УДК 535.51

Е.М. ОВСИЮК

ТРАНЗИТИВНОСТЬ В ТЕОРИИ ГРУППЫ ТРЕХМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ И ФОРМАЛИЗМ СТОКСА – МЮЛЛЕРА В ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ОПТИКЕ

Проведен теоретико-групповой анализ произвольных поляризационных устройств, описываемых (3-мерными ортогональными) матрицами Мюллера. Показано, что по результату поляризационного опыта над одним 3-вектором Стокса *матрица Мюллера прибора фиксируется с точностью до одного свободного параметра. Получены формулы, позволяющие вычислить в явном виде и однозначно параметры матрицы Мюллера оптического элемента по результатам его действия на два разных 3-вектора Стокса.*

1. Постановка задачи о транзитивности в группе Лоренца. Известно, что при описании поляризации света существенную роль может играть группа псевдоортогональных преобразований SO(3,1), изоморфная группе Лоренца [1] – [4].

Рассмотрим известную задачу из релятивистской кинематики – проблему транзитивности применительно к поляризационному формализму Стокса – Мюллера

$$L_b^{\,a}(k,k^*)\ S_a = +S'_b\,. \qquad (1)$$

Следует отметить особенность, присущую этой задаче. Если одна матрица Лоренца является решением уравнения транзитивности $LS = S'$, то, принимая во внимание существование малой группы Лоренца для начального и конечного 4-векторов Стокса S и S', можно получить равенство $L\,(L_{stat}S) = L'_{stat}S'$, и дальше

$$[\,(L'_{stat})^{-1} L\, L_{stat}\,]\, S = S'\,. \qquad (2)$$

Другими словами, матрица L транзитивности $L\,S = S'$ может быть определена неоднозначно.

Будем использовать факторизованное представление матриц Лоренца (придерживаемся обозначений, использованных в [4], [5]), уравнение (1) дает:

$$A^*S = A^{-1}S'\,, \qquad\qquad A\,S = (A^*)^{-1}\,S'\,, \qquad (3)$$

или в детальном виде:

$$\left|\begin{matrix} k_0^* & -k_1^* & -k_2^* & -k_3^* \\ -k_1^* & k_0^* & ik_3^* & -ik_2^* \\ -k_2^* & -ik_3^* & k_0^* & ik_1^* \\ -k_3^* & ik_2^* & -ik_1^* & k_0^* \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & k_0 & ik_3 & -ik_2 \\ k_2 & -ik_3 & k_0 & ik_1 \\ k_3 & ik_2 & -ik_1 & k_0 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{matrix}\right|,$$

$$\left|\begin{matrix} k_0 & -k_1 & -k_2 & -k_3 \\ -k_1 & k_0 & -ik_3 & ik_2 \\ -k_2 & ik_3 & k_0 & -ik_1 \\ -k_3 & -ik_2 & ik_1 & k_0 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} k_0^* & k_1^* & k_2^* & k_3^* \\ k_1^* & k_0^* & -ik_3^* & ik_2^* \\ k_2^* & ik_3^* & k_0^* & -ik_1^* \\ k_3^* & -ik_2^* & ik_1^* & k_0^* \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{matrix}\right|. \qquad (4)$$

Складывая и вычитая эти два уравнения, получаем (используем обозначения $k_0 = n_0 + im_0$, $k_j = -in_j + m_j$):

$$\begin{vmatrix} n_0 & -m_1 & -m_2 & -m_3 \\ -m_1 & n_0 & -n_3 & n_2 \\ -m_2 & n_3 & n_0 & -n_1 \\ -m_3 & -n_2 & n_1 & n_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n_0 & m_1 & m_2 & m_3 \\ m_1 & n_0 & n_3 & -n_2 \\ m_2 & -n_3 & n_0 & n_1 \\ m_3 & n_2 & -n_1 & n_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -m_0 & -n_1 & -n_2 & -n_3 \\ -n_1 & -m_0 & m_3 & -m_2 \\ -n_2 & -m_3 & -m_0 & m_1 \\ -n_3 & m_2 & -m_1 & -m_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_0 & -n_1 & -n_2 & -n_3 \\ -n_1 & m_0 & m_3 & -m_2 \\ -n_2 & -m_3 & m_0 & m_1 \\ -n_3 & m_2 & -m_1 & m_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{vmatrix}.$$

В результате имеем две системы линейных однородных уравнений:

$$\begin{aligned}
&n_0\,(S_0 - S'_0) - m_1\,(S_1 + S'_1) - m_2\,(S_2 + S'_2) - m_3\,(S_3 + S'_3) = 0\,,\\
&-m_1\,(S_0 + S'_0) + n_0\,(S_1 - S'_1) + n_2\,(S_3 + S'_3) - n_3\,(S_2 + S'_2) = 0\,,\\
&-m_2\,(S_0 + S'_0) + n_0\,(S_2 - S'_2) + n_3\,(S_1 + S'_1) - n_1\,(S_3 + S'_3) = 0\,,\\
&-m_3\,(S_0 + S'_0) + n_0\,(S_3 - S'_3) + n_1\,(S_2 + S'_2) - n_2\,(S_1 + S'_1) = 0\,,\\
&-m_0\,(S_0 + S'_0) - n_1\,(S_1 - S'_1) - n_2\,(S_2 - S'_2) - n_3\,(S_3 - S'_3) = 0\,,\\
&-n_1\,(S_0 - S'_0) - m_0\,(S_1 + S'_1) - m_2\,(S_3 - S'_3) + m_3\,(S_2 - S'_2) = 0\,,\\
&-n_2\,(S_0 - S'_0) - m_0\,(S_2 + S'_2) - m_3\,(S_1 - S'_1) + m_1\,(S_3 - S'_3) = 0\,,\\
&-n_3\,(S_0 - S'_0) - m_0\,(S_3 + S'_3) - m_1\,(S_2 - S'_2) + m_2\,(S_1 - S'_1) = 0\,.
\end{aligned} \qquad (5)$$

2. “Нерелятивистские” 3-мерные матрицы Мюллера. Дальше рассмотрим только более простой (нерелятивистский) случай $S_0 = S'_0 = I = \text{inv}$. Система уравнений (5) принимает вид (поскольку решение ищем среди преобразований группы 3-мерных вращений, то накладываем дополнительное ограничение $m_0 = 0, m_j = 0$):

$$\begin{aligned}
&n_0\,(S_1 - S'_1) + n_2\,(S_3 + S'_3) - n_3\,(S_2 + S'_2) = 0\,,\\
&n_0\,(S_2 - S'_2) + n_3\,(S_1 + S'_1) - n_1\,(S_3 + S'_3) = 0\,,\\
&n_0\,(S_3 - S'_3) + n_1\,(S_2 + S'_2) - n_2\,(S_1 + S'_1) = 0\,,\\
&-n_1\,(S_1 - S'_1) - n_2\,(S_2 - S'_2) - n_3\,(S_3 - S'_3) = 0\,.
\end{aligned} \qquad (6)$$

Здесь четвертое уравнение не является независимым: оно следует из трех первых:

$$\begin{aligned}
&n_2\,(S_3 + S'_3) - n_3\,(S_2 + S'_2) = -n_0\,(S_1 - S'_1)\,,\\
&n_3\,(S_1 + S'_1) - n_1\,(S_3 + S'_3) = -n_0\,(S_2 - S'_2)\,,\\
&n_1\,(S_2 + S'_2) - n_2\,(S_1 + S'_1) = -n_0\,(S_3 - S'_3)\,.
\end{aligned} \qquad (7)$$

Последние уравнения записываются в векторной форме

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{S}+\mathbf{S}') = -n_0\,(\mathbf{S}-\mathbf{S}') . \tag{8}$$

Решение для $\mathbf{n}$ можно искать в виде линейного разложения по трем векторам

$$\mathbf{n} = \alpha\,\mathbf{S} + \rho\,\mathbf{S}' + \beta\,\mathbf{S}\times\mathbf{S}' ,$$

тогда (8) дает (обозначаем $S^2 = \mathbf{SS}$)

$$(\alpha-\rho)\,\mathbf{S}\times\mathbf{S}' + \beta\,[\,\mathbf{S}'\,S^2 + \mathbf{S}'\,(\mathbf{SS}') - \mathbf{S}\,S^2 - \mathbf{S}\,(\mathbf{SS}')\,] = -n_0\mathbf{S} + n_0\mathbf{S}' ,$$

откуда следует $\rho = \alpha$, α – произвольный и

$$n_0 = \beta\,(S^2 + \mathbf{S}\,\mathbf{S}') , \qquad \mathbf{n} = \alpha\,(\mathbf{S}+\mathbf{S}') + \beta\,\mathbf{S}\times\mathbf{S}' . \tag{9}$$

Нужно учитывать существование дополнительного условия в виде ограничения для параметров $n_0^2 + \mathbf{n}^2 = 1$, что дает

$$\beta^2\,S^2 + \alpha^2 = \frac{1}{2(S^2 + \mathbf{S}\,\mathbf{S}')} . \tag{10}$$

Общее решение последнего уравнения можно записать в виде:

$$\alpha = \frac{\sin\Gamma}{\sqrt{2(S^2 + \mathbf{S}\,\mathbf{S}')}} , \qquad \beta = \frac{\cos\Gamma}{S\,\sqrt{2(S^2 + \mathbf{S}\,\mathbf{S}')}} , \qquad \Gamma\in[0,2\pi] . \tag{11}$$

Таким образом, получаем:

$$\begin{gathered} n_0^2 + \mathbf{n}^2 = 1 , \qquad n_0 = \frac{\cos\Gamma}{S\,\sqrt{2(S^2 + \mathbf{S}\,\mathbf{S}')}}\,(S^2 + \mathbf{S}\,\mathbf{S}') , \\ \mathbf{n} = \frac{\sin\Gamma}{\sqrt{2(S^2 + \mathbf{S}\,\mathbf{S}')}}\,(\mathbf{S}+\mathbf{S}') + \frac{\cos\Gamma}{S\,\sqrt{2(S^2 + \mathbf{S}\,\mathbf{S}')}}\,\mathbf{S}\times\mathbf{S}' , \end{gathered} \tag{12}$$

здесь $\Gamma\in[0,2\pi]$ – произвольный параметр. Отметим, что можно перейти к векторному параметру Гиббса – Федорова [1]: $\mathbf{c} = \mathbf{n}/n_0$, тогда соотношения (12) дают:

$$\mathbf{c} = \operatorname{tg}\Gamma\,\frac{S}{S^2 + \mathbf{S}\,\mathbf{S}'}\,(\mathbf{S}+\mathbf{S}') + \frac{\mathbf{S}\times\mathbf{S}'}{S^2 + \mathbf{S}\,\mathbf{S}'} . \tag{13}$$

Для (нерелятивистских) 4-векторов Стокса можно использовать также следующую параметризацию (I – интенсивность пучка света, p – степень поляризации):

$$S_0 = I , \qquad \mathbf{S} = Ip\,\mathbf{N} , \qquad \mathbf{N}^2 = 1 ; \tag{14}$$

при этом соотношения (12) принимают соответственно вид:

$$\begin{gathered} n_0^2 + \mathbf{n}^2 = 1 , \qquad n_0 = \cos\Gamma\,\frac{1 + \mathbf{N}\,\mathbf{N}'}{\sqrt{2(1 + \mathbf{N}\,\mathbf{N}')}} , \\ \mathbf{n} = \sin\Gamma\,\frac{\mathbf{N}+\mathbf{N}'}{\sqrt{2(1 + \mathbf{N}\,\mathbf{N}')}} + \cos\Gamma\,\frac{\mathbf{N}\times\mathbf{N}'}{\sqrt{2(1 + \mathbf{N}\mathbf{N}')}} . \end{gathered} \tag{15}$$

3. О восстановлении нерелятивистской 3-мерной матрицы Мюллера из результатов поляризационных измерений. Поскольку по паре 3-векторов Стокса связывающая их матрица Мюллера $\mathbf{S}\xrightarrow{\;o\;}\mathbf{S}_1$ фиксируется с точностью до одного произвольного параметра, то для того, чтобы найти параметры матрицы Мюллера оптического элемента, необходимо использовать хотя бы две пары 3-векторов Стокса $\mathbf{S}_1\xrightarrow{\;o\;}\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2\xrightarrow{\;o\;}\mathbf{S}_2$.

Задачу о восстановлении матрицы Мюллера можно пробовать сформулировать как нахождение совместного решения уравнений для двух пар 3-векторов Стокса. Рассмотрим сначала более простой способ решения этой задачи, основанный на использовании параметризации Гиббса - Федорова:

$$\mathbf{c}=\mathrm{tg}\,\Gamma\frac{\mathbf{N}_1+\mathbf{N}'_1}{1+\mathbf{N}_1\mathbf{N}'_1}+\frac{\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}'_1}{1+\mathbf{N}_1\mathbf{N}'_1},\quad \mathbf{c}=\mathrm{tg}\,\Gamma\frac{\mathbf{N}_2+\mathbf{N}'_2}{1+\mathbf{N}_2\mathbf{N}'_2}+\frac{\mathbf{N}_2\times\mathbf{N}'_2}{1+\mathbf{N}_2\mathbf{N}'_2};\qquad(16)$$

т.е. имеем одно векторное уравнение

$$\mathrm{tg}\,\Gamma\left[\frac{\mathbf{N}_1+\mathbf{N}'_1}{1+\mathbf{N}_1\mathbf{N}'_{11}}-\frac{\mathbf{N}_2+\mathbf{N}'_2}{1+\mathbf{N}_2\mathbf{N}'_2}\right]+\frac{\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}'_1}{1+\mathbf{N}_1\mathbf{N}'_1}-\frac{\mathbf{N}_2\times\mathbf{N}'_2}{1+\mathbf{N}_2\mathbf{N}'_2}=0.\qquad(17)$$

Из этого векторного уравнения, умножая его на $\mathbf{N}_1,\mathbf{N}'_1,\mathbf{N}_2,\mathbf{N}'_2$, соответственно, получаем следующие скалярные уравнения:

$$\begin{gathered}
\mathrm{tg}\,\Gamma\left[1-\frac{\mathbf{N}_1(\mathbf{N}_2+\mathbf{N}'_2)}{1+\mathbf{N}_2\mathbf{N}'_2}\right]-\frac{\mathbf{N}_1(\mathbf{N}_2\times\mathbf{N}'_2)}{1+\mathbf{N}_2\mathbf{N}'_2}=0,\\
\mathrm{tg}\,\Gamma\left[1-\frac{\mathbf{N}'_1(\mathbf{N}_2+\mathbf{N}'_2)}{1+\mathbf{N}_2\mathbf{N}'_2}\right]-\frac{\mathbf{N}'_1(\mathbf{N}_2\times\mathbf{N}'_2)}{1+\mathbf{N}_2\mathbf{N}'_2}=0,\\
\mathrm{tg}\Gamma\left[\frac{\mathbf{N}_2(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}'_1)}{1+\mathbf{N}_1\mathbf{N}'_1}-1\right]+\frac{\mathbf{N}_2(\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}'_1)}{1+\mathbf{N}_1\mathbf{N}'_1}=0,\\
\mathrm{tg}\Gamma\left[\frac{\mathbf{N}'_2(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}'_1)}{1+\mathbf{N}_1\mathbf{N}'_1}-1\right]+\frac{\mathbf{N}'_2(\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}'_1)}{1+\mathbf{N}_1\mathbf{N}'_1}=0.
\end{gathered}\qquad(18)$$

Откуда следует:

$$\begin{gathered}
\mathrm{tg}\,\Gamma=\frac{\mathbf{N}_1(\mathbf{N}_2\times\mathbf{N}'_2)}{(\mathbf{N}_2-\mathbf{N}_1)(\mathbf{N}_2+\mathbf{N}'_2)},\qquad \mathrm{tg}\,\Gamma=-\frac{\mathbf{N}'_1(\mathbf{N}'_2\times\mathbf{N}_2)}{(\mathbf{N}'_2-\mathbf{N}'_1)(\mathbf{N}'_2+\mathbf{N}_2)},\\
\mathrm{tg}\,\Gamma=\frac{\mathbf{N}_2(\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}'_1)}{(\mathbf{N}_1-\mathbf{N}_2)(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}'_1)},\qquad \mathrm{tg}\,\Gamma=-\frac{\mathbf{N}'_2(\mathbf{N}'_1\times\mathbf{N}_1)}{(\mathbf{N}'_1-\mathbf{N}'_2)(\mathbf{N}'_1+\mathbf{N}_1)}.
\end{gathered}\qquad(19)$$

Таким образом, получаем достаточно простое выражение для $\mathrm{tg}\,\Gamma$ вместе с четырьмя дополнительными условиями, фиксирующими множество пар 3-векторов Стокса, связываемых одной и той же матрицей Мюллера.

Теперь рассмотрим решение этой же задачи в рамках унитарной группы $SU(2)$. Понятно, что ответы не должны противоречить друг другу. Здесь имеем систему уравнений:

$$n_0 = \beta_1\,\mathbf{S}_1(\mathbf{S}_1+\mathbf{S}'_1),\qquad \mathbf{n}=\alpha_1\,(\mathbf{S}_1+\mathbf{S}'_1)+\beta_1\,\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}'_1,$$
$$n_0 = \beta_2\,\mathbf{S}_2(\mathbf{S}_2+\mathbf{S}'_2),\qquad \mathbf{n}=\alpha_2\,(\mathbf{S}_2+\mathbf{S}'_2)+\beta_2\,\mathbf{S}_2\times\mathbf{S}'_2, \tag{20}$$

либо эквивалентную ей систему

$$-n_0=\cos\Gamma\frac{1+\mathbf{N}_1\mathbf{N}'_1}{\sqrt{2(1+\mathbf{N}_1\mathbf{N}'_1)}},\qquad \mathbf{n}=\sin\Gamma\frac{\mathbf{N}_1+\mathbf{N}'_1}{\sqrt{2(1+\mathbf{N}_1\mathbf{N}'_1)}}+\cos\Gamma\frac{\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}'_1}{\sqrt{2(1+\mathbf{N}_1\mathbf{N}'_1)}},$$
$$n_0=\cos\Gamma\frac{1+\mathbf{N}_2\mathbf{N}'_2}{\sqrt{2(1+\mathbf{N}_2\mathbf{N}'_2)}},\qquad \mathbf{n}=\sin\Gamma\frac{\mathbf{N}_2+\mathbf{N}'_2}{\sqrt{2(1+\mathbf{N}_2\mathbf{N}'_2)}}+\cos\Gamma\frac{\mathbf{N}_2\times\mathbf{N}'_2}{\sqrt{2(1+\mathbf{N}_2\mathbf{N}'_2)}}. \tag{21}$$

Будем решать систему (21). Прежде всего, приравнивая два выражения для n_0, получаем ограничение на возможные пары 3-векторов Стокса, связываемых одной и той же матрицей Мюллера

$$\mathbf{N}_1\mathbf{N}'_1=\mathbf{N}_2\mathbf{N}'_2\,. \tag{22}$$

При этом векторное уравнение, получаемое из двух выражений для вектора $\mathbf{n}$, принимает вид

$$\sin\Gamma\,[\,(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}'_1)-(\mathbf{N}_2+\mathbf{N}'_2)\,]+\cos\Gamma\,[\,(\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}'_1)-(\mathbf{N}_2\times\mathbf{N}'_2)]=0. \tag{23}$$

Отмечаем, что ввиду равенства (22), формула (17) упрощается и принимает вид

$$-\ \mathrm{tg}\,\Gamma\,[\,(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}'_1)-(\mathbf{N}_2+\mathbf{N}'_2)\,]+\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}'_1-\mathbf{N}_2\times\mathbf{N}'_2=0\,. \tag{24}$$

Фактически два последних уравнения (23) и (24) совпадают, отличие только в том, что (24) не позволяет различить два решения $(+\cos\Gamma, +\sin\Gamma)$ и $(-\cos\Gamma, -\sin\Gamma)$. Умножая (24) на $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}'_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}'_2$, получаем 4 выражения для одного и того же параметра $\mathrm{tg}\,\Gamma$:

$$\mathrm{tg}\,\Gamma=\frac{\mathbf{N}_1(\mathbf{N}_2\times\mathbf{N}'_2)}{\mathbf{N}_1[\,(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}'_1)-(\mathbf{N}_2+\mathbf{N}'_2)\,]},\qquad \mathrm{tg}\,\Gamma=-\frac{\mathbf{N}'_1(\mathbf{N}'_2\times\mathbf{N}_2)}{\mathbf{N}'_1[\,(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}'_1)-(\mathbf{N}_2+\mathbf{N}'_2)\,]},$$
$$\mathrm{tg}\,\Gamma=\frac{\mathbf{N}_2(\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}'_1)}{\mathbf{N}_2[\,(\mathbf{N}_2+\mathbf{N}'_2)-(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}'_1)\,]},\qquad \mathrm{tg}\,\Gamma=-\frac{\mathbf{N}'_2(\mathbf{N}'_1\times\mathbf{N}_1)}{\mathbf{N}'_2[\,(\mathbf{N}_2+\mathbf{N}'_2)-(\mathbf{N}_1+\mathbf{N}'_1)\,]}. \tag{25}$$

Из постановки задачи следует, что все четыре выражения эквиваленты друг другу.

Автор благодарит Редькова В.М. за советы и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Федоров, Ф.И.** Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 380 с.
2. **Снопко, В.Н.** Поляризационные характеристики оптического излучения и методы их измерения / В.Н. Снопко. – Минск : Наука и техника, 1992. – 336 с.
3. Бикватернионы и матрицы Мюллера / А.А. Богуш и [др.] // Доклады НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51. – № 5. – С. 71–76.

4. **Red'kov, V.M.** Maxwell Equations in Media, Group Theory and Polarization of the Light / V.M. Red'kov // arXiv.org e-Print archive [Electronic resource]. – 2009. – Mode of access : http://arxiv.org/abs/0906.2482.
5. **Редьков, В.М.** Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск : Белорусская наука, 2009. – 496 с.

Поступила в редакцию 01.11.2010 г.