УДК 517.925

В.Н. ЛАПТИНСКИЙ, Д.В. РОГОЛЕВ

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

Получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати.

В данной работе с помощью метода [1, гл. 3] исследуется краевая задача

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}=\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X}+\mathbf{X}\mathbf{B}_1(t)+\mathbf{X}\left(\mathbf{S}_1(t)\mathbf{X}+\mathbf{S}_2(t)\mathbf{Y}\right)+\mathbf{F}_1(t), \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt}=\mathbf{A}_2(t)\mathbf{Y}+\mathbf{Y}\mathbf{B}_2(t)+\mathbf{Y}\left(\mathbf{P}_1(t)\mathbf{X}+\mathbf{P}_2(t)\mathbf{Y}\right)+\mathbf{F}_2(t), \quad (2)$$

$$\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}(\omega), \quad (3)$$

$$\mathbf{Y}(0)=\mathbf{Y}(\omega), \quad (4)$$

где $t\in[0,\omega]$, $\mathbf{X}(t)$, $\mathbf{Y}(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$, матрицы $\mathbf{A}_i(t)$, $\mathbf{B}_i(t)$, $\mathbf{S}_i(t)$, $\mathbf{P}_i(t)$, $\mathbf{F}_i(t)$ $(i=1,2)$ определены и непрерывны на промежутке $[0,\omega]$; $\omega>0$.

Система уравнений (1), (2) относится к многомерным системам дифференциальных уравнений специального вида. В частности, к таким уравнениям относятся матричные дифференциальные уравнения Ляпунова, Риккати, играющие важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений [1-4]. Указанная система впервые появилась, по-видимому, в теории дифференциальных игр (см., например, [3]). Задача типа (1)-(4) рассмотрена в [1].

Примем следующие обозначения:

$$D=\{(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}):0\le t\le\omega,\|\mathbf{X}\|\le\rho_1,\|\mathbf{Y}\|\le\rho_2\},\ \tilde{\mathbf{A}}_i(\omega)=\int_0^\omega\mathbf{A}_i(\tau)d\tau,\ \gamma_i=\left\|\tilde{\mathbf{A}}_i^{-1}(\omega)\right\|,$$

$$\alpha_i=\max_t\|\mathbf{A}_i(t)\|,\ \beta_i=\max_t\|\mathbf{B}_i(t)\|,\ \delta_i=\max_t\|\mathbf{S}_i(t)\|,\ \mu_i=\max_t\|\mathbf{P}_i(t)\|,$$

$$h_i=\max_t\|\mathbf{F}_i(t)\|,\ \|\mathbf{T}\|_C=\max_t\|\mathbf{T}(t)\|,$$

$$q_{11}=\gamma_1\left[\frac{1}{2}\alpha_1\omega^2(\alpha_1+\beta_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2)+\omega(\beta_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2)\right],$$

$$q_{12}=\gamma_1\delta_2\rho_1\omega\left(\frac{1}{2}\alpha_1\omega+1\right),\ q_{21}=\gamma_2\mu_1\rho_2\omega\left(\frac{1}{2}\alpha_2\omega+1\right),$$

$$q_{22}=\gamma_2\left[\frac{1}{2}\alpha_2\omega^2(\alpha_2+\beta_2+\mu_1\rho_1+2\mu_2\rho_2)+\omega(\beta_2+\mu_1\rho_1+2\mu_2\rho_2)\right],$$

где $t\in[0,\omega]$, $\rho_1,\rho_2>0$, $\|\cdot\|$ – мультипликативная норма матриц ($\|\mathbf{ST}\|\le\|\mathbf{S}\|\cdot\|\mathbf{T}\|$), например, любая из норм, приведенных в [5, с. 21].

В случае, когда коэффициенты в (1), (2) постоянные, получим систему типа [3].

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\det\tilde{\mathbf{A}}_i\ne 0\ (i=1,2)$, (5)

2)
$$\gamma_1\left\{\frac{1}{2}\alpha_1\omega^2\left[(\alpha_1+\beta_1)\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\right]+\right.$$
$$\left.+\omega\left(\beta_1\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\right)\right\}\le\rho_1, \quad (6)$$

$$\gamma_2\left\{\frac{1}{2}\alpha_2\omega^2\left[(\alpha_2+\beta_2)\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2+h_2\right]+\right.$$
$$\left.+\omega\left(\beta_2\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2+h_2\right)\right\}\le\rho_2,$$

3) $q_{11}<1,\ \det(\mathbf{E}-\mathbf{Q})>0$, (7)

где $\mathbf{E}=diag(1,1)$, $\mathbf{Q}=(q_{ij})$.

Тогда задача (1)-(4) однозначно разрешима в области D.

Доказательство. Используя условие (5) и следуя методике [1], сначала выведем систему матричных интегральных уравнений, эквивалентную задаче (1)-(4).

Из уравнения (1) на основании условия (3) имеем

$$\int_0^\omega \mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)d\tau = -\int_0^\omega \left[\mathbf{X}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau)+\mathbf{X}(\tau)\big(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau)\big)+\mathbf{F}_1(\tau)\right]d\tau.$$

Воспользуемся тождеством типа [1, с. 47]

$$\int_0^\omega \mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)d\tau = \int_0^\omega \mathbf{A}_1(\tau)d\tau\mathbf{X}(t) - \int_0^t\left(\int_0^\tau \mathbf{A}_1(\sigma)d\sigma\right)d\mathbf{X}(\tau)+$$
$$+\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega \mathbf{A}_1(\sigma)d\sigma\right)d\mathbf{X}(\tau). \tag{8}$$

Тогда на основе (8) в силу (1) получим

$$\tilde{\mathbf{A}}_1(\omega)\mathbf{X}(t) = \int_0^t\left(\int_0^\tau \mathbf{A}_1(\sigma)d\sigma\right)\Big[\mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{X}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau)+$$
$$+\mathbf{X}(\tau)\big(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau)\big)+\mathbf{F}_1(\tau)\Big]d\tau-$$
$$-\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega \mathbf{A}_1(\sigma)d\sigma\right)\Big[\mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{X}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau)+$$
$$+\mathbf{X}(\tau)\big(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau)\big)+\mathbf{F}_1(\tau)\Big]d\tau-$$
$$-\int_0^\omega\left[\mathbf{X}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau)+\mathbf{X}(\tau)\big(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau)\big)+\mathbf{F}_1(\tau)\right]d\tau. \tag{9}$$

Так как, согласно (5), $\det\tilde{\mathbf{A}}_1(\omega)\neq 0$, то из (9) получим матричное интегральное уравнение

$$\mathbf{X}(t) = \tilde{\mathbf{A}}_1^{-1}(\omega)\left\{\int_0^t\left(\int_0^\tau \mathbf{A}_1(\sigma)d\sigma\right)\Big[\mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{X}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau)+\right.$$
$$+\mathbf{X}(\tau)\big(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau)\big)+\mathbf{F}_1(\tau)\Big]d\tau-$$
$$-\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega \mathbf{A}_1(\sigma)d\sigma\right)\Big[\mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{X}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau)+$$
$$+\mathbf{X}(\tau)\big(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau)\big)+\mathbf{F}_1(\tau)\Big]d\tau-$$
$$\left.-\int_0^\omega\left[\mathbf{X}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau)+\mathbf{X}(\tau)\big(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau)\big)+\mathbf{F}_1(\tau)\right]d\tau\right\}. \tag{10}$$

Аналогично получим следующее интегральное уравнение:

$$\mathbf{Y}(t) = \tilde{\mathbf{A}}_2^{-1}(\omega)\left\{\int_0^t\left(\int_0^\tau \mathbf{A}_2(\sigma)d\sigma\right)\Big[\mathbf{A}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau)+\mathbf{Y}(\tau)\mathbf{B}_2(\tau)+\right.$$

$$+\mathbf{Y}(\tau)\big(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau)\big)+\mathbf{F}_2(\tau)\Big]d\tau-$$

$$-\int_t^{\omega}\left(\int_{\tau}^{\omega}\mathbf{A}_2(\sigma)d\sigma\right)\Big[\mathbf{A}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau)+\mathbf{Y}(\tau)\mathbf{B}_2(\tau)+$$

$$+\mathbf{Y}(\tau)\big(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau)\big)+\mathbf{F}_2(\tau)\Big]d\tau-$$

$$-\int_0^{\omega}\Big[\mathbf{Y}(\tau)\mathbf{B}_2(\tau)+\mathbf{Y}(\tau)\big(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau)\big)+\mathbf{F}_2(\tau)\Big]d\tau\Bigg\}. \qquad (11)$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение системы матричных интегральных уравнений (10), (11) является решением задачи (1)-(4). Это можно показать с помощью несложных выкладок.

Исследуем разрешимость системы уравнений (10), (11). Эту систему запишем в операторной форме:

$$\mathbf{X}=\mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \qquad (12)$$

$$\mathbf{Y}=\mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \qquad (13)$$

где через $\mathcal{L}_i\,(i=1,2)$ обозначены соответствующие интегральные операторы в (10), (11). Эти операторы действуют на множестве $\{(\mathbf{X}(t),\mathbf{Y}(t)):\|\mathbf{X}\|_C<\infty,\|\mathbf{Y}\|_C<\infty\}$.

Покажем, что из условий (5)-(7) следует выполнение модифицированного [6] принципа Банаха-Каччиопполи [7, с. 605] на множестве $\tilde{D}=\{(\mathbf{X}(t),\mathbf{Y}(t)):\|\mathbf{X}\|_C\le\rho_1,\|\mathbf{Y}\|_C\le\rho_2\}$.

Сначала покажем, что $(\mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}),\mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}))\in\tilde{D}$, если $(\mathbf{X},\mathbf{Y})\in\tilde{D}$. Выполнив оценки по норме в (12), (13), имеем последовательно

$$\|\mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y})\|\le\|\tilde{\mathbf{A}}_1^{-1}(\omega)\|\Bigg\|\Bigg\{\int_0^t\left(\int_0^{\tau}\mathbf{A}_1(\sigma)d\sigma\right)\Big[\mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{X}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau)+$$

$$+\mathbf{X}(\tau)\big(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau)\big)+\mathbf{F}_1(\tau)\Big]d\tau-$$

$$-\int_t^{\omega}\left(\int_{\tau}^{\omega}\mathbf{A}_1(\sigma)d\sigma\right)\Big[\mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{X}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau)+$$

$$+\mathbf{X}(\tau)\big(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau)\big)+\mathbf{F}_1(\tau)\Big]d\tau-$$

$$-\int_0^{\omega}\Big[\mathbf{X}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau)+\mathbf{X}(\tau)\big(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau)\big)+\mathbf{F}_1(\tau)\Big]d\tau\Bigg\}\Bigg\|\le$$

$$\le \gamma_1 \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau \|\mathbf{A}_1(\sigma)\| d\sigma \right) \left[\|\mathbf{A}_1(\tau)\| \|\mathbf{X}(\tau)\| + \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{B}_1(\tau)\| + \right.\right.$$

$$+ \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{S}_1(\tau)\| \|\mathbf{X}(\tau)\| + \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{S}_2(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \|\mathbf{F}_1(\tau)\| \Big] d\tau +$$

$$+ \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega \|\mathbf{A}_1(\sigma)\| d\sigma \right) \Big[\|\mathbf{A}_1(\tau)\| \|\mathbf{X}(\tau)\| + \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{B}_1(\tau)\| +$$

$$+ \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{S}_1(\tau)\| \|\mathbf{X}(\tau)\| + \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{S}_2(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \|\mathbf{F}_1(\tau)\| \Big] d\tau +$$

$$\left. + \int_0^\omega \Big[\|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{B}_1(\tau)\| + \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{S}_1(\tau)\| \|\mathbf{X}(\tau)\| + \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{S}_2(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \|\mathbf{F}_1(\tau)\| \Big] d\tau \right\} \le$$

$$\le \gamma_1 \left\{ \int_0^t \alpha_1 \tau \left[(\alpha_1 + \beta_1) \|\mathbf{X}(\tau)\| + \delta_1 \|\mathbf{X}(\tau)\|^2 + \delta_2 \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + h_1 \right] d\tau + \right.$$

$$+ \int_t^\omega \alpha_1 (\omega - \tau) \left[(\alpha_1 + \beta_1) \|\mathbf{X}(\tau)\| + \delta_1 \|\mathbf{X}(\tau)\|^2 + \delta_2 \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + h_1 \right] d\tau +$$

$$\left. + \int_0^\omega \left[\beta_1 \|\mathbf{X}(\tau)\| + \delta_1 \|\mathbf{X}(\tau)\|^2 + \delta_2 \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + h_1 \right] d\tau \right\} \le$$

$$\le \gamma_1 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_1 \omega^2 \left[(\alpha_1 + \beta_1) \rho_1 + \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_1 \rho_2 + h_1 \right] + \right.$$

$$\left. + \omega \left(\beta_1 \rho_1 + \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_1 \rho_2 + h_1 \right) \right\}. \qquad (14)$$

Аналогичные оценки выполним для оператора $\mathcal{L}_2$:

$$\|\mathcal{L}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\| \le \|\tilde{\mathbf{A}}_2^{-1}(\omega)\| \left\| \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau \mathbf{A}_2(\sigma) d\sigma \right) \Big[\mathbf{A}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau) + \mathbf{Y}(\tau)\mathbf{B}_2(\tau) + \right.\right.$$

$$+ \mathbf{Y}(\tau) \big(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau) + \mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau) \big) + \mathbf{F}_2(\tau) \Big] d\tau -$$

$$- \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega \mathbf{A}_2(\sigma) d\sigma \right) \Big[\mathbf{A}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau) + \mathbf{Y}(\tau)\mathbf{B}_2(\tau) +$$

$$+ \mathbf{Y}(\tau) \big(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau) + \mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau) \big) + \mathbf{F}_2(\tau) \Big] d\tau -$$

$$\left.\left. - \int_0^\omega \Big[\mathbf{Y}(\tau)\mathbf{B}_2(\tau) + \mathbf{Y}(\tau) \big(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau) + \mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau) \big) + \mathbf{F}_2(\tau) \Big] d\tau \right\} \right\| \le$$

$$\le \gamma_2 \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau \left\| \mathbf{A}_2(\sigma) \right\| d\sigma \right) \left[\left\| \mathbf{A}_2(\tau) \right\| \left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\| + \left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\| \left\| \mathbf{B}_2(\tau) \right\| + \right. \right.$$

$$\left. + \left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\| \left\| \mathbf{P}_1(\tau) \right\| \left\| \mathbf{X}(\tau) \right\| + \left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\| \left\| \mathbf{P}_2(\tau) \right\| \left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\| + \left\| \mathbf{F}_2(\tau) \right\| \right] d\tau +$$

$$+ \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega \left\| \mathbf{A}_2(\sigma) \right\| d\sigma \right) \left[\left\| \mathbf{A}_2(\tau) \right\| \left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\| + \left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\| \left\| \mathbf{B}_2(\tau) \right\| + \right.$$

$$\left. + \left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\| \left\| \mathbf{P}_1(\tau) \right\| \left\| \mathbf{X}(\tau) \right\| + \left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\| \left\| \mathbf{P}_2(\tau) \right\| \left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\| + \left\| \mathbf{F}_2(\tau) \right\| \right] d\tau +$$

$$\left. + \int_0^\omega \left[\left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\| \left\| \mathbf{B}_2(\tau) \right\| + \left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\| \left\| \mathbf{P}_1(\tau) \right\| \left\| \mathbf{X}(\tau) \right\| + \left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\| \left\| \mathbf{P}_2(\tau) \right\| \left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\| + \left\| \mathbf{F}_2(\tau) \right\| \right] d\tau \right\} \le$$

$$\le \gamma_2 \left\{ \int_0^t \alpha_2 \tau \left[(\alpha_2 + \beta_2) \left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\| + \mu_1 \left\| \mathbf{X}(\tau) \right\| \left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\| + \mu_2 \left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\|^2 + h_2 \right] d\tau + \right.$$

$$+ \int_t^\omega \alpha_2 (\omega - \tau) \left[(\alpha_2 + \beta_2) \left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\| + \mu_1 \left\| \mathbf{X}(\tau) \right\| \left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\| + \mu_2 \left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\|^2 + h_2 \right] d\tau +$$

$$\left. + \int_0^\omega \left[\beta_2 \left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\| + \mu_1 \left\| \mathbf{X}(\tau) \right\| \left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\| + \mu_2 \left\| \mathbf{Y}(\tau) \right\|^2 + h_2 \right] d\tau \right\} \le$$

$$\le \gamma_2 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_2 \omega^2 \left[(\alpha_2 + \beta_2) \rho_2 + \mu_2 \rho_2^{\,2} + \mu_1 \rho_1 \rho_2 + h_2 \right] + \right.$$

$$\left. + \omega \left(\beta_2 \rho_2 + \mu_2 \rho_2^{\,2} + \mu_1 \rho_1 \rho_2 + h_2 \right) \right\}. \tag{15}$$

Из (14), (15) на основании условия (6) следуют соотношения

$$\left\| \mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right\|_C \le \rho_1, \tag{16}$$

$$\left\| \mathcal{L}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \right\|_C \le \rho_2. \tag{17}$$

Далее из (12) имеем для произвольных $(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}), (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) \in \tilde{D}$:

$$\mathcal{L}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) = \tilde{\mathbf{A}}_1^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau \mathbf{A}_1 d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_1 (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}) + (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}) \mathbf{B}_1 + \right. \right.$$

$$\left. + \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} \mathbf{S}_1 \tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{S}_1 \tilde{\mathbf{X}} \right) + \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} \mathbf{S}_2 \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{S}_2 \tilde{\mathbf{Y}} \right) \right] d\tau -$$

$$- \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega \mathbf{A}_1 d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_1 (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}) + (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}) \mathbf{B}_1 + \right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{S}_1\tilde{\mathbf{X}}\right)+\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{S}_2\tilde{\mathbf{Y}}\right)\Big]d\tau-\\
&-\int_0^{\omega}\Big[\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right)\mathbf{B}_1+\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{S}_1\tilde{\mathbf{X}}\right)+\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{S}_2\tilde{\mathbf{Y}}\right)\Big]d\tau\Big\}.
\end{aligned}
$$

Выполнив оценки по норме, получим

$$
\begin{aligned}
&\left\|\mathcal{L}_1\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}},\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}\right)-\mathcal{L}_1\left(\tilde{\mathbf{X}},\tilde{\mathbf{Y}}\right)\right\|\le\left\|\tilde{\mathbf{A}}_1^{-1}(\omega)\right\|\Bigg\|\int_0^{t}\left(\int_0^{\tau}\mathbf{A}_1d\sigma\right)\Big[\mathbf{A}_1\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right)+\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right)\mathbf{B}_1+\\
&+\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{S}_1\tilde{\mathbf{X}}\right)+\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{S}_2\tilde{\mathbf{Y}}\right)\Big]d\tau-\\
&-\int_t^{\omega}\left(\int_{\tau}^{\omega}\mathbf{A}_1d\sigma\right)\Big[\mathbf{A}_1\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right)+\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right)\mathbf{B}_1+\\
&+\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{S}_1\tilde{\mathbf{X}}\right)+\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{S}_2\tilde{\mathbf{Y}}\right)\Big]d\tau-\\
&-\int_0^{\omega}\Big[\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right)\mathbf{B}_1+\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{S}_1\tilde{\mathbf{X}}\right)+\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{S}_2\tilde{\mathbf{Y}}\right)\Big]d\tau\Bigg\|\le\\
&\le\gamma_1\Bigg\{\int_0^{t}\left(\int_0^{\tau}\left\|\mathbf{A}_1\right\|d\sigma\right)\Big[\left\|\mathbf{A}_1\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right)\right\|+\left\|\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right)\mathbf{B}_1\right\|+\\
&+\left\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right)\right\|+\left\|\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right)\mathbf{S}_1\tilde{\mathbf{X}}\right\|+\left\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\left(\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{Y}}\right)\right\|+\left\|\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right)\mathbf{S}_2\tilde{\mathbf{Y}}\right\|\Big]d\tau+\\
&+\int_t^{\omega}\left(\int_{\tau}^{\omega}\left\|\mathbf{A}_1\right\|d\sigma\right)\Big[\left\|\mathbf{A}_1\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right)\right\|+\left\|\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right)\mathbf{B}_1\right\|+\\
&+\left\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right)\right\|+\left\|\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right)\mathbf{S}_1\tilde{\mathbf{X}}\right\|+\left\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\left(\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{Y}}\right)\right\|+\left\|\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right)\mathbf{S}_2\tilde{\mathbf{Y}}\right\|\Big]d\tau+\\
&+\int_0^{\omega}\Big[\left\|\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right)\mathbf{B}_1\right\|+\left\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right)\right\|+\left\|\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right)\mathbf{S}_1\tilde{\mathbf{X}}\right\|+\\
&+\left\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\left(\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{Y}}\right)\right\|+\left\|\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right)\mathbf{S}_2\tilde{\mathbf{Y}}\right\|\Big]d\tau\Bigg\}\le\\
&\le\gamma_1\left\{\left[\frac{1}{2}\alpha_1\omega^2\left(\alpha_1+\beta_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2\right)+\omega\left(\beta_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2\right)\right]\left\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right\|_C+\right.\\
&\left.+\delta_2\rho_1\omega\left(\frac{1}{2}\alpha_1\omega+1\right)\left\|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{Y}}\right\|_C\right\}.
\end{aligned}
$$

Отсюда следует оценка

$$\left\|\mathcal{L}_1\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}},\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}\right)-\mathcal{L}_1\left(\tilde{\mathbf{X}},\tilde{\mathbf{Y}}\right)\right\|_C \le \gamma_1\left\{\left[\frac{1}{2}\alpha_1\omega^2\left(\alpha_1+\beta_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\omega\left(\beta_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2\right)\right]\left\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right\|_C+\delta_2\rho_1\omega\left(\frac{1}{2}\alpha_1\omega+1\right)\left\|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{Y}}\right\|_C\right\}. \quad (18)$$

Аналогично получим оценку

$$\left\|\mathcal{L}_2\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}},\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}\right)-\mathcal{L}_2\left(\tilde{\mathbf{X}},\tilde{\mathbf{Y}}\right)\right\|_C \le \gamma_2\left\{\mu_1\rho_2\omega\left(\frac{1}{2}\alpha_2\omega+1\right)\left\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right\|_C+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{2}\alpha_2\omega^2\left(\alpha_2+\beta_2+\mu_1\rho_1+2\mu_2\rho_2\right)+\omega\left(\beta_2+\mu_1\rho_1+2\mu_2\rho_2\right)\right]\left\|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{Y}}\right\|_C\right\}. \quad (19)$$

Запишем (18), (19) в матричном виде

$$\tilde{\mathbf{K}} \le \mathbf{QK}, \quad (20)$$

где

$$\tilde{\mathbf{K}}=\begin{pmatrix}\left\|\mathcal{L}_1\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}},\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}\right)-\mathcal{L}_1\left(\tilde{\mathbf{X}},\tilde{\mathbf{Y}}\right)\right\|_C\\ \left\|\mathcal{L}_2\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}},\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}\right)-\mathcal{L}_2\left(\tilde{\mathbf{X}},\tilde{\mathbf{Y}}\right)\right\|_C\end{pmatrix},\ \mathbf{K}=\begin{pmatrix}\left\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}-\tilde{\mathbf{X}}\right\|_C\\ \left\|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}-\tilde{\mathbf{Y}}\right\|_C\end{pmatrix}.$$

Используя условие (7), можно показать на основании [8, с. 370], что характеристические числа положительной матрицы $\mathbf{Q}$ расположены внутри единичного круга с центром в начале координат. Таким образом, на множестве $\tilde{D}$ имеют место соотношения (16)-(19), являющиеся условием модифицированного [6] принципа Банаха-Каччиопполи [7, с. 605] сжимающих отображений применительно к системе уравнений (12), (13). На основании этого заключаем, что решение $\mathbf{X}=\mathbf{X}(t)$, $\mathbf{Y}=\mathbf{Y}(t)$ этой системы на множестве $\tilde{D}$ существует и единственно. В конечном итоге это означает, что задача (1)-(4) однозначно разрешима в области D.

Замечание 1. Вместо условия (7) можно принять условие $\|\mathbf{Q}\|<1$, более удобное для применения.

Для построения решения системы матричных интегральных уравнений (10), (11) (см. также (12), (13)) воспользуемся классическим методом последовательных приближений (см., например, [7, с. 605]):

$$\mathbf{X}_k(t)=\tilde{\mathbf{A}}_1^{-1}(\omega)\left\{\int_0^t\left(\int_0^\tau \mathbf{A}_1(\sigma)d\sigma\right)\left[\mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau)+\mathbf{X}_{k-1}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau)+\right.\right.$$

$$+\mathbf{X}_{k-1}(\tau)\left(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau)+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)\right)+\mathbf{F}_1(\tau)\Big]d\tau-$$

$$-\int_t^{\omega}\left(\int_{\tau}^{\omega}\mathbf{A}_1(\sigma)d\sigma\right)\Big[\mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau)+\mathbf{X}_{k-1}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau)+$$

$$+\mathbf{X}_{k-1}(\tau)\left(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau)+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)\right)+\mathbf{F}_1(\tau)\Big]d\tau-$$

$$-\int_0^{\omega}\Big[\mathbf{X}_{k-1}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau)+\mathbf{X}_{k-1}(\tau)\left(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau)+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)\right)+\mathbf{F}_1(\tau)\Big]d\tau\Bigg\},\quad(21)$$

$$\mathbf{Y}_k(t)=\tilde{\mathbf{A}}_2^{-1}(\omega)\Bigg\{\int_0^{t}\left(\int_0^{\tau}\mathbf{A}_2(\sigma)d\sigma\right)\Big[\mathbf{A}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)+\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)\mathbf{B}_2(\tau)+$$

$$+\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)\left(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau)+\mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)\right)+\mathbf{F}_2(\tau)\Big]d\tau-$$

$$-\int_t^{\omega}\left(\int_{\tau}^{\omega}\mathbf{A}_2(\sigma)d\sigma\right)\Big[\mathbf{A}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)+\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)\mathbf{B}_2(\tau)+$$

$$+\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)\left(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau)+\mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)\right)+\mathbf{F}_2(\tau)\Big]d\tau-$$

$$-\int_0^{\omega}\Big[\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)\mathbf{B}_2(\tau)+\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)\left(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau)+\mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)\right)+\mathbf{F}_2(\tau)\Big]d\tau\Bigg\},\quad(22)$$

$k=1,2,\ldots,$

где $\mathbf{X}_0(t)$, $\mathbf{Y}_0(t)$ – произвольные матричные функции класса $C[0,\omega]$, принадлежащие множеству $\tilde{D}$.

Используя условия (6), нетрудно показать, что все приближенные решения, полученные по алгоритму (21), (22), принадлежат множеству $\tilde{D}$. Заметим, что эти решения, вообще говоря, не удовлетворяют краевым условиям (3), (4). Поэтому следует создавать более эффективные алгоритмы построения решения задачи (1)-(4). Такие алгоритмы можно получить на основе применения подхода [1, гл. 3]. Их разработке будут посвящены дальнейшие исследования авторов.

Изучим вопрос о сходимости полученной последовательности. Следуя известному приему (см., например, [9]), этот вопрос заменим эквивалентным вопросом о сходимости рядов

$$\mathbf{X}_0+\left(\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_0\right)+\ldots+\left(\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1}\right)+\ldots,\quad(23)$$

$$\mathbf{Y}_0+\left(\mathbf{Y}_1-\mathbf{Y}_0\right)+\ldots+\left(\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1}\right)+\ldots\quad(24)$$

Докажем равномерную по $t\in[0,\omega]$ сходимость рядов (23), (24). Для этого построим специальный сходящийся матричный степенной ряд, который мажорирует на $[0,\omega]$ указанные матричные функциональные ряды. Из (21), (22) имеем соответственно

$$\mathbf{X}_{k+1}-\mathbf{X}_k=\tilde{\mathbf{A}}_1^{-1}(\omega)\left\{\int_0^t\left(\int_0^\tau \mathbf{A}_1 d\sigma\right)\left[\mathbf{A}_1(\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1})+(\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1})\mathbf{B}_1+\right.\right.$$

$$\left.+(\mathbf{X}_k\mathbf{S}_1\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1}\mathbf{S}_1\mathbf{X}_{k-1})+(\mathbf{X}_k\mathbf{S}_2\mathbf{Y}_k-\mathbf{X}_{k-1}\mathbf{S}_2\mathbf{Y}_{k-1})\right]d\tau-$$

$$-\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega \mathbf{A}_1 d\sigma\right)\left[\mathbf{A}_1(\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1})+(\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1})\mathbf{B}_1+\right.$$

$$\left.+(\mathbf{X}_k\mathbf{S}_1\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1}\mathbf{S}_1\mathbf{X}_{k-1})+(\mathbf{X}_k\mathbf{S}_2\mathbf{Y}_k-\mathbf{X}_{k-1}\mathbf{S}_2\mathbf{Y}_{k-1})\right]d\tau-$$

$$\left.-\int_0^\omega\left[(\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1})\mathbf{B}_1+(\mathbf{X}_k\mathbf{S}_1\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1}\mathbf{S}_1\mathbf{X}_{k-1})+(\mathbf{X}_k\mathbf{S}_2\mathbf{Y}_k-\mathbf{X}_{k-1}\mathbf{S}_2\mathbf{Y}_{k-1})\right]d\tau\right\},\quad(25)$$

$$\mathbf{Y}_{k+1}-\mathbf{Y}_k=\tilde{\mathbf{A}}_2^{-1}(\omega)\left\{\int_0^t\left(\int_0^\tau \mathbf{A}_2 d\sigma\right)\left[\mathbf{A}_2(\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1})+(\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1})\mathbf{B}_2+\right.\right.$$

$$\left.+(\mathbf{Y}_k\mathbf{P}_1\mathbf{X}_k-\mathbf{Y}_{k-1}\mathbf{P}_1\mathbf{X}_{k-1})+(\mathbf{Y}_k\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1}\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_{k-1})\right]d\tau-$$

$$-\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega \mathbf{A}_2 d\sigma\right)\left[\mathbf{A}_2(\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1})+(\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1})\mathbf{B}_2+\right.$$

$$\left.+(\mathbf{Y}_k\mathbf{P}_1\mathbf{X}_k-\mathbf{Y}_{k-1}\mathbf{P}_1\mathbf{X}_{k-1})+(\mathbf{Y}_k\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1}\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_{k-1})\right]d\tau-$$

$$-\int_0^\omega\left[(\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1})\mathbf{B}_2+(\mathbf{Y}_k\mathbf{P}_1\mathbf{X}_k-\mathbf{Y}_{k-1}\mathbf{P}_1\mathbf{X}_{k-1})+\right.$$

$$\left.\left.+(\mathbf{Y}_k\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1}\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_{k-1})\right]d\tau\right\},\quad k=1,2,\ldots\quad(26)$$

Выполнив оценки по норме в (25), (26), получим оценки типа (18), (19):

$$\|\mathbf{X}_{k+1}-\mathbf{X}_k\|_C\le$$

$$\le\gamma_1\left\{\frac{1}{2}\alpha_1\omega^2(\alpha_1+\beta_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2)\|\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1}\|_C+\frac{1}{2}\alpha_1\delta_2\rho_1\omega^2\|\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1}\|_C\right\}+$$

$$+\gamma_1\left\{\omega(\beta_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2)\|\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1}\|_C+\delta_2\rho_1\omega\|\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1}\|_C\right\},\quad(27)$$

$$\|\mathbf{Y}_{k+1}-\mathbf{Y}_k\|_C\le$$

$$\le\gamma_2\left\{\frac{1}{2}\alpha_2\mu_1\rho_2\omega^2\|\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1}\|_C+\frac{1}{2}\alpha_2\omega^2(\alpha_2+\beta_2+\mu_1\rho_1+2\mu_2\rho_2)\|\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1}\|_C\right\}+$$

$$+\gamma_2\left\{\mu_1\rho_2\omega\|\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1}\|_C+\omega(\beta_2+\mu_1\rho_1+2\mu_2\rho_2)\|\mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1}\|_C\right\},\ k=1,2,\ldots \quad (28)$$

Запишем оценки (27), (28) в матричной форме

$$\mathbf{Z}_k\le\mathbf{Q}\mathbf{Z}_{k-1},\ k=1,2,\ldots, \quad (29)$$

где

$$\mathbf{Z}_k=\begin{pmatrix}\|\mathbf{X}_{k+1}-\mathbf{X}_k\|_C\\ \|\mathbf{Y}_{k+1}-\mathbf{Y}_k\|_C\end{pmatrix}.$$

Далее на основании рекуррентной оценки (29) имеем явную оценку

$$\mathbf{Z}_k\le\mathbf{Q}^k\mathbf{Z}_0,\ k=1,2,\ldots \quad (30)$$

Поскольку характеристические числа матрицы $\mathbf{Q}$ расположены внутри единичного круга, то, используя оценку (30) и соответствующие мажоранты для рядов (23), (24), можно показать, что на основании [5; 7] последовательность $\{\mathbf{X}_k(t),\mathbf{Y}_k(t)\}_0^\infty$ сходится равномерно по $t\in[0,\omega]$ к решению системы интегральных уравнений (10), (11), при этом имеет место оценка

$$\tilde{\mathbf{Z}}_i\le(\mathbf{E}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{Q}^i\mathbf{Z}_0,\ i=0,1,2,\ldots, \quad (31)$$

где

$$\tilde{\mathbf{Z}}_i=\begin{pmatrix}\|\mathbf{X}-\mathbf{X}_i\|_C\\ \|\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_i\|_C\end{pmatrix}.$$

Используя оценку (30), нетрудно получить оценку области локализации решения задачи (1)-(4), определяемую алгоритмом (21), (22):

$$\mathbf{Z}\le\tilde{\mathbf{Z}}_0+(\mathbf{E}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{Z}_0, \quad (32)$$

где

$$\mathbf{Z}=\begin{pmatrix}\|\mathbf{X}\|_C\\ \|\mathbf{Y}\|_C\end{pmatrix},\ \tilde{\mathbf{Z}}_0=\begin{pmatrix}\|\mathbf{X}_0\|_C\\ \|\mathbf{Y}_0\|_C\end{pmatrix}.$$

Замечание 2. Используя условия (6), (7), аналогичную оценку можно получить, исходя из системы интегральных уравнений (10), (11).

В самом деле, выполнив оценки по норме в тождествах (10), (11), получим

$$\mathbf{Z}\le\mathbf{Q}\mathbf{Z}+\mathbf{R}, \quad (33)$$

где $\mathbf{R}=colon(r_1,r_2)$;

$$r_1=\gamma_1h_1\omega\left(\frac{1}{2}\alpha_1\omega+1\right),\ r_2=\gamma_2h_2\omega\left(\frac{1}{2}\alpha_2\omega+1\right).$$

Используя положительную обратимость матрицы $\mathbf{E}-\mathbf{Q}$, из (33) получим оценку

$$\mathbf{Z} \le (\mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R}. \qquad (34)$$

Как видно, оценка (34) является коэффициентной. Чтобы воспользоваться оценкой (32), следует получить оценки для $\mathbf{Z}_0$, $\tilde{\mathbf{Z}}_0$, т.е. эта оценка менее удобна для применения, чем оценка (34). Однако в случае $\mathbf{X}_0 = 0$, $\mathbf{Y}_0 = 0$ эти оценки совпадают.

Замечание 3. Отметим в соответствии с замечанием 1, что если принять $\|\mathbf{Q}\| < 1$, то оценка области локализации решения может быть получена в виде

$$\|\mathbf{Z}\| \le \frac{\|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{Q}\|}.$$

Аналогичная оценка имеет место для $\tilde{\mathbf{Z}}_i$:

$$\|\tilde{\mathbf{Z}}_i\| \le \frac{\|\mathbf{Q}\|^i \|\mathbf{Z}_0\|}{1 - \|\mathbf{Q}\|}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Таким образом, в настоящей работе получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости на компакте и дан эффективный алгоритм построения решения задачи (1)-(4).

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Лаптинский, В.Н.*** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В.Н. Лаптинский. – Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
2. ***Зубов, В.И.*** Лекции по теории управления / В.И. Зубов. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
3. ***Lucas, J.*** Explicit solutions of Riccati equations appearing in differential games / J. Lucas // Applied Mathematics Letters, 1990. – V. 3. – №. 4. – P. 9-12.
4. ***Murty, K.N.*** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems existence and uniqueness / K.N. Murty, G.W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl., 1992. – V. 167. – P. 505-515.
5. ***Демидович, Б.П.*** Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
6. ***Забрейко, П.П.*** Принцип неподвижной точки и нелокальные теоремы о разрешимости для существенно нелинейных дифференциальных уравнений / П.П. Забрейко, В.Н. Лаптинский // Докл. АН Беларуси. – 1997. – Т. 41. – № 1. – С. 5-9.
7. ***Канторович, Л.В.*** Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
8. ***Гантмахер, Ф.Р.*** Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
9. ***Бибиков, Ю.Н.*** Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Н. Бибиков. – М.: Высшая школа, 1991. – 303 с.

Поступила в редакцию 01.10.2009 г.