МАЛАДЫЯ ТАЛЕНТЫ МАГІЛЁЎШЧЫНЫ

УДК 517.98

Ю.Г. ЧУДАКОВА

(победитель областной олимпиады
по математике – 2009)

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

На олимпиаде была предложена следующая задача:

найти все действительные функции f, определенные на R, которые удовлетворяют функциональному уравнению

$$f\left(x+y^2\right)+f\left(x^2+y\right)=2f(xy), \quad \forall x,y\in R. \tag{1}$$

Автор предложил свой вариант решения этой задачи, который представляет интерес с методической точки зрения для теории функциональных уравнений.

Решение. Заменим в (1) переменную x на $(-x)$, а переменную y возьмем равной нулю. Тогда получим два уравнения

$$f(x)+f\left(x^2\right)=2f(0), \; f(-x)+f\left(x^2\right)=2f(0). \tag{2}$$

Из них вытекает, что $f(x)-f(-x)=0, \; \forall x\in R$, т.е. искомая функция является четной. Определим период этой функции. Для этого подставим выражение $y=1-x$ в уравнение (1). Тогда получим

$$f\left(x^2-x+1\right)=f\left(x-x^2\right)=f\left(x^2-x\right), \quad \forall x\in R, \tag{3}$$

в силу четности функции f. Выражение $\left(x^2-x\right)$ принимает значения из промежутка $\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$. Обозначим $x^2-x=t$. Тогда равенство (3) означает, что

$$f(t+1)=f(t), \quad \forall t\in\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$$

и тем более для $\forall t\in[0,+\infty)$. В силу четности функции f отсюда следует, что ее период равен 1. Подставим значение $x=1$ в уравнение (1). Тогда получим

$$f\left(1+y^2\right)+f(1+y)=2f(y)$$

или в силу периодичности функции f

$f\left(y^2\right)+f(y)=2f(y)$, т.е. $f\left(y^2\right)=f(y), \; \forall y\in R$.

Используя это соотношение, из уравнений (2) найдем

$f(x)+f(x)=2f(0)$ т.е. $f(x)=f(0), \forall x\in R$.

А это значит, что $f(x)=const$, $\forall x\in R$. Осталось заметить, что любая функция, тождественно равная константе, удовлетворяет исходному уравнению (1). Задача решена.