УДК 517+530.1

С.В. ЖЕСТКОВ, И.С. ВЕДОЛЕВА

О СУЩЕСТВОВАНИИ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ МОДИФИЦИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С РАЗЛИЧНЫМИ ТИПАМИ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

В работе исследуются системы модифицированных уравнений КДФ вида

$$\begin{cases} u_t + p_1(uv)_x + q_1u^2u_x + r_1u_{xxx} = 0, \\ v_t + p_2(uv)_x + q_2v^2v_x + r_2v_{xxx} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} u_t + p_1vu_x + q_1\sqrt{v}u_x + r_1u_{xxx} = 0, \\ v_t + p_2uv_x + q_2\sqrt{u}v_x + r_2v_{xxx} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

с произвольными действительными коэффициентами. Они описывают нелинейное взаимодействие двух волн, распространяющихся в сплошной среде. Развиваемый метод исследования основан на получении точных решений соответствующих скалярных уравнений. Установлено, что эти решения имеют дробно-рациональную форму от соответствующих экспонент. Этот факт позволяет найти солитонные решения систем (1), (2), используя классический метод Эйлера. Получены необходимые и достаточные условия существования солитонов, которые связывают параметры солитонов с параметрами среды. Они представляют интерес для приложений, т.к. их выполнение обеспечивает распространение солитонов найденной формы.

Введение

Известно [1-11], что развитие теории солитонов во многом обусловлено разработкой многочисленных методов построения точных решений нелинейных уравнений в частных производных. В [11] предложен и обоснован метод построения солитоноподобных решений широкого класса нелинейных уравнений современной физики. В его основе лежит дробно-рациональная форма солитонов и то обстоятельство, что действие дифференциальных операторов, содержащихся в классических уравнениях нелинейной физики, не выводит из класса дробно-рациональных функций. Поэтому развиваемый метод позволяет получить необходимые и достаточные условия распространения солитонов, которые связывают параметры среды и параметры солитонов. Эти соотношения представляют интерес и для приложений, так как невыполнение хотя бы одного из них означает, что распространение солитонов указанной формы невозможно.

I. Рассмотрим модифицированное уравнение КДФ [7] вида

$$u_t + puu_x + qu^2u_x + ru_{xxx} = 0, \tag{1}$$

где p, q, r – произвольные действительные числа. Решение уравнения (1) будем строить в форме бегущей волны

$$u(t,x) = v(\xi), \qquad \xi = \alpha t + \beta x + \varphi, \tag{2}$$

где α, β, φ – произвольные действительные числа. Подставляя (2) в (1), найдем

$$\alpha v' + p\beta v v' + q\beta v^2 v' + r\beta^3 v''' = 0. \tag{3}$$

Интегрируя один раз уравнение (3) и полагая константу интегрирования равной нулю, получим

$$v'' = av - bv^2 - cv^3, \tag{4}$$

где

$$a \equiv -\frac{\alpha}{r\beta^3}, \qquad b \equiv \frac{1}{2}\frac{p}{r\beta^2}, \qquad c \equiv \frac{1}{3}\frac{q}{r\beta^2}.$$

К уравнению (4) добавим краевые условия

$$v(\xi)\big|_{\xi\to\pm\infty} = 0, \qquad v'(\xi)\big|_{\xi\to\pm\infty} = 0. \tag{5}$$

Задача (4), (5) определяет существование солитонного решения уравнения (1). Обозначим $v' = z$. Тогда уравнение (4) можно переписать в виде

$$\frac{dz}{dv}z = av - bv^2 - cv^3. \tag{6}$$

Разделяя переменные в уравнении (6), получим первый интеграл

$$z^2 = av^2 - \frac{2}{3}bv^3 - \frac{c}{2}v^4, \tag{7}$$

в котором учтены краевые условия (5). Из (7) находим

$$\frac{dv}{d\xi} = -\left[av^2 - \frac{2}{3}bv^3 - \frac{c}{2}v^4\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

где знак "–" указывает на убывание солитона на бесконечности.

Интегрируя уравнение (8), получим

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{a - \frac{2}{3}bv - \frac{c}{2}v^2}} = -\xi + \xi_0,$$

где ξ_0 – произвольная постоянная. Чтобы вычислить этот интеграл, сделаем замену переменной

$$\sqrt{a - \frac{2}{3}bv - \frac{c}{2}v^2} = \sqrt{a} - sv,$$

считая, что $a > 0$. В результате элементарных вычислений получим

$$v(\xi) = \frac{4ae}{2ac + \left(e + \frac{2}{3}b\right)^2}, \qquad c > 0, \tag{9}$$

$$e \equiv \exp\left\{-\sqrt{a}(\xi - \xi_0)\right\}$$

Отметим, что параметр b может быть любого знака. Решение (9) имеет дробно-рациональную форму по переменной e. Этот факт позволяет исследовать системы связанных нелинейных модифицированных уравнений КДФ. В частности, для задачи (4), (5) на его основе устанавливается следующая

Теорема 1. *Для того чтобы задача (4), (5) имела решение вида*

$$v(\xi) = \frac{Ae}{Q + (e + B)^2}, \tag{10}$$

$$e \equiv \exp\left\{-\alpha_0(\xi - \xi_0)\right\},$$

где α_0, A, Q, B *– неизвестные параметры солитона, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения*

$$\alpha_0^2 = a, \qquad bA = 6\alpha_0^2 B, \qquad cA^2 = 8aQ. \tag{11}$$

Соотношения (11) дают полную и исчерпывающую информацию о распространении солитонов вида (10). Они связывают параметры солитона с параметрами среды, в чем и заключается их практическая значимость.

II. Исследуем систему связанных модифицированных уравнений КДФ вида

$$\begin{cases} u_t + p_1(uv)_x + q_1u^2u_x + r_1u_{xxx} = 0, \\ v_t + p_2(uv)_x + q_2v^2v_x + r_2v_{xxx} = 0, \end{cases} \tag{12}$$

где $p_i, q_i, r_i, i = 1,2$ – действительные числа. Отметим, что аналогичные системы исследовались в [12, 13]. В отличие от [12, 13] мы используем подход, развитый в монографии [11].

Солитонное решение системы (12) будем строить в виде бегущей волны

$$u(t,x) = u(\xi), \qquad v(t,x) = v(\xi), \qquad \xi = \alpha t + \beta x + \varphi, \tag{13}$$

где α, β, φ – действительные числа. Подставляя (13) в (12), найдем

$$\begin{cases} \alpha u' + p_1\beta(uv)' + \frac{1}{3}q_1\beta\left(u^3\right)' + r_1\beta^3u''' = 0, \\ \alpha v' + p_2\beta(uv)' + \frac{1}{3}q_2\beta\left(v^3\right)' + r_2\beta^3v''' = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Интегрируя систему (14) и полагая константу интегрирования равной нулю в обоих уравнениях, получим

$$\begin{cases} r_1\beta^3u'' + \alpha u + p_1\beta(uv) + \frac{1}{3}q_1\beta u^3 = 0, \\ r_2\beta^3v'' + \alpha v + p_2\beta(uv) + \frac{1}{3}q_2\beta v^3 = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Решение системы (15) строим в виде

$$u(\xi) = \frac{A_1e}{Q + (e + B)^2}, \qquad v(\xi) = \frac{A_2e}{Q + (e + B)^2}, \qquad e = e^{\xi - \xi_0}, \tag{16}$$

где A_1, A_2, B, Q – неизвестные параметры солитонов, ξ_0 – произвольная постоянная. Подставляя (16) в (15), получим следующие дисперсионные соотношения:

$$\begin{cases} \alpha = -r_1\beta^3, \\ p_1A_2 = 6r_1\beta^2 B, \\ q_1A_1^2 = 24r_1\beta^2 Q, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -r_2\beta^3, \\ p_2A_1 = 6r_2\beta^2 B, \\ q_2A_2^2 = 24r_2\beta^2 Q. \end{cases} \tag{17}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Для того, чтобы система (15) имела решение вида (16), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (17).*

Изучим эти соотношения. Очевидно, что $r_1 = r_2 \equiv r = -\dfrac{\alpha}{\beta^3}$. Тогда

$$A_1 = \frac{6r\beta^2 B}{p_2}, \qquad A_2 = \frac{6r\beta^2 B}{p_1}, \qquad \frac{A_2}{A_1} = \frac{p_2}{p_1}.$$

Кроме того,

$$q_1A_1^2 = q_2A_2^2.$$

Поэтому

$$\frac{A_2^2}{A_1^2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{p_2^2}{p_1^2}.$$

Выполнение соотношений

$$r_1 = r_2 = -\frac{\alpha}{\beta^3}, \qquad \frac{q_1}{q_2} = \frac{p_2^2}{p_1^2},$$

гарантирует существование солитонного решения вида (16).

III. Рассмотрим модифицированное уравнение КДФ с дробной степенью нелинейности

$$u_t + puu_x + q\sqrt{u}u_x + ru_{xxx} = 0, \tag{18}$$

где p, q, r – действительные числа. Такие уравнения встречаются в физике плазмы [14]. Решение уравнения (18) строим в виде бегущей волны

$$u(t,x) = v(\xi), \qquad \xi = \alpha t + \beta x + \varphi, \tag{19}$$

где α, β, φ – произвольные действительные числа. Подставляя (19) в (18), получим

$$\left(\alpha v + \frac{1}{2}p\beta v^2 + \frac{2}{3}q\beta v^{3/2} + r\beta^3 v''\right)' = 0. \tag{20}$$

Интегрируя (20) и полагая постоянную интегрирования равной нулю, найдем

$$v'' = av - bv^2 - cv^{3/2}, \qquad a > 0, \tag{21}$$

$$a = -\frac{\alpha}{r\beta^2}, \qquad b = \frac{p}{2r\beta^2}, \qquad c = \frac{2}{3}\frac{q}{r\beta^2}.$$

Добавим к уравнению (21) краевые условия

$$v(\xi)\big|_{\xi\to\pm\infty} = 0, \qquad v'(\xi)\big|_{\xi\to\pm\infty} = 0. \tag{22}$$

Задача (21), (22) определяет существование солитонного решения уравнения (18). Обозначим $v' = z$. Тогда уравнение (21) можно переписать в виде

$$\frac{dz}{dv}z = av - bv^2 - cv^{3/2}. \tag{23}$$

Разделяя переменные в уравнении (23), получим первый интеграл

$$z^2 = av^2 - \frac{2b}{3}v^3 - \frac{4}{5}cv^{5/2}, \tag{24}$$

в котором учтены краевые условия (22). Из (24) находим

$$\frac{dv}{d\xi} = -\sqrt{av^2 - \frac{2b}{3}v^3 - \frac{4}{5}cv^{5/2}}, \tag{25}$$

где знак "минус" указывает на убывание солитона на бесконечности.

Интегрируя уравнение (25), получим

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{a - \frac{2b}{3}v - \frac{4}{5}cv^{1/2}}} = -\xi + \xi_0,$$

где ξ_0 – произвольная постоянная. Чтобы вычислить этот интеграл, сделаем сначала замену переменной $\sqrt{v} = s$, $v = s^2$, а затем

$$\sqrt{a - \frac{2b}{3}s^2 - \frac{4}{5}cs} = \sqrt{a} - s\theta, \qquad a > 0.$$

В результате элементарных вычислений получим

$$v(\xi) = \frac{16a^2e^2}{\left[\left(e + \frac{4}{5}c\right)^2 + \frac{8}{3}ab\right]^2}, \qquad e \equiv e^{-\frac{1}{2}\sqrt{a}(\xi-\xi_0)}. \tag{26}$$

Отметим, что параметр c может быть любого знака, $b > 0$. Решение (26) имеет дробно-рациональную форму по переменной e, что позволяет исследовать системы связанных нелинейных модифицированных уравнений КДФ. В частности, на основе этого факта для задачи (21), (22) устанавливается

Теорема 3. *Для того чтобы задача (21), (22) имела решение вида*

$$v(\xi) = A\left[\frac{e}{(e+Q)^2 + B}\right]^2, \qquad e \equiv e^{-\alpha_0(\xi-\xi_0)},$$

где A, B, Q, α_0 – неизвестные параметры солитона, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения

$$4\alpha_0^2 = a, \qquad c\sqrt{A} = 5aQ, \qquad bA = 6aB. \tag{27}$$

Изучим эти соотношения. Очевидно, что параметр a должен быть положительным. Кроме того, $A > 0,\ B > 0,\ b > 0$. Таким образом, соотношения (27) связывают параметры солитона A, B, Q, α_0 с параметрами среды a, b, c в чем и заключается их значимость.

IV. Исследуем систему связанных модифицированных уравнений КДФ вида

$$\begin{cases} u_t + p_1 v u_x + q_1\sqrt{v}u_x + r_1 u_{xxx} = 0, \\ v_t + p_2 u v_x + q_2\sqrt{u}v_x + r_2 v_{xxx} = 0, \end{cases} \tag{28}$$

где $p_i, q_i, r_i, i = 1,2$ – действительные числа. Система (28) описывает нелинейное взаимодействие двух волн (ср. с [12, 13]). Солитонное решение системы (28) будем строить в виде бегущей волны

$$u(t,x) = A_1 F(\xi), \qquad v(t,x) = A_2 F(\xi), \qquad \xi = \alpha t + \beta x + \varphi, \tag{29}$$

где α, β, φ – действительные числа. Подставляя (29) в (28), найдем

$$\begin{cases} F'' = -\dfrac{\alpha}{r_1\beta^3}F - \dfrac{1}{2}\dfrac{p_1 A_2}{r_1\beta^2}F^2 - \dfrac{2}{3}\dfrac{q_1\sqrt{A_2}}{r_1\beta^2}F^{3/2}, \\ F'' = -\dfrac{\alpha}{r_2\beta^3}F - \dfrac{1}{2}\dfrac{p_2 A_1}{r_2\beta^2}F^2 - \dfrac{2}{3}\dfrac{q_2\sqrt{A_1}}{r_2\beta^2}F^{3/2}. \end{cases} \tag{30}$$

Решение системы (30) строим в виде

$$F(\xi) = \left[\frac{e}{(e+Q)^2 + B}\right]^2, \qquad e \equiv \exp\{-\alpha_0(\xi - \xi_0)\}. \tag{31}$$

Подставляя (31) в (30), получим следующие дисперсионные соотношения:

$$\begin{matrix} 4\alpha_0^2 r_1\beta^3 = -\alpha, & \dfrac{2}{3}q_1\sqrt{A_2} = -\dfrac{5\alpha}{\beta}Q, & p_1A_2 = 12B\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right), \\ 4\alpha_0^2 r_2\beta^3 = -\alpha, & \dfrac{2}{3}q_2\sqrt{A_1} = -\dfrac{5\alpha}{\beta}Q, & p_2A_1 = 12B\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right). \end{matrix} \tag{32}$$

Из соотношений (32) вытекает, что $r_1 = r_2$,

$$A_1 = 12\frac{B\alpha}{p_2\beta}, \qquad A_2 = 12\frac{B\alpha}{p_1\beta}, \qquad \frac{A_2}{A_1} = \frac{p_2}{p_1},$$

$$\frac{q_2^2}{q_1^2} = \frac{p_2}{p_1}.$$

Выполнение указанных условий гарантирует существование решения системы (28) вида

$$u(t,x) = A_1\left[\frac{e}{(e+Q)^2+B}\right]^2, \qquad v(t,x) = A_2\left[\frac{e}{(e+Q)^2+B}\right]^2.$$

Таким образом, полученные результаты устанавливают существование новых форм солитонных решений для модифицированных уравнений КДФ и представляют интерес для приложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Захаров В.Е.*** Теория солитонов: Метод обратной задачи / В.Е. Захаров [и др.]. – М.: Наука, 1980. – 314 с.
2. ***Бреховских, Л.М.*** Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн) / Л.М. Бреховских, В.В. Гончаров. – М.: Наука, 1982. – 248 с.
3. ***Лэм, Дж.Л.*** Введение в теорию солитонов / Дж.Л. Лэм. – М.: Мир, 1983. – 294 с.
4. ***Буллаф, Р.*** Солитоны / Р. Буллаф, Ф. Кодри; под ред Р. Буллаф. – М.: Мир, 1983. – 232 с.
5. ***Калоджеро, Ф.*** Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений / Ф. Калоджеро, А. Дегасперис. – М.: Мир, 1985. – 469 с.
6. ***Тахтаджян, Л.А.*** Гамильтонов подход в теории солитонов / Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. – М.: Наука, 1986. – 528 с.
7. ***Абловиц, М.*** Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – М.: Мир, 1987. – 479 с.
8. ***Додд Р.*** Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд [и др.]. – М.: Мир, 1988. – 694 с.
9. ***Ньюэлл, А.*** Солитоны в математике и физике / А. Ньюэлл. – М.: Мир, 1989. – 326 с.
10. ***Ахмедиев, Н.Н.*** Солитоны / Н.Н. Ахмедиев, А. Анкевич. – М.: Физматлит, 2003. – 304 с.
11. ***Жестков, С.В.*** Конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных / С.В. Жестков. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2006. – 220 с.
12. ***Krishnan, E.V.*** Remarks on a system of coupled nonlinear wave equations / E.V. Krishnan – J. Math. Phys. – 1990. – Vol. 31, No. 5. – P. 1155-1156.
13. ***Ashis, Basu.*** Solutions of an equation that lead to solutions of a modified Emden equation and a coupled Korteweg-de Vries equation / Basu Ashis, Ray Dipankar. – J. Math. Phys. – 1990. – Vol. 31, No. 5. – P. 1152-1154.
14. ***Volosevich, A.V.*** Theoretical model and experimental diagnostics of nonlinear electrostatic structures in space plasma / A.V. Volosevich, C.V. Meister, S.V. Zhestkov. – Advances in Space Research. – 2006. – № 7. – P. 569-575.

Поступила в редакцию 11.03.2008 г.