УДК 517.9

Е.И. ФЕДОРАКО

О СТРУКТУРЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ

Найдено параметрическое представление общего решения одного из видов дифференциального уравнения Абеля в виде функции его частного решения и произвольной постоянной интегрирования.

Рассмотрим дифференциальное уравнение Абеля

$$y' = f_3(x)y^3 + f_2(x)y^2 + f_1(x)y, \tag{1}$$

где функции $f_i(x)$, $i=1,2,3$ обеспечивают существование и единственность локальной задачи Коши в некоторой области, $f_3(x)\neq 0$.

Дифференциальное уравнение Абеля (1) по виду правой части является следующим за уравнением Риккати

$$y' = a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x) \tag{2}$$

и также интегрируется в квадратурах только в исключительных случаях. Но структура общего решения уравнения (2) хорошо изучена. А именно: оно является дробно-линейной функцией произвольной постоянной. Метод исследования, применяемый для уравнения (2), в случае уравнения (1) принципиально неприменим. Анализ указанных в [1] и других литературных источниках проинтегрированных уравнений не позволяет сделать выводов о структуре и особенностях решений уравнений вида (1). Естественно поэтому искать связь уравнений вида (1) с уравнениями, свойства которых известны. В нашем случае – с нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка.

Полагая в уравнении (1)

$$y = z\cdot\exp\left(\int f_1(x)\,dx\right),$$

получим уравнение

$$z' = K_3(x)z^3 + K_2(x)z^2, \tag{3}$$

где

$$K_3(x) = f_3(x)\cdot\exp\left(2\int f_1(x)dx\right), \quad K_2(x) = f_2(x)\cdot\exp\left(\int f_1(x)dx\right).$$

Введя параметр p с помощью соотношения

$$\frac{dx}{dp} = \frac{1}{z(x)}, \tag{4}$$

получим

$$\frac{d^2x}{dp^2} = z'(x)\cdot\left(-\frac{1}{z^2(x)}\right)\cdot\frac{dx}{dp}.$$

Тогда уравнение (1) будет иметь вид

$$\frac{d^2x}{dp^2} = -K_3(x) - K_2(x)\frac{dx}{dp}. \tag{5}$$

В работах [2, 3] показано, что в некоторых случаях общее решение уравнения вида (5) можно выразить через известное частное решение. Именно, уравнения вида

$$x'' + f(p)x' + ke^{\mu x} + F(p) = 0 \tag{6}$$

допускают группу непрерывных по параметру преобразований

$$p^* = -\frac{1}{2}\ln\left|C + \exp(-\alpha p)\right|,$$

$$x^* = x + 2\alpha p + 2\ln\left|C + \exp(-\alpha p)\right|$$

тогда и только тогда, когда выполняется тождество:

$$3\left(F' - 4ff' - 2f''\right) - 2\left(F'' - 4f'^2 - 4ff'' - 2f'''\right)\left(F - 2f^2 - 2f'\right) -$$

$$-4f'\left(F - 2f^2 - 2f'\right)^2 + 2\left(F' - 4ff' - 2f''\right)\left(F - 2f^2 - 2f'\right)f \equiv 0.$$

В частности, это условие выполняется, если уравнение (6) будет иметь вид

$$x'' + \alpha x' + ke^{\mu x} + 2\alpha^2 = 0, \tag{7}$$

где $\alpha = const \neq 0$.

Решение уравнения (7) можно представить в виде

$$x = F(p,C) = -2\alpha p - 2\ln\left|C + e^{-\alpha p}\right| + x_1\left(-\frac{1}{\alpha}\ln\left|C + e^{-\alpha p}\right|\right).$$

Тогда общее решение уравнения (1) в параметрической форме будет иметь вид

$$x = F(p,C) = -2\alpha p - 2\ln\left|C + e^{-\alpha p}\right| + x_1\left(-\frac{1}{\alpha}\ln\left|C + e^{-\alpha p}\right|\right),$$
$$y = \frac{\exp\left(\int f_1\left(F(p,C)\right)\cdot F_p'(p,C)dp\right)}{F_p'(p,C)}, \tag{8}$$

где $x_1(p)$ – частное решение уравнения (7).

Существуют и другие уравнения вида (5) (см. [2, 3]), для которых можно выписать аналогичные формулы (8). Они не приводятся здесь в силу громоздкости.

Формулы (8) и дают пример зависимости общего решения от произвольной постоянной интегрирования C. В принципе, $x_1(p)$ можно найти численно или приближенно. Интересно, что уравнение (7), частное с точки зрения математики, имеет вполне конкретные приложения в физике [2-5].

Следуя [6], покажем, что все решения уравнения (7) с точностью до замены переменных принадлежат множеству решений уравнения Лиувилля.

В уравнении

$$u_{xy} = ke^u \tag{9}$$

сделаем замену

$$u = z + p(x,y), \quad x_1 = f(x,y), \quad y_1 = y, \tag{10}$$

где $z = z(x,y)$ – новая неизвестная функция, $p(x,y)$ и $f(x,y)$ – некоторые дважды непрерывно дифференцируемые функции, которые будут определены в дальнейшем. Будем искать решения преобразованного уравнения, не зависящие от переменной y_1. Эти решения удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2z}{dx_1^2}f_xf_y + \frac{dz}{dx_1}f_{xy} - K\exp(z+p) + p_{xy} = 0. \tag{11}$$

Если в уравнении (11) потребовать, чтобы

$$f_xf_y\exp(-p), \quad f_{xy}\exp(-p), \quad p_{xy}\exp(-p)$$

были ненулевыми постоянными, то придем к уравнению вида (7) (с точностью до обозначений). Эти условия будут совместными, если положить

$$f_{xy} = \alpha f_xf_y, \quad f_{xy} = \frac{1}{2\alpha}p_{xy}, \quad p_{xy} = \exp(p). \tag{12}$$

Последнее из уравнений (12) имеет общее решение (7)

$$p(x,y) = F(x) - G(y) - 2\ln\left[C_1\int_{x_0}^{x}\exp\left(F(x)\right)dx + \frac{1}{2C_1}\int_{y_0}^{y}\exp\left(-G(y)\right)dy\right],$$

где $F(x)$ и $G(y)$ – произвольные функции, C_1 – произвольная постоянная. Учитывая соотношение (12), получаем, что

$$f(x,y)=-\frac{1}{\alpha}\ln\left[C_1\int_{x_0}^{x}\exp(F(x))dx+\frac{1}{2C_1}\int_{y_0}^{y}\exp(-G(y))dy\right]+C \quad (C=const).$$

Если $z(x_1)$ – общее решение уравнения

$$\frac{d^2z}{dx_1^2}+\alpha\frac{dz}{dx_1}-2\alpha^2K\exp z+2\alpha^2=0,$$

то уравнение (9) имеет решение

$$u(x,y)=F(x)-G(y)-2\ln\left[C_1\int_{x_0}^{x}\exp(F(x))dx+\frac{1}{2C_1}\int_{y_0}^{y}\exp(-G(y))dy\right]+$$

$$+z_1\left(C-\frac{1}{\alpha}\ln\left[C_1\int_{x_0}^{Kx}\exp(F(x))dx+\frac{1}{2C_1}\int_{y_0}^{y}\exp(-G(y))dy\right]\right),$$

где F и G – произвольные функции, C и C_1 – произвольные постоянные.

Итак, нами установлено, что общее решение уравнения (1) допускает параметрическое представление (8) через частное решение уравнения второго порядка (6), если только уравнение (6) инвариантно относительно однопараметрической группы преобразований. Показано также, что общее решение уравнения Лиувилля может быть выражено через решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, две произвольные функции и две произвольные постоянные.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Камке, Э.*** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М., 1971.
2. ***Чудновский, В.М., Холодкевич, Е.Д.*** // Физика твердого тела. – 1982. – Т. 24. – Вып. 4. – С. 1118–1123.
3. ***Самодуров, А.А.*** О решениях одного уравнения нелинейной оптики / А.А Самодуров, В.М. Чудновский //Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 5. – С. 911–913.
4. ***Горбузов, В.Н.*** Уравнения Риккати и Абеля / В.Н Горбузов, А.А. Самодуров. – Гродно, 1986.
5. ***Самодуров, А.А.*** Об интегрируемости дифференциального уравнения Абеля в параметрическом виде / А.А. Самодуров // Вестн. Белорус. ун-та, Сер. 1. – 1983. – № 2. – С. 57–59.
6. ***Самодуров, А.А.*** О связи уравнения Лиувилля с уравнением сверхизлучательной лавины / А.А. Самодуров // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 2. – С. 337.
7. ***Калоджеро, Ф.*** Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования эволюционных уравнений / Ф. Калоджеро, А. Дегасперис. – М., 1985.

Поступила в редакцию 14.02.2011 г.