2(22)}(t_i, \lambda)$	$\tilde{X}_{2(23)}(t_i, \lambda)$
0	0	-0,12509379301525297	0,49942771205357145
0,1	0	-0,1200827550774857	0,3994752350628572
0,2	0	-0,10505680909997678	0,29960214864214285
0,3	0	-0,08002796616367619	0,19977151961142853
0,4	0	-0,04500703070683391	0,09992845179071426
0,5	0	0	0
0,6	0	0,05499553026497565	-0,10010498854071437
0,7	0	0,11999396042794291	-0,20049612161142866
0,8	0	0,19502529204745184	-0,3013018143921429
0,9	0	0,28013875904975233	-0,4026697630628571
1	0	0,37540650460379466	-0,5047675558035715

Таблица 3

Элементы $\tilde{X}_{2(31)}(t_i, \lambda)$, $\tilde{X}_{2(32)}(t_i, \lambda)$, $\tilde{X}_{2(33)}(t_i, \lambda)$
приближенного решения

t_i	$\tilde{X}_{2(31)}(t_i, \lambda)$	$\tilde{X}_{2(32)}(t_i, \lambda)$	$\tilde{X}_{2(33)}(t_i, \lambda)$
0	-0,49950029761904763	-1,0058671428571428	0
0,1	-0,4945450346375304	-0,9057639235789287	0
0,2	-0,4796571229037714	-0,805449778712381	0
0,3	-0,45480211924872077	-0,7049316379525	0
0,4	-0,4199467581106286	-0,6042346869942857	0
0,5	-0,37506253976004467	-0,5034023865327382	0
0,6	-0,32012933813881905	-0,40249643666285706	0
0,7	-0,25513902215710177	-0,3015966704796428	0
0,8	-0,1800990797563428	-0,2008008606780952	0
0,9	-0,09503622951029222	-0,10022442295321426	0
1	0	0	0

Точное решение данной задачи имеет вид

$$X(t) = U(t)X(0)V(t) + U(t) \int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau V(t),$$

где

$$U(t) = \text{diag}(e^{0,01 \cdot t^3}, e^{0,01 \cdot t^3}, e^{-0,01 \cdot t^3}), \quad V(t) = \text{diag}(e^{0,01 \cdot t^2}, e^{-0,01 \cdot t^2}, e^{0,01 \cdot t^2}),$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1250937930295599 & 0,49942771149903764 \\ -0,4995002974928266 & -1,0058673020020594 & 0 \end{pmatrix}.$$

Точное численное решение в точках $t_i = 0,1 \cdot i$ ($i = 0,1,2,\dots,10$) при $\lambda = 0,01$ приведено в таблицах 4, 5, 6.

Таблица 4

Элементы $X_{11}(t_i)$, $X_{12}(t_i)$, $X_{13}(t_i)$ точного численного решения

t_i	$X_{11}(t_i)$	$X_{12}(t_i)$	$X_{13}(t_i)$
0	0	0	0
0,1	0,1000074169948913	0	-0,00500028001037469
0,2	0,20006534601317938	0	-0,02000496080908885
0,3	0,3002408643932476	0	-0,04502755103418506
0,4	0,40061923169545566	0	-0,08009479314574952
0,5	0,5013040814118752	0	-0,1252503251363224
0,6	0,6024177045309895	0	-0,1805583992942876
0,7	0,7041014424570571	0	-0,24610768414974474
0,8	0,8065162075755146	0	-0,3220151807746235
0,9	0,9098431508172531	0	-0,4084302899441866
1	1,0142844969519613	0	-0,5055390723935161

Таблица 5

Элементы $X_{21}(t_i)$, $X_{22}(t_i)$, $X_{23}(t_i)$ точного численного решения

t_i	$X_{21}(t_i)$	$X_{22}(t_i)$	$X_{23}(t_i)$
0	0	-0,1250937930295599	0,49942771149903764
0,1	0	-0,12008275508828477	0,39947523457405965
0,2	0	-0,1050568091046581	0,2996021483306568
0,3	0	-0,08002796616467198	0,19977151949489513
0,4	0	-0,04500703070688643	0,0999284517776532
0,5	0	0	0
0,6	0	0,05499553026496357	-0,10010498857734407
0,7	0	0,11999396042792053	-0,20049612253877602
0,8	0	0,1950252920475697	-0,30130182159081964
0,9	0	0,2801387590574348	-0,4026697970009814
1	0	0,375406504715792	-0,5047676764341472

Таблица 6

Элементы $X_{31}(t_i)$, $X_{32}(t_i)$, $X_{33}(t_i)$ точного численного решения

t_i	$X_{31}(t_i)$	$X_{32}(t_i)$	$X_{33}(t_i)$
0	-0,4995002974928266	-1,0058673020020594	0
0,1	-0,4945450345361205	-0,9057640790225759	0
0,2	-0,4796571228498668	-0,8054499222114623	0
0,3	-0,4548021192311773	-0,7049317611401104	0
0,4	-0,4199467581111333	-0,6042347832516626	0
0,5	-0,37506253977103027	-0,503402452884417	0
0,6	-0,32012933815890654	-0,40249647500048336	0
0,7	-0,2551390221789936	-0,3015966873654178	0
0,8	-0,18009907976866907	-0,20080086526094776	0
0,9	-0,09503622951218826	-0,10022442334180914	0
1	0	-0,0000000000000022	0

Для сравнения полученного приближенного решения с точным приведены таблицы 7, 8, 9.

Таблица 7

Сравнение приближенного решения с точным

t_i	$X_{11}(t_i) - \tilde{X}_{2(11)}(t_i, \lambda)$	$X_{12}(t_i) - \tilde{X}_{2(12)}(t_i, \lambda)$	$X_{13}(t_i) - \tilde{X}_{2(13)}(t_i, \lambda)$
0	0	0	0
0,1	$1,033895191682177 \cdot 10^{-14}$	0	$2,8709673527416157 \cdot 10^{-16}$
0,2	$1,7507939542582562 \cdot 10^{-12}$	0	$9,836922942874082 \cdot 10^{-14}$
0,3	$3,8604675012265948 \cdot 10^{-11}$	0	$3,2868360810844877 \cdot 10^{-12}$
0,4	$3,659318403848033 \cdot 10^{-10}$	0	$4,190188473973677 \cdot 10^{-11}$
0,5	$2,1708037589718288 \cdot 10^{-9}$	0	$3,1303371006430325 \cdot 10^{-10}$
0,6	$9,53670376002691 \cdot 10^{-9}$	0	$1,6609161268554828 \cdot 10^{-9}$
0,7	$3,3962890388927747 \cdot 10^{-8}$	0	$6,9397988466946 \cdot 10^{-9}$
0,8	$1,0352980017724889 \cdot 10^{-7}$	0	$2,4297061529399144 \cdot 10^{-8}$
0,9	$2,7986332451490625 \cdot 10^{-7}$	0	$7,42157170163793 \cdot 10^{-8}$
1	$6,87428151735503 \cdot 10^{-7}$	0	$2,0334589712067697 \cdot 10^{-7}$

Таблица 8

Сравнение приближенного решения с точным

t_i	$X_{21}(t_i) - \tilde{X}_{2(21)}(t_i, \lambda)$	$X_{22}(t_i) - \tilde{X}_{2(22)}(t_i, \lambda)$	$X_{23}(t_i) - \tilde{X}_{2(23)}(t_i, \lambda)$
0	0	$1,4306916762407695 \cdot 10^{-11}$	$5,545338077617146 \cdot 10^{-10}$
0,1	0	$1,0799069971589859 \cdot 10^{-11}$	$4,887975579848103 \cdot 10^{-10}$
0,2	0	$4,681324772271012 \cdot 10^{-12}$	$3,114860591679758 \cdot 10^{-10}$
0,3	0	$9,957867863619185 \cdot 10^{-13}$	$1,165333940456037 \cdot 10^{-10}$
0,4	0	$5,25135490647699 \cdot 10^{-14}$	$1,3061066117536768 \cdot 10^{-11}$
0,5	0	0	0
0,6	0	$1,2087553180606392 \cdot 10^{-14}$	$3,6629699273760252 \cdot 10^{-11}$
0,7	0	$2,238487173400472 \cdot 10^{-14}$	$9,27347365564657 \cdot 10^{-10}$
0,8	0	$1,1785017406396037 \cdot 10^{-13}$	$7,198676765796107 \cdot 10^{-9}$
0,9	0	$7,682465774649927 \cdot 10^{-12}$	$3,3938124255339375 \cdot 10^{-8}$
1	0	$1,119973558338927 \cdot 10^{-10}$	$1,206305757506243 \cdot 10^{-7}$

Таблица 9

Сравнение приближенного решения с точным

t_i	$X_{31}(t_i) - \tilde{X}_{2(31)}(t_i, \lambda)$	$X_{32}(t_i) - \tilde{X}_{2(32)}(t_i, \lambda)$	$X_{33}(t_i) - \tilde{X}_{2(33)}(t_i, \lambda)$
0	$1,2622103362502912 \cdot 10^{-10}$	$1,591449165783132 \cdot 10^{-7}$	0
0,1	$1,0140993600415982 \cdot 10^{-10}$	$1,5544364728725668 \cdot 10^{-7}$	0
0,2	$5,390460300347399 \cdot 10^{-11}$	$1,43499081284304 \cdot 10^{-7}$	0
0,3	$1,7543466679370567 \cdot 10^{-11}$	$1,2318761033469627 \cdot 10^{-7}$	0
0,4	$5,047073869945962 \cdot 10^{-13}$	$9,625737684704205 \cdot 10^{-8}$	0
0,5	$1,0985601317514693 \cdot 10^{-11}$	$6,635167881796633 \cdot 10^{-8}$	0
0,6	$2,0087487229147882 \cdot 10^{-11}$	$3,8337626295792404 \cdot 10^{-8}$	0
0,7	$2,1891821688768687 \cdot 10^{-11}$	$1,6885775000474723 \cdot 10^{-8}$	0
0,8	$1,2326278886476416 \cdot 10^{-11}$	$4,582852569656737 \cdot 10^{-9}$	0
0,9	$1,8960388814548423 \cdot 10^{-12}$	$3,8859487849762786 \cdot 10^{-10}$	0
1	0	$2,220446049250313 \cdot 10^{-16}$	0

Сравнительный анализ результатов выполненных вычислений показывает, что полученные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) и предложенный алгоритм построения ее решения, а также соответствующие оценки вполне приемлемы для отыскания с заданной точностью приближенных аналитических решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зубов, В.И.** Лекции по теории управления / В.И. Зубов. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
2. **Murty, K.N.** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems existence and uniqueness / K.N. Murty, G.W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl. – 1992. – V. 167. – P. 505-515.
3. **Параев, Ю.И.** Уравнения Ляпунова и Риккати / Ю.И. Параев. – Томск: Томский госуниверситет, 1989. – 166 с.
4. **Бойчук, А.А.** Конструктивные методы анализа краевых задач / А.А. Бойчук. – Киев: Наукова думка, 1990. – 96 с.
5. **Ешукров, Л.Н.** Об одной функциональной задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений / Л.Н. Ешукров // Успехи матем. наук. – 1958. – Т. 13. – Вып. 3 (81). – С. 191-196.
6. **Лаптинский, В.Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В.Н. Лаптинский. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
7. **Демидович, Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
8. **Рисс, Ф.** Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. – М.: ИЛ, 1954. – 500 с.
9. **Канторович, Л.В.** Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
10. **Лаптинский, В.Н.** Конструктивный анализ многоточечной краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова в невырожденном случае / В.Н. Лаптинский, А.Н. Бондарев. – Могилев, 2009. – 38 с. – (Препринт / Нац. акад. наук Беларуси. Ин-т технол. металлов; № 13).

Поступила в редакцию 02.07.2009 г.