

ИДЕМПОТЕНТЫ В $(k + 1)$ -АРНОЙ ГРУППЕ

$$\langle Z_k^k, []_{k+1, k} \rangle$$

В p -арных группах при $p \geq 3$ в отличие от групп может не быть идемпотентов, может быть несколько идемпотентов, возможен случай, когда все элементы являются идемпотентами. Поэтому в теории p -арных групп актуальна задача изучения множества всех идемпотентов p -арной группы, если оно не пусто. Изучением этого множества в полиадической группе $\langle A^k []_{k+1, k} \rangle$ арности $k+1$, где A – произвольная группа, занимался А.М. Гальмак, который установил, что в $\langle A^k []_{k+1, k} \rangle$, в случае конечности множества A , имеется ровно $|A|^{k-1}$ идемпотентов и соответственно ровно $|A|^{k-1}(|A| - 1)$ элементов, не являющихся идемпотентами. В некоторых случаях множество всех идемпотентов p -арной группы можно указать в явном виде. Именно это сделано в данной работе для $(k+1)$ -арной группы $\langle Z_k^k, []_{k+1, k} \rangle$.

Если A – группоид, $k \geq 2$, $l \geq 2$, то на k -й декартовой степени A^k можно определить $[1, 2]$ вначале бинарную операцию

$$x \circ y = (x_1, x_2, \dots, x_k) \circ (y_1, y_2, \dots, y_k) = (x_1 y_2, x_2 y_3, \dots, x_{k-1} y_k, x_k y_1),$$

а затем l -арную операцию

$$[x_1 x_2 \dots x_l]_{l, k} = x_1 \circ (x_2 \circ (\dots (x_{l-2} \circ (x_{l-1} \circ x_l)) \dots)).$$

Если A – полугруппа, $l = k + 1$, то, ввиду леммы 2.3.1 [2],

$$[x_1 x_2 \dots x_{k+1}]_{k+1, k} = (y_1, y_2, \dots, y_k),$$

где

$$y_j = x_1 x_{2(j+1)} \dots x_{(k-j+1)k} x_{(k-j+2)1} \dots x_{k(j-1)} x_{(k+1)j}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Для полугруппы A универсальная алгебра $\langle A^k, []_{k+1, k} \rangle$ согласно теореме 2.3.4 [2] является $(k + 1)$ -арной полугруппой. Если же A – группа, то согласно теореме 2.9.3 [2], $\langle A^k, []_{k+1, k} \rangle$ – $(k + 1)$ -арная группа.

l -Арная операция $[]_{k+1, k}$ аналогична l -арной операции, которую Пост определил [3] на множестве всех l -арных подстановок.

Пусть Z_k – циклическая группа порядка $k \geq 2$. Рассмотрим на k -й декартовой степени $\underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k$ полиадическую операцию $[]_{k+1, k}$. Как уже отмечалось, по теореме 2.9.3 [2] универсальная алгебра $\langle \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, []_{k+1, k} \rangle$

является $(k+1)$ -арной группой. Ввиду предложения 2.10.7 [2], у этой $(k+1)$ -арной группы нет единиц, а по предложению 2.8.1 [2] она является неабелевой, а значит, и нециклической. Более того, по предложению 3.11.3 [2] она не является даже полуциклической. По предложению 3.11.1 [2]

соответствующая группа Поста $(k+1)$ -арной группы $\langle \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, []_{k+1, k} \rangle$

изоморфна прямому произведению k экземпляров циклической группы Z_k , которое является абелевой группой. А согласно критерию Поста [3], полиадическая группа является полуабелевой тогда и только тогда, когда абелева ее соответствующая группа. Поэтому $(k+1)$ -арная группа

$\langle \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, []_{k+1, k} \rangle$, не являясь полуциклической, является полуабелевой.

Определения понятий абелевости, полуабелевости, цикличности и полуцикличности для полиадических групп можно найти в [4].

Нахождение идемпотентов в $\langle \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, []_{k+1, k} \rangle$ начнем с примеров.

Пример 1. Если $k=2$, $Z_2 = \{e, a\}$, то

$$Z_2 \times Z_2 = \{(e, e), (e, a), (a, a), (a, a)\}.$$

Так как

$$[(e, e)(e, e)(e, e)]_{3,2} = (eee, eee) = (e, e),$$

$$[(e, a)(e, a)(e, a)]_{3,2} = (eae, aea) = (a, e) \neq (e, a),$$

$$[(a, e)(a, e)(a, e)]_{3,2} = (aea, eae) = (e, a) \neq (a, e),$$

$$[(a, a)(a, a)(a, a)]_{3,2} = (aaa, aaa) = (a, a),$$

то идемпотентами в $\langle Z_2 \times Z_2, []_{3,2} \rangle$ являются только элементы (e, e) и (a, a) , то есть множество всех идемпотентов тернарной группы $\langle Z_2 \times Z_2, []_{3,2} \rangle$ имеет вид

$$I(\langle Z_2 \times Z_2, []_{3,2} \rangle) = \{(e, e), (a, a)\}.$$

Пример 2. Если $k=3$, $Z_3 = \{e, a, a^2\}$, то

$$\begin{aligned} Z_3 \times Z_3 \times Z_3 = \{ & (e, e, e), (e, e, a), (e, e, a^2), (e, a, e), (e, a, a), (e, a, a^2), \\ & (e, a^2, e), (e, a^2, a), (e, a^2, a^2), (a, e, e), (a, e, a), (a, e, a^2), \\ & (a, a, e), (a, a, a), (a, a, a^2), (a, a^2, e), (a, a^2, a), (a, a^2, a^2), \\ & (a^2, e, e), (a^2, e, a), (a^2, e, a^2), (a^2, a, e), (a^2, a, a), (a^2, a, a^2), \\ & (a^2, a^2, e), (a^2, a^2, a), (a^2, a^2, a^2) \}. \end{aligned}$$

Найдем множество всех идемпотентов в $\langle Z_3 \times Z_3 \times Z_3, []_{4,3} \rangle$.

$$[(e, e, e)(e, e, e)(e, e, e)(e, e, e)]_{4,3} = (eeee, eeee, eeee) = (e, e, e),$$

$$[(e, e, a)(e, e, a)(e, e, a)(e, e, a)]_{4,3} = (eeae, eaee, aeaa) = (a, a, a^2),$$

$$[(e, e, a^2)(e, e, a^2)(e, e, a^2)(e, e, a^2)]_{4,3} = (eea^2e, ea^2ee, a^2eea^2) = (a^2, a^2, a),$$

$$[(e, a, e)(e, a, e)(e, a, e)(e, a, e)]_{4,3} = (eaeae, aeaea, eaeae) = (a, a^2, a),$$

$$[(e, a, a)(e, a, a)(e, a, a)(e, a, a)]_{4,3} = (eaaae, aaaea, aeaaa) = (a^2, a, a^2),$$

$$[(e, a, a^2)(e, a, a^2)(e, a, a^2)(e, a, a^2)]_{4,3} = (eaa^2e, aa^2ea, a^2eaa^2) = (e, a, a^2),$$

$$\begin{aligned}
[(e, a^2, e)(e, a^2, e)(e, a^2, e)(e, a^2, e)]_{4,3} &= (ea^2ee, a^2eea^2, eea^2e) = (a^2, a, a^2), \\
[(e, a^2, a)(e, a^2, a)(e, a^2, a)(e, a^2, a)]_{4,3} &= (ea^2ae, a^2aea^2, aea^2a) = (e, a^2, a), \\
[(e, a^2, a^2)(e, a^2, a^2)(e, a^2, a^2)(e, a^2, a^2)]_{4,3} &= (ea^2a^2e, a^2a^2ea^2, a^2ea^2a^2) = (a, e, e), \\
[(a, e, e)(a, e, e)(a, e, e)(a, e, e)]_{4,3} &= (aeaa, eaeae, eaeae) = (a^2, a, a), \\
[(a, e, a)(a, e, a)(a, e, a)(a, e, a)]_{4,3} &= (aeaa, eaaae, aaeaa) = (e, a^2, e), \\
[(a, e, a^2)(a, e, a^2)(a, e, a^2)(a, e, a^2)]_{4,3} &= (aea^2a, ea^2ae, a^2aea^2) = (a, e, a^2), \\
[(a, a, e)(a, a, e)(a, a, e)(a, a, e)]_{4,3} &= (aaaa, aeaaa, eaaaa) = (e, e, a^2), \\
[(a, a, a)(a, a, a)(a, a, a)(a, a, a)]_{4,3} &= (aaaa, aaaaa, aaaaa) = (a, a, a), \\
[(((a, a, a^2))(a, a, a^2)(a, a, a^2)(a, a, a^2))]_{4,3} &= (aaa^2a, aa^2aa, a^2aaa^2) = (a^2, a^2, e), \\
[(a, a^2, e)(a, a^2, e)(a, a^2, e)(a, a^2, e)]_{4,3} &= (aa^2ea, a^2eaa^2, eaa^2e) = (a, a^2, e), \\
[(a, a^2, a)(a, a^2, a)(a, a^2, a)(a, a^2, a)]_{4,3} &= (aa^2aa, a^2aaa^2, aaaa^2a) = (a^2, e, a^2), \\
[(a, a^2, a^2)(a, a^2, a^2)(a, a^2, a^2)(a, a^2, a^2)]_{4,3} &= (aa^2a^2a, a^2a^2aa^2, a^2aa^2a^2) = (e, a, a), \\
[(a^2, e, e)(a^2, e, e)(a^2, e, e)(a^2, e, e)]_{4,3} &= (a^2eea^2, eea^2e, ea^2ee) = (a, a^2, a^2), \\
[(a^2, e, a)(a^2, e, a)(a^2, e, a)(a^2, e, a)]_{4,3} &= (a^2eaa^2, eaa^2e, aa^2ea) = (a^2, e, a), \\
[(a^2, e, a^2)(a^2, e, a^2)(a^2, e, a^2)(a^2, e, a^2)]_{4,3} &= (a^2ea^2a^2, ea^2a^2e, a^2a^2ea^2) = (e, a, e), \\
[(a^2, a, e)(a^2, a, e)(a^2, a, e)(a^2, a, e)]_{4,3} &= (a^2aea^2, aea^2a, ea^2ae) = (a^2, a, e), \\
[(a^2, a, a)(a^2, a, a)(a^2, a, a)(a^2, a, a)]_{4,3} &= (a^2aaa^2, aaaa^2a, aa^2aa) = (e, a, a^2), \\
[(a^2, a, a^2)(a^2, a, a^2)(a^2, a, a^2)(a^2, a, a^2)]_{4,3} &= (a^2aa^2a^2, aa^2a^2a, a^2a^2aa^2) = (a, e, a), \\
[(a^2, a^2, e)(a^2, a^2, e)(a^2, a^2, e)(a^2, a^2, e)]_{4,3} &= (a^2a^2ea^2, a^2ea^2a^2, ea^2a^2e) = (e, e, a), \\
[(a^2, a^2, a)(a^2, a^2, a)(a^2, a^2, a)(a^2, a^2, a)]_{4,3} &= (a^2a^2aa^2, a^2aa^2a^2, aa^2a^2a) = (a, a, e), \\
[(a^2, a^2, a^2)(a^2, a^2, a^2)(a^2, a^2, a^2)(a^2, a^2, a^2)]_{4,3} &= \\
&= (a^2a^2a^2a^2, a^2a^2a^2a^2, a^2a^2a^2a^2) = (a^2, a^2, a^2).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$I(< Z_3 \times Z_3 \times Z_3, []_{4,3} >) = \{(e, e, e), (a, a, a), (a^2, a^2, a^2), (e, a, a^2), (e, a^2, a), (a, e, a^2), (a, a^2, e), (a^2, e, a), (a^2, a, e)\},$$

то есть из 27 элементов 4-арной группы $< Z_3 \times Z_3 \times Z_3, []_{4,3} >$ только 9 элементов являются идемпотентами.

Если A – произвольная группа, то по теореме 2.9.3 из [2] универсальная алгебра $< A^k, []_{k+1, k} >$ является $(k+1)$ -арной группой, множество идемпотентов которой согласно теореме 2.12.1 из [2] имеет вид

$$I(< A^k, []_{k+1, k} >) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \mid \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k \in A, \varepsilon_1 = (\varepsilon_2 \dots \varepsilon_k)^{-1}\}$$

или

$$I(< A^k, []_{k+1, k} >) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \mid \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1} \in A, \varepsilon_k = (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{k-1})^{-1}\}.$$

Для абелевой, в частности, для циклической группы, имеем

$$I(< A^k, []_{k+1, k} >) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \mid \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k \in A, \varepsilon_1 = \varepsilon_2^{-1} \dots \varepsilon_k^{-1}\}$$

или

$$I(< A^k, []_{k+1, k} >) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \mid \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1} \in A, \varepsilon_k = \varepsilon_1^{-1} \dots \varepsilon_{k-1}^{-1}\}.$$

Отсюда вытекает, что число идемпотентов в $< \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, []_{k+1, k} >$ рав-

но числу элементов в $(k-1)$ -й декартовой степени $\underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_{k-1}$, то есть равно k^{k-1} :

$$|I(< \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, []_{k+1, k} >)| = k^{k-1}.$$

В частности, если $k = 2$ или $k = 3$, как в примерах 1 и 2, то

$$|I(< Z_2 \times Z_2, []_{3, 2} >)| = 2^{2-1} = 2, |I(< Z_3 \times Z_3 \times Z_3, []_{4, 3} >)| = 3^{3-1} = 9.$$

Лемма 1. Элементы

$$(\underbrace{e, \dots, e}_k), (\underbrace{a, \dots, a}_k), \dots, (\underbrace{a^{k-1}, \dots, a^{k-1}}_k)$$

являются идемпотентами в $< \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, []_{k+1, k} >.$

Доказательство. Так как

$$[\underbrace{(x, \dots, x)_k (x, \dots, x)_k \dots (x, \dots, x)_k}_{k+1}]_{k+1, k} = (\underbrace{x^{k+1}, \dots, x^{k+1}}_k) = (\underbrace{x, \dots, x}_k)$$

для любого $x \in Z_k$, то $(\underbrace{x, \dots, x}_k)$ – идемпотент в Z_k . Лемма доказана.

Лемма 2. Если k – нечетное, то элемент $c = (c_1, \dots, c_k)$, в котором все компоненты являются различными элементами из Z_k , является идемпотентом в $< \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, []_{k+1, k} >.$

Доказательство. Пусть $k = 2m + 1$, $m \geq 1$. Если положить

$$[\underbrace{c \dots c}_{k+1}]_{k+1, k} = (y_1, \dots, y_k),$$

то для любого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ имеем

$$y_j = c_j \dots c_k c_1 \dots c_{j-1} c_j = c_1 \dots c_{j-1} c_j \dots c_k c_j = c_1 \dots c_k c_j,$$

то есть

$$y_j = c_1 \dots c_k c_j.$$

Так как $c_1, \dots, c_k$ – различные элементы из множества $\{e, a, a^2, \dots, a^{k-1}\}$, то, учитывая перестановочность элементов в Z_k из последнего равенства получаем

$$y_j = e a a^2 \dots a^{k-1} c_j = a^{1+2+\dots+k-1} c_j = a^{\frac{k(k-1)}{2}} c_j = a^{km} c_j = c_j.$$

То есть $y_j = c_j$. Это означает, что

$$[\underbrace{c \dots c}_{k+1}]_{k+1, k} = c,$$

то есть c – идемпотент в $< \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, []_{k+1, k} >.$ Лемма доказана.

Таким образом, при нечетном k среди k^{k-1} идемпотентов $(k+1)$ -арной группы $< \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, []_{k+1, k} >$, согласно лемме 1, имеется k идемпотентов вида

$$(\underbrace{a^s, \dots, a^s}_k), s = 0, 1, \dots, k-1,$$

а по лемме 2 в $\langle \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [\]_{k+1, k} \rangle$ имеется еще $k!$ идемпотентов, у каждого из которых все компоненты являются различными элементами из Z_k .

В 4-арной группе из примера 2 идемпотенты этих двух видов составляют все множество идемпотентов, так как $3 + 3! = 3 + 6 = 9$. Это же вытекает из самого вида множества $I(\langle Z_3 \times Z_3 \times Z_3, [\]_{4, 3} \rangle)$. Уже при $k = 4$ ситуация иная, так как в этом случае число идемпотентов указанных видов, равное $4 + 4! = 28$, отлично от числа всех идемпотентов, равного $4^3 = 64$.

Представляет интерес вопрос: сохраняется ли утверждение леммы 2, если k – четное число? Пример 1 показывает, что при $k = 2$ ответ на поставленный вопрос отрицательный.

Приведем еще один подтверждающий пример.

Пример 3. Пусть $k = 4$, $Z_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$. Так как

$$[(e, a, a^2, a^3)(e, a, a^2, a^3)(e, a, a^2, a^3)(e, a, a^2, a^3)]_{5, 4} = \\ = (eaa^2a^3e, aa^2a^3ea, a^2a^3eaa^2, a^3eaa^2a^3) = (a^6, a^7, a^8, a^9) = (a^2, a^3, e, a),$$

То элемент (e, a, a^2, a^3) не является идемпотентом в $\langle \underbrace{Z_4 \times \dots \times Z_4}_4, [\]_{5, 4} \rangle$.

Имеет место более общее утверждение.

Лемма 3. Если k – четное, $k > 1$, то элемент $c = (c_1, \dots, c_k)$, в котором все компоненты являются различными элементами из Z_k не является идемпотентом в $\langle \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [\]_{k+1, k} \rangle$.

Доказательство. При доказательстве леммы 2 установлено, что если

$$[\underbrace{c \dots c}_{k+1}]_{k+1, k} = (y_1, \dots, y_k),$$

то

$$y_j = a^{\frac{k(k-1)}{2}} c_j.$$

Если предположить $a^{\frac{k(k-1)}{2}} = e$, то из условия k делит $\frac{k(k-1)}{2}$ следу-

ет, что 2 делит $k - 1$, что невозможно. Таким образом, $a^{\frac{k(k-1)}{2}} \neq e$, откуда

$$y_j = a^{\frac{k(k-1)}{2}} c_j \neq c_j.$$

Это означает, что элемент c не является идемпотентом в $\langle \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [\]_{k+1, k} \rangle$. Лемма доказана.

Лемма 4. Элемент $c \in \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k$, у которого $k-1$ компонент совпадают и отличны от оставшейся компоненты, не является идемпотентом в $\langle \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [\]_{k+1, k} \rangle$.

Доказательство. Пусть у элемента

$$c = (\underbrace{u, \dots, u}_{i-1}, v, \underbrace{u, \dots, u}_{k-i}), u \neq v, i = 1, \dots, k$$

$k-1$ компонент совпадают и отличны от i -ой компоненты. Предположим, что c – идемпотент, то есть

$$[(\underbrace{u, \dots, u}_{i-1}, v, \underbrace{u, \dots, u}_{k-i}), \dots, (\underbrace{u, \dots, u}_{i-1}, v, \underbrace{u, \dots, u}_{k-i})]_{k+1, k} = (\underbrace{u, \dots, u}_{i-1}, v, \underbrace{u, \dots, u}_{k-i}).$$

Сравнивая i -е компоненты левой и правой части последнего равенства, получим

$$v \underbrace{u \dots u}_{k-1} v = v,$$

откуда

$$vu^{k-1} = e, v = u,$$

что противоречит предположению $u \neq v$. Лемма доказана.

Доказанные леммы позволяют упростить задачу нахождения идемпотентов в $(k+1)$ -арной группе $\langle \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [\]_{k+1, k} \rangle$. Продемонстрируем это для случая $k = 4$.

Предложение. В 5-арной группе $\langle \underbrace{Z_4 \times \dots \times Z_4}_4, [\]_{5, 4} \rangle$ имеется ровно

64 идемпотента, множество которых имеет вид

$$\begin{aligned} I(\langle Z_4 \times Z_4 \times Z_4 \times Z_4, [\]_{5, 4} \rangle) &= \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \mid \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in Z_4, \varepsilon_1 = (\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4)^{-1}\} = \\ &= \{a_1 = (e, e, e, e), a_2 = (a, a, a, a), a_3 = (a^2, a^2, a^2, a^2), a_4 = (a^3, a^3, a^3, a^3), \\ &a_5 = (a^3, e, e, a), a_6 = (a^2, a, a, e), a_7 = (e, a^2, a^2, e), a_8 = (a^2, a^3, a^3, e), \\ &a_9 = (a^3, e, a, e), a_{10} = (a^2, a, e, a), a_{11} = (e, a^2, e, a^2), a_{12} = (a^2, a^3, e, a^3), \\ &a_{13} = (a^3, a, e, e), a_{14} = (a^2, e, a, a), a_{15} = (e, e, a^2, a^2), a_{16} = (a^2, e, a^3, a^3), \\ &a_{17} = (a^2, e, e, a^2), a_{18} = (e, a, a, a^2), a_{19} = (a^3, a^2, a^2, a), a_{20} = (a, a^3, a^3, a), \\ &a_{21} = (a^2, e, a^2, e), a_{22} = (e, a, a^2, a), a_{23} = (a^3, a^2, a, a^2), a_{24} = (a, a^3, a, a^3), \\ &a_{25} = (a^2, a^2, e, e), a_{26} = (e, a^2, a, a), a_{27} = (a^3, a, a^2, a^2), a_{28} = (a, a, a^3, a^3), \\ &a_{29} = (a, e, e, a^3), a_{30} = (a^3, a, a, a^3), a_{31} = (a, a^2, a^2, a^3), a_{32} = (e, a^3, a^3, a^2), \\ &a_{33} = (a, e, a^3, e), a_{34} = (a^3, a, a^3, a), a_{35} = (a, a^2, a^3, a^2), a_{36} = (e, a^3, a^2, a^3), \\ &a_{37} = (a, a^3, e, e), a_{38} = (a^3, a^3, a, a), a_{39} = (a, a^3, a^2, a^2), a_{40} = (e, a^2, a^3, a^3), \\ &a_{41} = (a, e, a, a^2), a_{42} = (a, e, a^2, a), a_{43} = (e, e, a, a^3), a_{44} = (e, e, a^3, a), \\ &a_{45} = (a, a, e, a^2), a_{46} = (a, a^2, e, a), a_{47} = (e, a, e, a^3), a_{48} = (e, a^3, e, a), \\ &a_{49} = (a, a, a^2, e), a_{50} = (a, a^2, a, e), a_{51} = (e, a, a^3, e), a_{52} = (e, a^3, a, e), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{53} &= (a^3, e, a^2, a^3), a_{54} = (a^3, e, a^3, a^2), a_{55} = (a^2, a, a^2, a^3), a_{56} = (a^2, a, a^3, a^2), \\ a_{57} &= (a^3, a^2, e, a^3), a_{58} = (a^3, a^3, e, a^2), a_{59} = (a^2, a^2, a, a^3), a_{60} = (a^2, a^3, a, a^2), \\ a_{61} &= (a^3, a^2, a^3, e), a_{62} = (a^3, a^3, a^2, e), a_{63} = (a^2, a^2, a^3, a), a_{64} = (a^2, a^3, a^2, a) \}. \end{aligned}$$

Доказательство. По лемме 1 элементы a_1, a_2, a_3, a_4 , у которых все компоненты совпадают, являются идемпотентами в рассматриваемой 5-арной группе.

Ввиду леммы 4, элементы, у которых 3 компоненты совпадают, рассматривать нет необходимости.

Еще 36 идемпотентов получим, если выпишем элементы $a_5, a_6, \dots, a_{40}$, у которых из трех компонент $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ две совпадают, а компонента ε_1 , находится по формуле $\varepsilon_1 = (\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4)^{-1}$.

Все 24 элемента $a_{41}, a_{42}, \dots, a_{64}$, у которых компоненты $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ различные, также являются идемпотентами, так как компонента ε_1 удовлетворяет условию $\varepsilon_1 = (\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4)^{-1}$.

Так как в рассматриваемой 5-арной группе число всех идемпотентов равно $|Z_4|^3 = 4^3 = 64$, то других идемпотентов, кроме элементов $a_1, a_2, \dots, a_{64}$, в ней нет. Предложение доказано.

Заметим, что по лемме 3 среди идемпотентов $a_1, a_2, \dots, a_{64}$ не должно быть элементов, у которых все компоненты различны. Это действительно так.

Критерий идемпотентности элементов $(k+1)$ -арной группы $\langle \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [\]_{k+1, k} \rangle$ дает следующая

Теорема. Элемент

$$\varepsilon = (a^{r_1}, a^{r_2}, \dots, a^{r_k}), r_j \in \{0, 1, \dots, k-1\}, j = 1, \dots, k$$

является идемпотентом $(k+1)$ -арной группы $\langle \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [\]_{k+1, k} \rangle$

тогда и только тогда, когда сумма $r_1 + r_2 + \dots + r_k$ кратна k .

Доказательство. Необходимость. Если ε – идемпотент, то из

$$[\underbrace{\varepsilon \dots \varepsilon}_{k+1}]_{k+1, k} = \varepsilon, \quad (1)$$

то есть из

$$[(a^{r_1}, a^{r_2}, \dots, a^{r_k}) \dots (a^{r_1}, a^{r_2}, \dots, a^{r_k})]_{k+1, k} = (a^{r_1}, a^{r_2}, \dots, a^{r_k}), \quad (2)$$

ввиду определения операции $[\]_{k+1, k}$ следует

$$a^{r_j} \dots a^{r_k} a^{r_1} \dots a^{r_{j-1}} a^{r_j} = a^{r_j}, \quad (3)$$

для любого $j = 1, \dots, k$. Откуда

$$a^{r_j + \dots + r_k + r_1 + \dots + r_{j-1}} = e, \quad (4)$$

$$a^{r_1 + \dots + r_k} = e, \quad (5)$$

где e – единица группы Z_k . Следовательно, k делит $r_1 + r_2 + \dots + r_k$.

Достаточность. Если k делит $r_1 + r_2 + \dots + r_k$ то верно (5), откуда получаем (4). Это значит, что для любого $j = 1, \dots, k$ верно (3). Но тогда верно (2), а значит, и (1). Следовательно, ε – идемпотент. Теорема доказана.

Заметим, что теперь все полученные ранее леммы могут рассматриваться как следствия доказанной теоремы. Лемма 1 является непосредственным следствием теоремы. Леммы 2 и 3 следуют из теоремы, так как

число $\frac{k(k-1)}{2}$ при нечетном k делится на k , а при четном k не делится на

k . Для получения из доказанной теоремы леммы 4 используется тот факт, что число $s(k-1) + t$, где $s, t \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, $s \neq t$, не делится на k .

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10РА-002).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Гальмак, А.М.** Многостепенные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
2. **Гальмак, А.М.** Многостепенные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
3. **Post, E.L.** Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48. – № 2. – P. 208–350.
4. **Гальмак, А.М.** n -Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.