

ВЕКТОР-МАТРИЦЫ

Упорядоченные наборы (A_1, \dots, A_{m-1}) , у которых все компоненты A_1, \dots, A_{m-1} являются квадратными матрицами одного и того же порядка над полем комплексных чисел, рассматривал Э. Пост. Такие наборы он называл m -адическими (m -арными) матрицами. Это название объясняется тем, что на множестве всех m -арных матриц Э. Пост определил m -арную операцию, являющуюся m -арным аналогом операции умножения обычных матриц. Относительно этой m -арной операции множество всех m -арных матриц, у которых определители всех компонент отличны от нуля, является m -арной группой. Представляет интерес изучение упорядоченных наборов матриц, которые в отличие от наборов, изучавшихся Э. Постом, рассматриваются над произвольным кольцом, не обязаны быть квадратными, и различные компоненты одного и того же набора могут иметь несовпадающие размеры.

Следующее определение обобщает понятие m -арной матрицы из работы Э. Поста [1].

Определение 1. Пусть P – кольцо, k – целое, $k \geq 1$. Упорядоченный набор

$$A = (A_1, \dots, A_k) \quad (1)$$

k матриц A_1, \dots, A_k размеров $m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k$ с элементами из P называется *векторной матрицей* или *вектор-матрицей* размера $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ над P .

Вектор-матрицы вида (1) будем называть также *k -компонентными вектор-матрицами*.

Понятно, что 1-компонентные вектор-матрицы – это обычные матрицы.

Вектор-матрица (1), у которой все компоненты A_1, \dots, A_k – матрицы одного и того же размера $m \times n$, называется *вектор-матрицей* размера $m \times n$.

Вектор-матрица (1), у которой все компоненты A_1, \dots, A_k – квадратные матрицы порядков n_1, \dots, n_k соответственно, называется *квадратной вектор-матрицей* порядка (n_1, \dots, n_k) .

Вектор матрица (1), у которой все компоненты A_1, \dots, A_k – квадратные матрицы одного и того же порядка n , называется *квадратной вектор-матрицей* порядка n .

Определение 2. Произведением элемента $\lambda \in P$ на вектор-матрицу (1) называется вектор матрица $\lambda A = (\lambda A_1, \dots, \lambda A_k)$.

Определение 3. Суммой вектор-матриц $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ и $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_k)$ одинаковых размеров называется вектор-матрица

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_1 + B_1, \dots, A_k + B_k)$$

того же размера.

Понятно, что множество всех k -компонентных вектор-матриц размера $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ совпадает с декартовым произведением

$$M(n_1 \times m_1, P) \times \dots \times M(n_k \times m_k, P)$$

множеств $M(n_1 \times m_1, P), \dots, M(n_k \times m_k, P)$ всех матриц над P размеров $m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k$ соответственно. Так как множество всех матриц одного и того же размера над полем P , рассматриваемое вместе с операциями сложения матриц и умножения матрицы на скаляр, является линейным пространством, то имеет место

Предложение 1. Множество всех вектор-матриц одного и того же размера $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ над полем P является линейным пространством над P с операциями из определений 2 и 3. Нулем этого линейного пространства является вектор-матрица $\mathbf{0} = (0_1, \dots, 0_k)$, где компоненты $0_1, \dots, 0_k$ – нулевые матрицы размеров $m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k$ соответственно. Противоположной для вектор-матрицы (1) является вектор-матрица

$$-\mathbf{A} = (-A_1, \dots, -A_k),$$

у которой компоненты $-A_1, \dots, -A_k$ являются противоположными для матриц A_1, \dots, A_k соответственно.

Для обозначения множества всех постановок множества $\{1, 2, \dots, k\}$ используем стандартное обозначение S_k .

Определение 4. Если $k \geq 2, l \geq 2, \sigma$ – подстановка из S_k

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), i = 1, \dots, l$$

– k -компонентные вектор-матрицы над ассоциативным кольцом P такие, что для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ определено произведение

$$\mathbf{Y}_j = A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} A_{l\sigma^{l-1}(j)}, \quad (2)$$

то положим

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = \{\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_k\}. \quad (3)$$

Замечание 1. Если в определении 4 все компоненты матриц $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ являются матрицами 1-го порядка, то операция $[\]_{l, \sigma, k}$ определена на декартовой степени P^k . Таким образом, операцию $[\]_{l, \sigma, k}$ из определения 4 можно считать обобщением операции $[\]_{l, \sigma, k}$ из [2, 3].

Аналогично бинарному случаю, равенство (3) определено не всегда, а только в тех случаях, когда для любых соседних сомножителей в правой части (2), число столбцов предшествующего сомножителя совпадает с числом строк последующего сомножителя.

Пример 1. Пусть $k = 2, l = 3, \sigma = (12), P = Z$,

$$\mathbf{A} = ((3-4), \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}), \mathbf{B} = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}), \mathbf{C} = (\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}, (5\ 6)).$$

Тогда

$$[ABC]_{3,(12),2} = (Y_1, Y_2),$$

где

$$Y_1 = (-3 \ 4) \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix} = (9 - 90 \ 95)$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (5 \ 6) = \begin{pmatrix} -25 & -30 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$[ABC]_{3,(12),2} = ((9 - 90 \ 95), \begin{pmatrix} -25 & -30 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}).$$

Пример 2. Если $k = 2$, $l = 3$, $\sigma = (12)$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = ((b_1 \ b_2), (b_3 \ b_4)), \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{aligned} [ABC]_{3,(12),2} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} (b_3 \ b_4) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} (b_1 \ b_2) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 b_3 & a_1 b_4 \\ a_2 b_3 & a_2 b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 b_1 & a_3 b_2 \\ a_4 b_1 & a_4 b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_3 c_1 + a_1 b_4 c_2 \\ a_2 b_3 c_1 + a_2 b_4 c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 b_1 c_3 + a_3 b_2 c_4 \\ a_4 b_1 c_3 + a_4 b_2 c_4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то есть

$$[ABC]_{3,(12),2} = \begin{pmatrix} a_1 b_3 c_1 + a_1 b_4 c_2 \\ a_2 b_3 c_1 + a_2 b_4 c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 b_1 c_3 + a_3 b_2 c_4 \\ a_4 b_1 c_3 + a_4 b_2 c_4 \end{pmatrix}.$$

Предложение 2. Пусть

$$\mathbf{A}_m = (A_{m1}, \dots, A_{mk}), m = 1, \dots, 2l - 1$$

– k -компонентные вектор-матрицы над ассоциативным кольцом R , σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда, если определена k -компонентная вектор-матрица

$$[[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} \mathbf{A}_{l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,k} \quad (4)$$

то для любого $i = 1, \dots, l - 1$ определена k -компонентная вектор-матрица

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i [\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{i+l}]_{l,\sigma,k} \mathbf{A}_{i+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,k} \quad (5)$$

и верно равенство

$$\begin{aligned} & [[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} \mathbf{A}_{l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,k} = \\ & = [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i [\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{i+l}]_{l,\sigma,k} \mathbf{A}_{i+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,k}. \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство. Пусть определена k -компонентная вектор-матрица (4) и положим

$$[[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} \mathbf{A}_{l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,k} = (R_1, \dots, R_k),$$

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = (Y_1, \dots, Y_k).$$

Тогда для любого $j = 1, \dots, k - 1$, используя свойство $\sigma^l = \sigma$, получим

$$\begin{aligned}
 R_j &= Y_j A_{(l+1)\sigma(j)} \cdots A_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)} = \underbrace{A_{1j} A_{2\sigma(j)} \cdots A_{l\sigma^{l-1}(j)}}_{Y_j} A_{(l+1)\sigma(j)} \cdots A_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)} = \\
 &= A_{1j} A_{2\sigma(j)} \cdots A_{l\sigma^{l-1}(j)} \\
 &A_{(i+1)\sigma^i(j)} A_{(i+2)\sigma^{i+1}(j)} \cdots A_{l\sigma^{l-1}(j)} A_{(l+1)\sigma(j)} \cdots A_{(i+l)\sigma^l(j)} \\
 &A_{(i+l+1)\sigma^{i+1}(j)} \cdots A_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)} = \\
 &= A_{1j} A_{2\sigma(j)} \cdots A_{l\sigma^{l-1}(j)} \\
 &A_{(i+1)\sigma^i(j)} A_{(i+2)\sigma^{i+1}(j)} \cdots A_{l\sigma^{l-1}(j)} A_{(l+1)\sigma^l(j)} \cdots A_{(i+l)\sigma^{l+i}(j)} \\
 &A_{(i+l+1)\sigma^{i+1}(j)} \cdots A_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)} = \\
 &= A_{1j} A_{2\sigma(j)} \cdots A_{l\sigma^{l-1}(j)} \\
 &A_{(i+1)\sigma^i(j)} A_{(i+2)\sigma(\sigma^i(j))} \cdots A_{l\sigma^{l-1}(\sigma^i(j))} \cdots A_{(i+l)\sigma^{l-1}(\sigma^i(j))} \\
 &A_{(i+l+1)\sigma^{i+1}(j)} \cdots A_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)},
 \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned}
 R_j &= A_{1j} A_{2\sigma(j)} \cdots A_{l\sigma^{l-1}(j)} \\
 &A_{(i+1)\sigma^i(j)} A_{(i+2)\sigma(\sigma^i(j))} \cdots A_{l\sigma^{l-1}(\sigma^i(j))} \cdots A_{(i+l)\sigma^{l-1}(\sigma^i(j))} \\
 &A_{(i+l+1)\sigma^{i+1}(j)} \cdots A_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)}. \tag{7}
 \end{aligned}$$

Положим в последнем равенстве

$$Z_{\sigma^i(j)} = A_{(i+1)\sigma^i(j)} A_{(i+2)\sigma(\sigma^i(j))} \cdots A_{l\sigma^{l-1}(\sigma^i(j))} \cdots A_{(i+l)\sigma^{l-1}(\sigma^i(j))}. \tag{8}$$

Из (8) видно, что определена k -компонентная вектор-матрица

$$[\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{i+l}]_{l, \sigma, k} = (Z_1, \dots, Z_k).$$

Подставив (8) в (7), получим

$$R_j = A_{1j} A_{2\sigma(j)} \cdots A_{l\sigma^{l-1}(j)} Z_{\sigma^i(j)} A_{(i+l+1)\sigma^{i+1}(j)} \cdots A_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)},$$

а это значит, что существует k -компонентная вектор-матрица (5) и верно равенство (6). Предложение доказано.

Предложение 3. Пусть

$$\mathbf{A}_m = (A_{m1}, \dots, A_{mk}), m = 1, \dots, 2l-1$$

– k -компонентные вектор-матрицы над ассоциативным кольцом P , σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда, если для некоторого $i = 1, \dots, l-1$ определена k -компонентная вектор-матрица (5), то определена k -компонентная вектор-матрица (4) и верно (6).

Доказательство. Пусть определена k -компонентная вектор-матрица (5) и положим

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l [\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{i+l}]_{l, \sigma, k} \mathbf{A}_{i+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l, \sigma, k} = (S_1, \dots, S_k),$$

пусть также, как и в доказательстве предложения 2,

$$[\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{i+l}]_{l, \sigma, k} = (Z_1, \dots, Z_k).$$

Тогда для любого $j = 1, \dots, k$ верно

$$\begin{aligned} S_j &= A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{i\sigma^{l-1}(j)} Z_{\sigma^l(j)} A_{(i+l+1)\sigma^{l+1}(j)} \dots A_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)} = \\ &= A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{i\sigma^{l-1}(j)} \\ &\quad \underbrace{A_{(i+1)\sigma^l(j)} A_{(i+2)\sigma(\sigma^l(j))} \dots A_{l\sigma^{l-1}(\sigma^l(j))} \dots A_{(i+l)\sigma^{l-1}(\sigma^l(j))}}_{Z_{\sigma^l(j)}} \\ &\quad A_{(i+l+1)\sigma^{l+1}(j)} \dots A_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)} = \\ &= A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{i\sigma^{l-1}(j)} \\ &\quad A_{(i+1)\sigma^l(j)} A_{(i+2)\sigma^{l+1}(j)} \dots A_{l\sigma^{l-1}(j)} A_{(l+1)\sigma^l(j)} \dots A_{(i+l)\sigma^{l-1}(j)} \\ &\quad A_{(i+l+1)\sigma^{l+1}(j)} \dots A_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)} = \\ &= A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{i\sigma^{l-1}(j)} \\ &\quad A_{(i+1)\sigma^l(j)} A_{(i+2)\sigma^{l+1}(j)} \dots A_{l\sigma^{l-1}(j)} A_{(l+1)\sigma^l(j)} \dots A_{(i+l)\sigma^l(j)} \\ &\quad A_{(i+l+1)\sigma^{l+1}(j)} \dots A_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)} = \\ &= A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{i\sigma^{l-1}(j)} A_{(l+1)\sigma(j)} \dots A_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)}, \end{aligned}$$

то есть

$$S_j = A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{i\sigma^{l-1}(j)} A_{(l+1)\sigma(j)} \dots A_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)}. \quad (9)$$

Положим в последнем равенстве

$$Y_j = A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{i\sigma^{l-1}(j)}. \quad (10)$$

Из (10) видно, что существует k -компонентная вектор-матрица

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = (Y_1, \dots, Y_k).$$

Подставив (10) в (9), получим

$$S_j = Y_j A_{(l+1)\sigma(j)} \dots A_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)},$$

а это значит, что существует k -компонентная вектор-матрица (4) и верно равенство (6). Предложение доказано.

Предложения 2 и 3 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть

$$\mathbf{A}_m = (A_{m1}, \dots, A_{mk}), m = 1, \dots, 2l-1$$

– k -компонентные вектор-матрицы над ассоциативным кольцом P , σ – подстановка из S_k удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда, если для некоторого $i = 0, 1, \dots, l-1$ определена k -компонентная вектор-матрица

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i [\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{i+j}]_{l, \sigma, k} \mathbf{A}_{i+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l, \sigma, k}$$

то для любого $j = 0, 1, \dots, l-1$ определена k -компонентная вектор-матрица

$$[A_1 \dots A_j [A_{j+1} \dots A_{j+l}]_{l, \sigma, k} A_{j+l+1} \dots A_{2l-1}]_{l, \sigma, k}$$

и верно равенство

$$[A_1 \dots A_j [A_{j+l+1} \dots A_{j+l}]_{l, \sigma, k} A_{j+l+1} \dots A_{2l-1}]_{l, \sigma, k} = [A_1 \dots A_j [A_{j+1} \dots A_{j+l}]_{l, \sigma, k} A_{j+l+1} \dots A_{2l-1}]_{l, \sigma, k}$$

Так как любая подстановка $\sigma \in S_k$ представляемая в виде произведения независимых циклов, длина каждого из которых не превосходит 2 (подстановка σ либо оставляет символ неподвижным, либо меняет два символа местами), удовлетворяет условию $\sigma^3 = \sigma$, то, полагая в теореме 1 $l = 3$, получим

Следствие 1. Пусть A, B, C, D и E – k -компонентные вектор-матрицы над ассоциативным кольцом P , σ -подстановка из S_k , представляемая в виде произведения независимых циклов, длина каждого из которых не превосходит 2. Тогда, если определена одна из вектор-матриц

$$[[ABC]_{3, \sigma, k} DE]_{3, \sigma, k}, [A[BCD]_{3, \sigma, k} E]_{3, \sigma, k}, [AB[CDE]_{3, \sigma, k}]_{3, \sigma, k}$$

то определены и две другие вектор-матрицы и верны равенства

$$[[ABC]_{3, \sigma, k} DE]_{3, \sigma, k} = [A[BCD]_{3, \sigma, k} E]_{3, \sigma, k} = [AB[CDE]_{3, \sigma, k}]_{3, \sigma, k}$$

Полагая в следствии 1 $k = 2$, $\sigma = (12)$, получим

Следствие 2. Пусть

$$A = (A_1, A_2), B = (B_1, B_2), C = (C_1, C_2), D = (D_1, D_2), E = (E_1, E_2)$$

– 2-компонентные вектор-матрицы над ассоциативным кольцом P , $\sigma = (12) \in S_2$. Тогда, если определена одна из вектор-матриц

$$[ABC]_{3, (12), 2} DE]_{3, (12), 2}, [A[BCD]_{3, (12), 2} E]_{3, (12), 2}, [AB[CDE]_{3, (12), 2}]_{3, (12), 2}$$

то определены и две другие вектор-матрицы и верны равенства

$$[ABC]_{3, (12), 2} DE]_{3, (12), 2} = [A[BCD]_{3, (12), 2} E]_{3, (12), 2} = [AB[CDE]_{3, (12), 2}]_{3, (12), 2}$$

Обозначим через $M(n, k, P)$ – множество всех k -компонентных квадратных вектор-матриц порядка n над ассоциативным кольцом P . Ясно, что множество $M(n, k, P)$ совпадает с k -ой декартовой степенью

$\underbrace{M(n, P) \times \dots \times M(n, P)}_k$ множества $M(n, P)$ всех квадратных матриц n -го порядка над P :

$$M(n, k, P) = \underbrace{M(n, P) \times \dots \times M(n, P)}_k$$

Напомним, что l -арный группоид $\langle A, [] \rangle$, в котором для любого $i = 1, 2, \dots, l - 1$ выполняется тождество

$$[[a_1 \dots a_i]_{a_{i+1} \dots a_{2l-1}}] = [a_1 \dots a_i [a_{i+1} \dots a_{i+1}]_{a_{i+1} \dots a_{2l-1}}]$$

называется [4] l -арной полугруппой, а l -арная операция $[]$ в этом случае называется ассоциативной.

Так как для ассоциативного кольца P множество $M(n, P)$ с операцией умножения матриц является полугруппой, то, полагая в теореме 3.2.2 из [3] $A = M(n, P)$, получим

Предложение 4. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma' = \sigma$, P – ассоциативное кольцо, то $\langle M(n, k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная полугруппа.

Заметим, что предложение 4 является также непосредственным следствием теоремы 1.

Замечание 2. Согласно теореме 3.3.5 из [3], условие $\sigma^l = \sigma$ является не только необходимым, но и достаточным для ассоциативности l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$.

Прежде чем сформулировать следующую теорему, приведем определения некоторых понятий.

Линейное пространство A над полем P с определенной на нем l -арной операцией η называется $(2, l)$ -алгеброй над P , если выполняются следующие условия:

1) для любого $\lambda \in P$ и любых $a_1, \dots, a_l \in A$ верно

$$\lambda \eta(a_1 \dots a_l) = \eta((\lambda a_1) a_2 \dots a_l) = \eta(a_1 (\lambda a_2) a_3 \dots a_l) = \dots = \eta(a_1 \dots a_{l-1} (\lambda a_l));$$

2) l -арная операция η дистрибутивна относительно операции сложения векторов, то есть в A для любого $i = 1, \dots, l$ выполняется тождество

$$\eta(a_1 \dots a_{i-1} (b_1 + b_2) a_{i+1} \dots a_l) = \eta(a_1 \dots a_{i-1} b_1 a_{i+1} \dots a_l) + \eta(a_1 \dots a_{i-1} b_2 a_{i+1} \dots a_l).$$

$(2, l)$ -Алгебру $\langle A, +, \eta \rangle$ называют: ассоциативной, если l -арная операция η ассоциативна; абелевой, если в ней для любой подстановки σ множества $\{1, 2, \dots, l\}$ выполняется тождество

$$[a_1 a_2 \dots a_l] = [a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(l)}].$$

Элемент a $(2, l)$ -алгебры $\langle A, +, \eta \rangle$ называют: ее *единицей*, если для любого $x \in A$ верно

$$\underbrace{[x a \dots a]}_{l-1} = \underbrace{[a x a \dots a]}_{l-2} = \dots = \underbrace{[a \dots a x]}_{l-1} = x;$$

ее i -м делителем нуля, если существуют $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_l \in A$, отличные от нуля, такие, что

$$[b_1 \dots b_{i-1} a b_{i+1} \dots b_l] = 0.$$

Если элемент a является i -м делителем нуля для каждого $i \in \{1, \dots, l\}$, то a называют *делителем нуля* в $\langle A, [] \rangle$.

Множество $M(n, P)$, где P – поле, является ассоциативной алгеброй над P . Поэтому, если в теореме 3.10.2 из [3] положить $A = M(n, P)$, то справедлива

Теорема 2. Пусть P – поле, $k \geq 2, l \geq 3, k$ делит $l - 1, \sigma$ – цикл длины k из S_k . Тогда $\langle M(n, k, P), +, []_{l, \sigma, k} \rangle$ – ассоциативная неабелева $(2, l)$ -алгебра над P , в которой нет единиц, и все элементы которой являются делителями ее нуля $(\underbrace{0, \dots, 0}_k)$, где 0 – нулевая квадратная матрица n -го

порядка.

Полагая в теореме 2 $l = k + 1$, получим

Следствие 3. Пусть P – поле, $k \geq 2, \sigma$ – цикл длины k из S_k . Тогда $\langle M(n, k, P), +, []_{k+1, \sigma, k} \rangle$ – ассоциативная неабелева $(2, k + 1)$ -алгебра над P , в которой нет единиц, и все элементы которой являются делителями ее нуля $(\underbrace{0, \dots, 0}_k)$.

Замечание 3. Частный случай вектор-матриц ($k = m - 1$), у которых все компоненты являются квадратными матрицами одного и того же порядка, рассматривал Пост [1]. Там же для таких $(m - 1)$ -компонентных вектор-матриц определена m -арная операция

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_m] = (Y_1, \dots, Y_{m-1}),$$

где

$$Y_j = A_{1j} A_{2(j+1)} \dots A_{(m-j)(m-1)} A_{(m-j+1)j} \dots A_{(m-1)(j-1)} A_{mj}, \quad j = 1, \dots, m-1.$$

Легко заметить, что m -арная операция Поста является частным случаем l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$, если в ней положить $k = m - 1$, $l = m$, $\sigma = (12 \dots m - 1)$: $[\] = [\]_{m, (12 \dots m-1), (m-1)}$.

Подстановку $\sigma = (12 \dots k)$ в обозначении операции $[\]_{l, \sigma, k}$ будем опускать и писать $[\]_{l, k}$. В частности, полагаем $[\]_{k+1, (12 \dots k), k} = [\]_{k+1, k}$. Таким образом, операция Поста совпадает с операцией $[\]_{m, m-1}$.

Полагая в следствии 3 $\sigma = (12 \dots k)$, получим

Следствие 4. Если P – поле, $k \geq 2$, то $\langle M(p, k, P), +, [\]_{k+1, k} \rangle$ – ассоциативная неабелева $(2, k + 1)$ -алгебра над P , в которой нет единиц, и все элементы которой являются делителями ее нуля $\underbrace{0, \dots, 0}_k$.

Полагая в следствии 4 $k = 2$, получим

Следствие 5. Если P – поле, то $\langle M(p, 2, P), +, [\]_{3, 2} \rangle$ – ассоциативная неабелева, $(2, 3)$ -алгебра над P , в которой нет единиц, и все элементы которой являются делителями ее нуля $(0, 0)$.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10РА-002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48. – № 2. – P. 208–350.
2. Гальмак, А.М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
3. Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
4. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы / С.А. Русаков. – Мн. : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.