

σ -СОГЛАСОВАННЫЕ ВЕКТОР-МАТРИЦЫ

В работе для любого целого $k \geq 1$ и любой подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ определяются σ -согласованные вектор-матрицы над произвольным кольцом P . Если обычные матрицы рассматривать как однокомпонентные вектор-матрицы, то для них σ -согласованность равносильна совпадению размеров. Доказывается, что если P – ассоциативное кольцо, а подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то множество всех σ -согласованных вектор-матриц над P одного и того же фиксированного размера является l -арной полугруппой относительно l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$, где $l \geq 2$. Приводятся многочисленные следствия этого результата.

1. Введение. Так как матрица может быть умножена сама на себя тогда и только тогда, когда она квадратная, а перемножать квадратные матрицы можно тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же порядок, то из замкнутости некоторого множества матриц относительно операции умножения матриц необходимо следует, что все элементы этого множества являются квадратными матрицами одного и того же порядка. Это означает, что если некоторое подмножество M множества $M(P)$

всех матриц над ассоциативным кольцом P является полугруппой относительно операции умножения матриц, то оно является подполугруппой полугруппы $\mathbf{M}_n(P)$ всех квадратных матриц порядка n над P для некоторого $n \geq 2$. Других полугрупп в $\mathbf{M}(P)$ нет.

Если рассматривать обычные матрицы как однокомпонентные вектор-матрицы, то частичной полугруппе $\mathbf{M}(P)$ будет соответствовать частичная l -арная полугруппа $\langle \mathbf{M}(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ всех k -компонентных вектор-матриц над P с частичной l -арной операцией $[]_{l, \sigma, k'}$ где σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma' = \sigma$, а полугруппе $\mathbf{M}_n(P)$ из $\mathbf{M}(P)$ – l -арная полугруппа $\langle \mathbf{M}_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ из $\langle \mathbf{M}(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ всех k -компонентных вектор-матриц, у которых каждая компонента является квадратной матрицей порядка n над P .

Имея ввиду сказанное выше, решение общей задачи изучения строения частичной l -арной полугруппы $\langle \mathbf{M}(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ естественно начинать с поиска ответа на вопрос: *исчерпываются ли ее l -арные подполугруппы l -арными подполугруппами l -арных полугрупп вида $\langle \mathbf{M}_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$? Иначе говоря: существуют ли в $\langle \mathbf{M}(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ l -арные подполугруппы, отличные от l -арных подполугрупп l -арных полугрупп вида $\langle \mathbf{M}_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$?*

В данной работе получен отрицательный ответ на первый вопрос, соответственно – положительный ответ на второй вопрос. Это означает, что частичная l -арная полугруппа $\langle \mathbf{M}(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ устроена сложнее, чем ее прототип – частичная полугруппа $\mathbf{M}(P)$.

2 Общие определения. Напомним определение k -компонентной вектор-матрицы из [1, 2], обобщающее понятие m -арной матрицы из работы Э. Поста [3].

2.1 Определение [1]. Пусть P – кольцо, k – целое, $k \geq 1$. Упорядоченный набор $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ k матриц $A_1, \dots, A_k$ размеров $m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k$ с элементами из P называется *векторной матрицей или вектор-матрицей размера $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ над P* .

Вектор-матрицу из определения 2.1 будем называть также *k -компонентной вектор-матрицей*.

Понятно, что 1-компонентные вектор-матрицы – это обычные матрицы.

Вектор-матрица, у которой все компоненты $A_1, \dots, A_k$ – матрицы одного и того же размера $m \times n$, называется *вектор-матрицей размера $m \times n$* .

Вектор-матрица, у которой все компоненты $A_1, \dots, A_k$ – квадратные матрицы порядков $n_1, \dots, n_k$ соответственно, называется *квадратной вектор-матрицей порядка $(n_1, \dots, n_k)$* .

Вектор-матрица, у которой все компоненты $A_1, \dots, A_k$ – квадратные матрицы одного и того же порядка n , называется *квадратной вектор-матрицей порядка n* .

Вектор-матрицам помимо уже отмечавшихся работ [1, 2] посвящена также работа [4].

Для обозначения множества всех подстановок множества $\{1, 2, \dots, k\}$ используем стандартное обозначение S_k .

2.2 Определение [1]. Если $k \geq 2, l \geq 2, \sigma$ – подстановка из S_k

$$A_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), i = 1, \dots, l$$

– k -компонентные вектор-матрицы над ассоциативным кольцом P такие, что для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ определено произведение

$$Y_j = A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} A_{l\sigma^{l-1}(j)} \quad (2.1)$$

то положим

$$[A_1 A_2 \dots A_l]_{l, \sigma, k} = \{Y_1, \dots, Y_k\}. \quad (2.2)$$

l -Арную операцию (2.2) иногда для краткости будем называть l -арным произведением.

2.3 Замечание. Если в определении 2.2 все компоненты матриц $A_1, \dots, A_l$ являются матрицами 1-го порядка, то операция $[]_{l, \sigma, k}$ определена на декартовой степени P^k . Таким образом, операцию $[]_{l, \sigma, k}$ из определения 2.2 можно считать обобщением операций $[]_{l, \sigma, k}$ из [5, 6].

Аналогично бинарному случаю, l -арное произведение (2.2) определено не всегда, а только в тех случаях, когда для любых соседних сомножителей в правой части (2.1), число столбцов предшествующего сомножителя совпадает с числом строк последующего сомножителя.

2.4 Теорема [1]. Пусть

$$A_m = (A_{m1}, \dots, A_{mk}), m = 1, \dots, 2l - 1$$

– k -компонентные вектор-матрицы над P, σ – подстановка из S_k удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда, если для некоторого $i = 0, 1, \dots, l - 1$ определена k -компонентная вектор-матрица

$$[A_1 \dots A_l [A_{l+1} \dots A_{j+l}]_{l, \sigma, k} A_{j+l+1} \dots A_{2l-1}]_{l, \sigma, k}$$

то для любого $j = 0, 1, \dots, l - 1$ определена k -компонентная вектор-матрица

$$[A_1 \dots A_j [A_{j+1} \dots A_{j+l}]_{l, \sigma, k} A_{j+l+1} \dots A_{2l-1}]_{l, \sigma, k}$$

и верно равенство

$$\begin{aligned} & [A_1 \dots A_l [A_{l+1} \dots A_{j+l}]_{l, \sigma, k} A_{j+l+1} \dots A_{2l-1}]_{l, \sigma, k} = \\ & = [A_1 \dots A_j [A_{j+1} \dots A_{j+l}]_{l, \sigma, k} A_{j+l+1} \dots A_{2l-1}]_{l, \sigma, k} \end{aligned}$$

Для обозначения множества всех k -компонентных вектор-матриц размера $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ над P будем использовать символ $M_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$. В частности, символом $M_{n_1, \dots, n_k}(P)$ обозначается множество всех k компонентных квадратных вектор-матриц порядка $(n_1, \dots, n_k)$ над P . Если $n_1 = \dots = n_k = n$, то для обозначения множества всех k -компонентных квадратных вектор-матриц порядка n над P вместо символа $M_{\underbrace{n \dots n}_k}(P)$ будем использовать символ $M_n(k, P)$.

2.5 Предложение [1]. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle M_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная полугруппа.

Заметим, что предложение 2.5 является также непосредственным следствием теоремы 2.4.

3 Основные определения. Для всякой подстановки $\sigma \in S_k$ положим:

$$\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_p \sigma_{p+1} \dots \sigma_q \quad (3.1)$$

– разложение σ в произведение независимых циклов, где $\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_q$ – все циклы длины 1;

$$X_1 = \{i_{11}, \dots, i_{1l_1}\}, \dots, X_p = \{i_{p1}, \dots, i_{pl_p}\}, X_{p+1} = \{i_{p+1}\}, \dots, X_q = \{i_q\} \quad (3.2)$$

– σ -орбиты, соответствующие циклам $\sigma_1, \dots, \sigma_p, \sigma_{p+1}, \dots, \sigma_q$. Длина цикла σ_r ($r = 1, \dots, q$) обозначается через l_r . В частности, $l_{p+1} = \dots = l_q = 1$.

3.1 Определение. Упорядоченный набор пар $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ целых положительных чисел называется σ -согласованным или согласованным с подстановкой $\sigma \in S_k$ имеющей разложение (3.1), если:

1) для каждой орбиты $X_r = \{i_{r1}, \dots, i_{rl_r}\}$, где $r = 1, \dots, p$, и любого ее элемента i_{rs} , где $s = 1, \dots, l_r$, верны равенства

$$n_{i_{rs}} = m_{\sigma(i_{rs})}, n_{\sigma(i_{rs})} = m_{\sigma^2(i_{rs})}, \dots, n_{\sigma^{l_r-2}(i_{rs})} = m_{\sigma^{l_r-1}(i_{rs})}, n_{\sigma^{l_r-1}(i_{rs})} = m_{i_{rs}}; \quad (3.3)$$

$$2) m_{i_{p+1}} = n_{i_{p+1}}, \dots, m_{i_q} = n_{i_q}.$$

3.2 Определение. Вектор-матрица размера $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ называется σ -согласованной или согласованной с подстановкой $\sigma \in S_k$ имеющей разложение (3.1), если набор $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ согласован с подстановкой σ .

Таким образом, k -компонентная вектор-матрица $A = (A_1, \dots, A_k)$ размера $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ является согласованной с подстановкой $\sigma \in S_k$ имеющей разложение (3.1), если выполняется условие 1) определения 3.1 и, кроме того, согласно условию 2) того же определения 3.1, матрицы $A_{i_{p+1}}, \dots, A_{i_q}$ являются квадратными порядков $m_{i_{p+1}} = n_{i_{p+1}}, \dots, m_{i_q} = n_{i_q}$ соответственно.

3.3 Замечание. Если условие 1) определения 3.1 распространить на одноэлементные циклы, то для орбит $X_{p+1} = \{i_{p+1}\}, \dots, X_q = \{i_q\}$ равенства (3.3) примут вид

$$n_{\sigma^{l_{p+1}-1}(i_{p+1})} = n_{\sigma^{l_{p+1}-2}(i_{p+1})} = \dots = n_{\sigma^0(i_{p+1})} = n_{i_{p+1}} = m_{i_{p+1}}, \dots$$

$$\dots, n_{\sigma^{l_q-1}(i_q)} = n_{\sigma^{l_q-2}(i_q)} = \dots = n_{\sigma^0(i_q)} = n_{i_q} = m_{i_q}.$$

Таким образом, в определении 3.1 можно обойтись без условия 2), если в условии 1) считать $r = 1, \dots, q$.

3.4 Замечание. Покажем, что из выполнимости условия (3.3) для некоторого $i_{rs} \in X_r$ следует его выполнимость для любого $i_{rs} \in X_r$.

Если i и j различные элементы орбиты X_r то $j = \sigma^s(i)$ для некоторого $s = 1, \dots, l_r - 1$. Пусть для $i \in X_r$ выполняется условие (3.3), то есть верны равенства

$$n_i = m_{\sigma(i)}, n_{\sigma(i)} = m_{\sigma^2(i)}, \dots, n_{\sigma^{s-1}(i)} = m_{\sigma^s(i)},$$

$$n_{\sigma^j(i)} = m_{\sigma^{j+1}(i)}, n_{\sigma^{j+1}(i)} = m_{\sigma^{j+2}(i)}, \dots, n_{\sigma^{l-1}(i)} = m_i.$$

Используя равенство $j = \sigma^l(i)$, а также тождественность подстановки σ^l , перепишем последние две строки, поменяв их местами,

$$n_j = m_{\sigma(j)}, n_{\sigma(j)} = m_{\sigma^2(j)}, \dots, n_{\sigma^{l-s-1}(j)} = m_{\sigma^{l-s}(j)},$$

$$n_{\sigma^{l-s}(j)} = m_{\sigma^{l-s+1}(j)}, n_{\sigma^{l-s+1}(j)} = m_{\sigma^{l-s+2}(j)}, \dots, n_{\sigma^{l-1}(j)} = m_j.$$

Таким образом для $j \in X_r$ условие (3.3) также выполняется.

3.5 Замечание. Если σ – цикл длины k из S_k , то условие 2) в определении 3.1 излишнее, а условие 1) примет вид

$$n_1 = m_{\sigma(1)}, n_{\sigma(1)} = m_{\sigma^2(1)}, \dots, n_{\sigma^{k-1}(1)} = m_{\sigma^k(1)}, n_{\sigma^k(1)} = m_1. \quad (3.4)$$

Таким образом, если σ – цикл длины k из S_k , то σ -согласованную вектор-матрицу можно определить как k -компонентную вектор-матрицу $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ размера $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$, для которой выполняется условие (3.4).

3.6 Замечание. Если $\sigma = (12 \dots k) \in S_k$, то σ -согласованную вектор-матрицу можно определить как такую вектор-матрицу $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ размера $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$, для которой

$$n_1 = m_2, n_2 = m_3, \dots, n_{k-1} = m_k, n_k = m_1. \quad (3.5)$$

3.7 Пример. Если $\sigma = (14)(236)(5) \in S_6$, то σ -согласованной является всякая 6-компонентная вектор-матрица

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$$

размера

$$(m_1 \times n_1, m_2 \times n_2, n_2 \times n_3, n_1 \times m_1, n_5 \times m_5, n_3 \times m_2).$$

Если $\sigma = (13)(24) \in S_4$, то σ -согласованной является всякая 4-компонентная вектор-матрица $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ размера

$$(m_1 \times n_1, m_2 \times n_2, n_1 \times m_1, n_2 \times m_2).$$

Если $\sigma = (132) \in S_3$, то σ -согласованной является всякая 3-компонентная вектор-матрица $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ размера $(m \times n, k \times m, n \times k)$.

Если $\sigma = (12) \in S_2$, то σ -согласованной является всякая двухкомпонентная вектор-матрица $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ размера $(m \times n, n \times m)$.

Следующие предложения являются следствиями определения 3.1.

3.8 Предложение. Вектор-матрица $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ σ -согласована с тождественной подстановкой $\varepsilon \in S_k$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}$ – квадратная вектор-матрица, то есть тогда и только тогда, когда все компоненты $A_1, \dots, A_k$ – квадратные матрицы.

3.9 Предложение. Любая квадратная вектор-матрица $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ порядка n согласована со всеми подстановками из S_k .

3.10 Замечание. Один и тот же набор $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$, соответственно одна и та же k -компонентная вектор-матрица размера $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ могут быть согласованы с различными подстановками. Например, набор $((m, n), (n, m), (m, n), (n, m))$, соответственно 4-компонентная вектор-матрица $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ размера

$(m \times n, n \times m, m \times n, n \times m)$ согласованы и с подстановкой $(12)(34) \in S_4$, и с подстановкой $(1234) \in S_4$.

4 Основной результат. Вектор-матрицы, согласованные с одной и той же подстановкой, могут иметь разные размеры. Мы будем рассматривать σ -согласованные вектор-матрицы фиксированного размера.

Если набор $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ согласован с подстановкой $\sigma \in S_k$, то все вектор-матрицы из $M_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$ также согласованы с σ .

4.1 Теорема. Пусть P – ассоциативное кольцо, упорядоченный набор $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ – согласован с подстановкой $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда множество $M_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$ замкнуто относительно l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$, а универсальная алгебра $\langle M_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ является l -арной полугруппой. В частности, если d – порядок подстановки σ , то $\langle M_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [\]_{k+l, \sigma, k} \rangle$ – $(d+1)$ -арная полугруппа.

Доказательство. Пусть $A_i = (A_{ij}, \dots, A_{ik})$, $i = 1, \dots, l$ – произвольные вектор-матрицы из $M_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$, а подстановка σ имеет разложение (3.1).

Так как порядок d подстановки σ есть наименьшее общее кратное длин ее циклов из разложения (3.1), то длина l_r любого цикла X_r из разложения (3.1) делит d . Кроме того, тождественность подстановки σ^{l-1} влечет за собой делимость $l-1$ на d . Таким образом, l_r делит $l-1$, то есть $l = tl_r + 1$ для некоторого целого t . Будем использовать также то, что любой $j \in \{1, \dots, k\}$ принадлежит одной из орбит (3.2).

Пусть вначале j является элементом какой-либо орбиты X_r ($r = 1, \dots, p$) с числом элементов, большим единицы. Для $j = i_{rs}$ условие (3.3) принимает вид

$$\begin{aligned} n_j = m_{\sigma(j)}, n_{\sigma(j)} = m_{\sigma^2(j)}, n_{\sigma^2(j)} = m_{\sigma^3(j)}, \dots \\ \dots, n_{\sigma^{l_r-2}(j)} = m_{\sigma^{l_r-1}(j)}, n_{\sigma^{l_r-1}(j)} = m_j. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Выберем в каждой вектор-матрице $A_1, \dots, A_l$ по одной компоненте

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, A_{3\sigma^2(j)}, \dots, A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}, A_{l\sigma^{l-1}(j)}. \quad (4.2)$$

Первые l_r матриц из (4.2)

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, A_{3\sigma^2(j)}, \dots, A_{(l_r-1)\sigma^{l_r-2}(j)}, A_{l_r\sigma^{l_r-1}(j)} \quad (4.3)$$

имеют соответственно размеры

$$\begin{aligned} m_j \times n_j, m_{\sigma(j)} \times n_{\sigma(j)}, m_{\sigma^2(j)} \times n_{\sigma^2(j)}, \dots \\ \dots, m_{\sigma^{l_r-2}(j)} \times n_{\sigma^{l_r-2}(j)}, m_{\sigma^{l_r-1}(j)} \times n_{\sigma^{l_r-1}(j)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из (4.1) и (4.4) вытекает, что матрицы (4.3) можно перемножить в указанном порядке, в результате чего получится матрица $A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{l_r\sigma^{l_r-1}(j)}$ размера $m_j \times m_j$, то есть квадратная матрица порядка m_j .

Далее неоднократно будет использоваться тот факт, что подстановка σ действует на элементы из X_r также, как цикл σ_r порядка l_r , то есть $\sigma(j) = \sigma_r(j)$ для любого $j \in X_r$.

Так как матрица $A_{(l_r+1)j}$ имеет размер $m_j \times n_j$, то матрица

$$B_{1(j)} = A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{l_r \sigma^{l_r-1}(j)} A_{(l_r+1)\sigma^{l_r}(j)} = A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{l_r \sigma^{l_r-1}(j)} A_{(l_r+1)j}$$

также имеет размер $m_j \times n_j$.

Аналогично доказывается существование произведений

$$B_{2(j)} = B_{1(j)} A_{(l_r+2)\sigma(j)} \dots A_{(2l_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{(2l_r+1)\sigma^{l_r}(j)},$$

.....

$$B_{s(j)} = B_{(s-1)(j)} A_{((s-1)l_r+2)\sigma(j)} \dots A_{(sl_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{(sl_r+1)\sigma^{l_r}(j)},$$

.....

$$B_{t(j)} = B_{(t-1)(j)} A_{((t-1)l_r+2)\sigma(j)} \dots A_{(tl_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{(tl_r+1)\sigma^{l_r}(j)},$$

каждое из которых имеет размер $m_j \times n_j$.

Используя записанные выше равенства для $B_{1(j)}, \dots, B_{(t-1)(j)}$, а также тождественность подстановки σ^{l_r} на элементах орбиты X_j , получим

$$\begin{aligned} B_{t(j)} &= B_{(t-2)(j)} A_{((t-2)l_r+2)\sigma(j)} \dots A_{((t-1)l_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{((t-1)l_r+1)\sigma^{l_r}(j)} \\ &\quad A_{((t-1)l_r+2)\sigma(j)} \dots A_{(tl_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{(tl_r+1)\sigma^{l_r}(j)} = \dots \\ &\dots = B_{1(j)} A_{(l_r+2)\sigma(j)} \dots A_{(2l_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{(2l_r+1)\sigma^{l_r}(j)} \dots A_{((t-2)l_r+2)\sigma(j)} \dots \\ &\dots A_{((t-1)l_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{((t-1)l_r+1)\sigma^{l_r}(j)} A_{((t-1)l_r+2)\sigma(j)} \dots A_{(tl_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{(tl_r+1)\sigma^{l_r}(j)} = \\ &= A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{l_r \sigma^{l_r-1}(j)} A_{(l_r+1)\sigma^{l_r}(j)} A_{(l_r+2)\sigma(j)} \dots A_{(2l_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{(2l_r+1)\sigma^{l_r}(j)} \dots \\ &\quad \dots A_{((t-2)l_r+2)\sigma(j)} \dots A_{((t-1)l_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{((t-1)l_r+1)\sigma^{l_r}(j)} \\ &\quad A_{((t-1)l_r+2)\sigma(j)} \dots A_{(tl_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{(tl_r+1)\sigma^{l_r}(j)} = \\ &= A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{l_r \sigma^{l_r-1}(j)} A_{(l_r+1)\sigma^{l_r}(j)} A_{(l_r+2)\sigma^{l_r+1}(j)} \dots A_{(2l_r)\sigma^{2l_r-1}(j)} A_{(2l_r+1)\sigma^{2l_r}(j)} \dots \\ &\quad \dots A_{((t-2)l_r+2)\sigma^{(t-2)l_r+1}(j)} \dots A_{((t-1)l_r)\sigma^{(t-1)l_r-1}(j)} A_{((t-1)l_r+1)\sigma^{(t-1)l_r}(j)} \\ &\quad A_{((t-1)l_r+2)\sigma^{(t-1)l_r+1}(j)} \dots A_{(tl_r)\sigma^{tl_r-1}(j)} A_{(tl_r+1)\sigma^{tl_r}(j)} = \\ &= A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{(tl_r)\sigma^{tl_r-1}(j)} A_{(tl_r+1)\sigma^{tl_r}(j)} = A_{1(j)} A_{2\sigma(j)} \dots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} A_{l\sigma^{l-1}(j)}, \end{aligned}$$

то есть для любого $j = 1, \dots, p$ определено произведение

$$A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} A_{l\sigma^{l-1}(j)} \quad (4.5)$$

матриц (4.2), взятых в указанных порядке, являющееся матрицей размера $m_j \times n_j$.

Если j является единственным элементом какой-либо орбиты X_r ($r = p+1, \dots, q$), то, согласно определению 3.1, j -е компоненты $A_{1j}, \dots, A_{lj}$ во всех вектор-матрицах $A_1, \dots, A_l$ являются квадратными матрицами, которые к тому же, согласно условию теоремы, имеют один и тот же порядок $m_j \times m_j = n_j \times n_j$. Поэтому определена матрица

$$A_{1j} A_{2j} \dots A_{(l-1)j} A_{lj} \quad j = p + 1, \dots, q, \quad (4.6)$$

а так как подстановка σ оставляет символ j на месте, то из (4.6) вытекает существование матрицы (4.5) не только для $j = 1, \dots, p$, но и для $j = p + 1, \dots, q$, то есть для любого $j = 1, \dots, k$.

Таким образом, определена вектор-матрица $[A_1 A_2 \dots A_l]_{l, \sigma, k}$ размера $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$, то есть

$$[A_1 A_2 \dots A_l]_{l, \sigma, k} \in M_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P).$$

Следовательно, множество $M_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$ замкнуто относительно l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$. Ассоциативность этой операции следует из теоремы 2.4. Теорема доказана.

5 Следствие. Далее во всех следствиях P – ассоциативное кольцо.

Полагая в теореме 4.1 σ – цикл длины k из S_k и, учитывая замечание 3.5, получим

5.1 Следствие. Пусть σ – цикл длины k из S_k , числа $m_1, n_1, \dots, m_k, n_k$ удовлетворяют равенствам (3.4). Тогда множество $M_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$ замкнуто относительно $(k + 1)$ -арной операции $[]_{k+1, \sigma, k}$ а универсальная алгебра $\langle M_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), []_{k+1, \sigma, k} \rangle$ является $(k + 1)$ -арной полугруппой.

Полагая в следствии 5.1 $\sigma = (12 \dots k)$, и, учитывая замечание 3.6, получим

5.2 Следствие. Пусть числа $m_1, n_1, \dots, m_k, n_k$ удовлетворяют (3.5). Тогда множество $M_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$ замкнуто относительно $(k + 1)$ -арной операции $[]_{k+1, (12 \dots k), k}$ а универсальная алгебра $\langle M_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), []_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ является $(k + 1)$ -арной группой.

Полагая в следствии 5.2 $k = 3$, получим

5.3 Следствие. Множество $M_{m \times s, s \times r, r \times m}(P)$ замкнуто относительно 4-арной операции $[]_{4, (123), 3}$ а универсальная алгебра

$$\langle M_{m \times s, s \times r, r \times m}(P), []_{4, (123), 3} \rangle$$

является 4-арной полугруппой.

Полагая в следствии 5.2 $k = 2$, получим

5.4 Следствие. Множество $M_{m \times n, n \times m}(P)$ замкнуто относительно тернарной операции $[]_{3, (12), 2}$ а универсальная алгебра $\langle M_{m \times n, n \times m}(P), []_{3, (12), 2} \rangle$ является тернарной полугруппой.

Для цикла $\sigma \in S_k$ длины $k = 2r$, где $r \geq 1$ обозначим через $M_{m, n}(2r, \sigma, P)$ множество всех вектор-матриц $A = (A_1, \dots, A_{2r})$, у которых компоненты $A_1, A_{\sigma^2(1)}, \dots, A_{\sigma^{2r-2}(1)}$ имеют размер $m \times n$, а компоненты $A_{\sigma(1)}, A_{\sigma^3(1)}, \dots, A_{\sigma^{2r-1}(1)}$ имеют размер $n \times m$.

Ясно, что множество $M_{m, n}(2r, \sigma, P)$ совпадает со множеством $M_{m_1 \times n_1, \dots, m_{2r} \times n_{2r}}(P)$ всех $2r$ -компонентных вектор-матриц размера $(m_1 \times n_1, \dots, m_{2r} \times n_{2r})$, где

$$m_1 = m_{\sigma^2(1)} = \dots = m_{\sigma^{2r-2}(1)} = m, \quad n_1 = n_{\sigma^2(1)} = \dots = n_{\sigma^{2r-2}(1)} = n,$$

$$m_{\sigma(1)} = m_{\sigma^3(1)} = \dots = m_{\sigma^{2r-1}(1)} = n, \quad n_{\sigma(1)} = n_{\sigma^3(1)} = \dots = n_{\sigma^{2r-1}(1)} = m.$$

Поэтому из следствия 5.1 вытекает

5.5 Следствие. Множество $M_{m,n}(2r, \sigma, P)$ замкнуто относительно $(2r+1)$ -арной операции $[]_{2r+1, \sigma, 2r}$ а универсальная алгебра $\langle M_{m,n}(2r, \sigma, P), []_{2r+1, \sigma, 2r} \rangle$ является $(2r+1)$ -арной полугруппой.

Полагая в следствии 5.5 $\sigma = (12 \dots 2r)$, получим

5.6 Следствие. Множество $M_{m,n}(2r, (12 \dots 2r), P)$ замкнуто относительно $(2r+1)$ -арной операции $[]_{2r+1, (12 \dots 2r), 2r}$ а универсальная алгебра $\langle M_{m,n}(2r, (12 \dots 2r), P), []_{2r+1, (12 \dots 2r), 2r} \rangle$ является $(2r+1)$ -арной полугруппой.

Полагая в следствии 5.6 $r = 2$, получим

5.7 Следствие. Множество $M_{m,n}(4, (1234), P)$ замкнуто относительно 5-арной операции $[]_{5, (1234), 4}$ а универсальная алгебра $\langle M_{m,n}(4, (1234), P), []_{5, (1234), 4} \rangle$ является 5-арной полугруппой.

6 l-Арные полугруппы в $\langle M(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$. Во введении отмечалось, что все полугруппы в частичной полугруппе $M(P)$ всех матриц над ассоциативным кольцом P исчерпываются подполугруппами полугруппы вида $M_n(P)$. Что в связи с этим можно сказать об l -арных полугруппах в частичной l -арной полугруппе $\langle M(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ всех k -компонентных вектор-матриц над ассоциативным кольцом P ? Ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.

6.1 Теорема. Пусть P – ассоциативное кольцо, σ – подстановка из S_p , удовлетворяющая условию $\sigma' = \sigma$, M – подмножество множества $M(k, P)$, замкнутое относительно l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$. Тогда универсальная алгебра $\langle M, []_{l, \sigma, k} \rangle$ является l -арной подполугруппой l -арной полугруппы $\langle M_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ для некоторого набора $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$, согласованного с подстановкой σ .

Доказательство. По теореме 4.1 для любого набора $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$, согласованного с подстановкой $\sigma \in S_p$, множество $M_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$ замкнуто относительно l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$ а универсальная алгебра $\langle M_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ является l -арной подполугруппой в частичной l -арной полугруппе $\langle M(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$.

Пусть для подстановки σ имеет место разложение (3.1) с σ -орбитами (3.2).

Так как множество M замкнуто относительно l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$ то $\underbrace{[A \dots A]}_{l, \sigma, k} \in M$ для любой вектор-матрицы $A = (A_1, \dots, A_k) \in M$,

то есть определено l -арное произведение

$$\underbrace{[A \dots A]}_{l, \sigma, k} = \{Y_1, \dots, Y_k\},$$

где

$$Y_j = A_j A_{\sigma(j)} \dots A_{\sigma^{l-2}(j)} A_{\sigma^{l-1}(j)}, j = 1, \dots, k. \quad (6.1)$$

В частности, это верно для любого элемента j из любой σ -орбиты X_r ($r = 1, \dots, p$) с числом элементов l_r большим единицы. Так как $l_r < l = tl_r + 1$, то, выписав первые $l_r + 1$ компонент из правой части (6.1), видим, что существует произведение

$$A_j A_{\sigma(j)} A_{\sigma^2(j)} \dots A_{\sigma^{l'-2}(j)} A_{\sigma^{l'-1}(j)} A_{\sigma^{l'}(j)}.$$

Это означает, что если вектор-матрица $\mathbf{A}$ имеет размер $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$, то

$$n_j = m_{\sigma(j)}, n_{\sigma(j)} = m_{\sigma^2(j)}, \dots, n_{\sigma^{l'-2}(j)} = m_{\sigma^{l'-1}(j)}, n_{\sigma^{l'-1}(j)} = m_{\sigma^{l'}(j)},$$

а так как $\sigma^{l'}$ – тождественная подстановка, то последние равенства принимают вид

$$n_j = m_{\sigma(j)}, n_{\sigma(j)} = m_{\sigma^2(j)}, \dots, n_{\sigma^{l'-2}(j)} = m_{\sigma^{l'-1}(j)}, n_{\sigma^{l'-1}(j)} = m_j.$$

Таким образом, выполняется условие 1) определения 3.1.

Если j – элемент из любой σ -орбиты $X_r (r = p + 1, \dots, q)$ с числом элементов, равным единице, то (6.1) принимает вид $Y_j = \underbrace{A_j \dots A_j}_1$. В част-

ности, определено произведение $A_j A_j$, откуда следует совпадение размеров матрицы A_j . Таким образом, условие 2) определения 3.1 также выполняется. Следовательно, набор $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ согласован с подстановкой σ .

Пусть теперь $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_k)$ – еще одна вектор-матрица из $\mathbf{M}$ размера $(\mu_1 \times v_1, \dots, \mu_k \times v_k)$. Так как множество $\mathbf{M}$ замкнуто относительно l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$ то

$$[\underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{l_r} \underbrace{\mathbf{B} \mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{l-l_r-1}]_{l, \sigma, k} = \{Z_1, \dots, Z_k\} \in \mathbf{M},$$

где

$$Z_j = A_j A_{\sigma(j)} \dots A_{\sigma^{l'-1}(j)} B_{\sigma^{l'}(j)} A_{\sigma^{l'+1}(j)} A_{\sigma^{l'+2}(j)} \dots A_{\sigma^{l-1}(j)}.$$

Тождественность подстановки $\sigma^{l'}$ позволяет переписать последнее равенство следующим образом

$$Z_j = A_j A_{\sigma(j)} \dots A_{\sigma^{l'-1}(j)} B_j A_{\sigma(j)} A_{\sigma^{l'+2}(j)} \dots A_{\sigma^{l-1}(j)}.$$

Поэтому $n_{\sigma^{l-1}(j)} = \mu_j$, $v_j = m_{\sigma(j)}$, откуда и из (6.2) вытекает $m_j = \mu_j$, $n_j = v_j$. Следовательно, вектор-матрица $\mathbf{B}$ имеет те же размеры, что и вектор-матрица $\mathbf{A}$, то есть все вектор-матрицы из $\mathbf{M}$ имеют один и тот же размер $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$.

Таким образом, доказано включение $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$, где набор $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$, как показано выше, согласован с подстановкой σ . Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10РА-002).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А.М. Вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2011. – №1(37), Серия В. – С. 30–37.
2. Гальмак, А.М. Транспонированные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1(6). – С. 52–56.

3. *Post, E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48. – № 2. – P. 208–350.
4. **Гальмак, А.М.** Вектор-определители и определители вектор-матриц / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 2(7). – С. 1–5.
5. **Гальмак, А.М.** Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
6. **Гальмак, А.М.** Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

Поступила в редакцию 16.05.2011 г.