ОБ n -АРНЫХ ОПЕРАЦИЯХ НА ДЕКАРТОВЫХ СТЕПЕНЯХ n -АРНЫХ ГРУППОИДОВ

Продолжаются исследования автора по изучению полиадических операций на декартовых степенях алгебраических систем. Для любого $n \geq 3$ на декартовой степени A^{n-1} n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ определяется n -арная операция $\tilde{\eta}$ и изучаются свойства n -арного группоида $\langle A, \tilde{\eta} \rangle$. Найлены необходимые и достаточные условия для того, чтобы элемент n -арного группоида $\langle A, \tilde{\eta} \rangle$ был его нулем. Доказано, что если n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем, то в n -арном группоиде $\langle A, \tilde{\eta} \rangle$ все элементы являются делителями нуля. Найлены необходимые и достаточные условия полуабелевости n -арного группоида $\langle A, \tilde{\eta} \rangle$.

Введение. В [1] для любых целых $k \geq 2$ и $l \geq 2$ на декартовой степени A^k произвольного группоида A была определена и изучалась l -арная операция $[]_{l,k}$. При $k = n - 1$, $l = n$ определение операции $[]_{l,k}$ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & [(a_{11}, \dots, a_{1(n-1)})(a_{21}, \dots, a_{2(n-1)}) \dots (a_{n1}, \dots, a_{n(n-1)})]_{n, n-1} = \\ & = (a_{11} a_{22} \dots a_{(n-1)(n-1)} a_{n1}, a_{12} \dots a_{(n-2)(n-1)} a_{(n-1)1} a_{n2}, \dots, a_{1(n-1)} a_{21} \dots a_{n(n-1)}). \end{aligned} \quad (1)$$

Из (1) видно, что n -арная операция $[]_{n, n-1}$ определяется аналогично n -арной операции, которую Пост определил на множестве всех n -арных подстановок [2]. Если в определении операции $[]_{n, n-1}$ группоид заменить n -арным группоидом, то получим определение новой n -арной операции. Изучению именно таких n -арных операций, определенных на декартовых степенях n -арных группоидов, и посвящена настоящая работа.

Приведем определения некоторых понятий, используемых в работе.

Если в n -арном группоиде $\langle A, [] \rangle$ для любой подстановки σ множества $\{1, 2, \dots, n\}$ выполняется тождество $[a_1 a_2 \dots a_n] = [a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(n)}]$, то n -арный группоид $\langle A, [] \rangle$ называется абелевым. n -Арный группоид $\langle A, [] \rangle$ с тождеством $[a a_1 \dots a_{n-2} b] = [b a_1 \dots a_{n-2} a]$ называется полуабелевым.

Заметим, что понятия абелевости и полуабелевости впервые появились у Дёрнте [3] при изучении n -арных групп. При $n = 2$ понятия абелевости и полуабелевости совпадают, так как в этом случае оба тождества принимают вид $ab = ba$.

Элемент a n -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ называется его: 1) *идемпотентом*, если $\underbrace{[a \dots a]}_n = a$; 2) *нулем*, если $[ax_1 \dots x_{n-1}] = [x_1ax_2 \dots x_{n-1}] = \dots = [x_1 \dots x_{n-1}a] = a$ для всех $x_1, \dots, x_{n-1} \in A$; 3) *единицей*, если $\underbrace{[xa \dots a]}_{n-1} = \underbrace{[axa \dots a]}_{n-2} = \dots = \underbrace{[a \dots ax]}_{n-1} = x$ для любого $x \in A$.

Понятно, что n -арный группоид не может иметь более одного нуля, а всякая единица n -арного группоида является его идемпотентом.

Последовательность $e_1 \dots e_{n-1}$ элементов n -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ называется: 1) *нейтральной*, если для любого $x \in A$ верно $[e_1 \dots e_{n-1}x] = [xe_1 \dots e_{n-1}] = x$; 2) *левой нейтральной*, если для любого $x \in A$ верно $[e_1 \dots e_{n-1}x] = x$; 3) *правой нейтральной*, если для любого $x \in A$ верно $[xe_1 \dots e_{n-1}] = x$.

Если a – единица n -арного группоида $\langle A, [] \rangle$, то последовательность $\underbrace{a \dots a}_{n-1}$ является нейтральной в $\langle A, [] \rangle$.

Понятие нейтральной последовательности впервые было сформулировано Постом для n -арных групп [2].

Элемент a n -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ с нулем 0 называется его i -ым делителем нуля, где $i \in \{1, \dots, n\}$, если существуют $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n \in A$, отличные от нуля, такие, что $[b_1 \dots b_{i-1}ab_{i+1} \dots b_n] = 0$. Если элемент a является i -ым делителем нуля для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$, то a называют делителем нуля в $\langle A, [] \rangle$.

Понятно, что сам нуль является делителем нуля.

Делители нуля в универсальных алгебрах с полиадическими операциями, а именно в (m, n) -кольцах, изучал Кромбец [4].

n -Арный группоид $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид. На декартовой степени A^{n-1} определим n -арную операцию $\tilde{\eta}$ аналогично n -арной операции (1):

$$\tilde{\eta}((a_{11}, \dots, a_{1(n-1)}), (a_{21}, \dots, a_{2(n-1)}) \dots (a_{n1}, \dots, a_{n(n-1)})) = (\eta(a_{11}a_{22} \dots a_{(n-1)(n-1)}a_{n1}), \eta(a_{12} \dots a_{(n-2)(n-1)}a_{(n-1)1}a_{n2}), \dots, \eta(a_{1(n-1)}a_{21} \dots a_{n(n-1)})). \quad (2)$$

Покажем, что всякий n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ изоморфно вкладывается в n -арный группоид $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$.

Предложение 1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид, $A_0 = \{(\underbrace{a, \dots, a}_{n-1}) \mid a \in A\}$.

Тогда $\langle A_0, \tilde{\eta} \rangle$ является n -арным подгруппоидом n -арного группоида $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$, изоморфным n -арному группоиду $\langle A, \eta \rangle$.

Доказательство. Так как

$$\tilde{\eta}(\underbrace{(a_1, \dots, a_1)}_{n-1} \dots \underbrace{(a_n, \dots, a_n)}_{n-1}) = (\underbrace{\eta(a_1 \dots a_n)}_{n-1}, \dots, \underbrace{\eta(a_1 \dots a_n)}_{n-1}) \in A_0,$$

то множество A_0 замкнуто относительно n -арной операции $\tilde{\eta}$, то есть $\langle A_0, \tilde{\eta} \rangle$ является n -арным подгруппоидом n -арного группоида $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$.

Определим отображение $f: A \rightarrow A_0$ по правилу $f: a \rightarrow (\underbrace{a, \dots, a}_{n-1})$. Ясно, что f –

биекция. Так как

$$f(\eta(a_1 \dots a_n)) = (\underbrace{\eta(a_1 \dots a_n), \dots, \eta(a_1 \dots a_n)}_{n-1}) = \\ = \tilde{\eta}(\underbrace{(a_1, \dots, a_1)}_{n-1} \dots \underbrace{(a_n, \dots, a_n)}_{n-1}) = \tilde{\eta}(f(a_1) \dots f(a_n)),$$

то f является изоморфизмом n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ на n -арный группоид $\langle A_0, \tilde{\eta} \rangle$. Предложение доказано.

n -Арные аналоги нуля и единицы. Следующее предложение устанавливает связь между нулем n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ и нулем n -арного группоида $\langle A, \tilde{\eta} \rangle$.

Предложение 2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид. Тогда

1) если 0 – нуль в $\langle A, \eta \rangle$, то $\mathbf{0} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1})$ является нулем в $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$;

2) если $(a_1, \dots, a_{n-1})$ – нуль в $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$, то $a_1 = \dots = a_{n-1} = a$, причем a – нуль в $\langle A, \eta \rangle$.

Доказательство. 1) Очевидно.

2) Для произвольных $x_1, \dots, x_{n-1} \in A$ положим

$$\mathbf{x}_1 = (\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{n-1}), \dots, \mathbf{x}_n = (\underbrace{x_n, \dots, x_n}_{n-1}).$$

Так как $(a_1, \dots, a_{n-1})$ – нуль в $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$, то

$$\tilde{\eta}((a_1, \dots, a_{n-1})\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1}) = (a_1, \dots, a_{n-1}),$$

откуда $(a_1 x_1 \dots x_{n-1}) = a_1$ для любых $x_1, \dots, x_{n-1} \in A$. В частности,

$$\eta(a_1 a_3 \underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-2}) = a_1, \eta(a_1 a_4 \underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-2}) = a_1, \dots, \eta(a_1 a_{n-1} \underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-2}) = a_1, \eta(a_1 a_1 \underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-2}) = a_1.$$

Снова, так как $(a_1, \dots, a_{n-1})$ – нуль в $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$, то

$$\tilde{\eta}(\underbrace{(a_1, \dots, a_1)}_{n-1} (a_1, \dots, a_{n-1}) \underbrace{(a_1, \dots, a_1)}_{n-1} \dots \underbrace{(a_1, \dots, a_1)}_{n-1}) = (a_1, \dots, a_{n-1}),$$

откуда

$$\eta(a_1 a_3 \underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-2}) = a_2, \eta(a_1 a_4 \underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-2}) = a_3, \dots, \eta(a_1 a_{n-1} \underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-2}) = a_{n-2}, \eta(a_1 a_1 \underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-2}) = a_{n-1}.$$

Сравнивая левые части только что полученных равенств с левыми частями полученных ранее равенств, получаем $a_1 = a_2, a_1 = a_3, \dots, a_1 = a_{n-2}, a_1 = a_{n-1}$.

Для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ положим

$$\tilde{\eta}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{i-1} \underbrace{(a_1, \dots, a)}_{n-1} \mathbf{x}_{i+1} \dots \mathbf{x}_n) = (g_1, \dots, g_{n-1}),$$

где $a = a_1 = \dots = a_{n-1}$. Ясно, что $g_j = \eta(x_1 \dots x_{i-1} a x_{i+1} \dots x_n)$. Но так как $(a, \dots, a)$ – нуль

в $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$, то $g_1 = \dots = g_{n-1} = a$, откуда $\eta(x_1 \dots x_{i-1} a x_{i+1} \dots x_n) = a$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ и всех $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in A$. Следовательно, a – нуль в $\langle A, \eta \rangle$. Предложение доказано.

Предложение 3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид, 1 – его единица,

$\mathbf{e} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}) \in A^{n-1}$. Тогда

1) для любого $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in A^{n-1}$ и любого $i \in \{1, \dots, n\}$ верно

$$\tilde{\eta}(\underbrace{e \dots e}_{i-1}(x_1, \dots, x_{n-1})\underbrace{e \dots e}_{n-i}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_1, \dots, x_{i-1});$$

2) если $|A| > 1$, то e не является единицей в $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$;

3) $\underbrace{e \dots e}_{n-1}$ – нейтральная последовательность в $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$.

Доказательство. 1) Используется определение операции $\tilde{\eta}$.

2) Если $x_1 \neq x_2$, то из записанных равенств следует, например,

$$\tilde{\eta}(\underbrace{(x_1, \dots, x_{n-1})e \dots e}_{n-1}) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \neq (x_2, \dots, x_{n-1}, x_1) = \tilde{\eta}(e(x_1, \dots, x_{n-1})\underbrace{e \dots e}_{n-2}).$$

Следовательно, e не является единицей в $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$.

3) Полагая в 1) $i = 1, i = n$, получим

$$\tilde{\eta}(\underbrace{(x_1, \dots, x_{n-1})e \dots e}_{n-1}) = \tilde{\eta}(\underbrace{e \dots e}_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})) = (x_1, \dots, x_{n-1})$$

для любого $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in A^{n-1}$. Следовательно, $\underbrace{e \dots e}_{n-1}$ является нейтральной

последовательностью в $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$. Предложение доказано.

Предложение 4. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид. Тогда

1) элементы $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ являются его идемпотентами тогда и только тогда, когда

$$\tilde{\eta}((e_1, e_2, \dots, e_{n-1})(e_{n-1}, e_1, \dots, e_{n-2})(e_{n-2}, e_{n-1}, e_1, \dots, e_{n-3}) \dots (e_3, \dots, e_{n-1}, e_1, e_2)(e_2, \dots, e_{n-1}, e_1)(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})) = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1});$$

2) a – идемпотент n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ тогда и только тогда, когда $(\underbrace{a, \dots, a}_{n-1})$ является идемпотентом n -арного группоида $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$.

Доказательство. 1) *Необходимость.* Если $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ – идемпотенты в $\langle A, \eta \rangle$, то

$$\begin{aligned} & \tilde{\eta}((e_1, e_2, \dots, e_{n-1})(e_{n-1}, e_1, \dots, e_{n-2})(e_{n-2}, e_{n-1}, e_1, \dots, e_{n-3}) \dots \\ & \dots (e_3, \dots, e_{n-1}, e_1, e_2)(e_2, \dots, e_{n-1}, e_1)(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})) = \\ & = (\underbrace{\eta(e_1 \dots e_1)}_n, \underbrace{\eta(e_2 \dots e_2)}_n, \dots, \underbrace{\eta(e_{n-1} \dots e_{n-1})}_n) = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1}). \end{aligned}$$

Достаточность. Если верно равенство из 1), то

$$(\underbrace{\eta(e_1 \dots e_1)}_n, \underbrace{\eta(e_2 \dots e_2)}_n, \dots, \underbrace{\eta(e_{n-1} \dots e_{n-1})}_n) = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1}),$$

откуда

$$\underbrace{\eta(e_1 \dots e_1)}_n = e_1, \underbrace{\eta(e_2 \dots e_2)}_n = e_2, \dots, \underbrace{\eta(e_{n-1} \dots e_{n-1})}_n = e_{n-1}.$$

Следовательно, $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ – идемпотенты в $\langle A, \eta \rangle$.

2) Доказывается так же, как 1). Может быть получено также, как следствие из 1). Предложение доказано.

Делители нуля в $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$. Покажем, что в n -арном группоиде $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$ с нулем все элементы являются делителями нуля.

Предложение 5. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид с нулем, то в n -арном группоиде $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$ все элементы являются делителями нуля.

Доказательство. Сразу же заметим, что, согласно предложению 2, в n -арном группоиде $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$ имеется нуль $(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1})$, где 0 – нуль в $\langle A, \eta \rangle$.

Покажем, что для любого $a \in A^{n-1}$ и любого $i \in \{1, \dots, n\}$ существуют $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n \in A^{n-1}$, отличные от $(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1})$, такие, что $(b_1 \dots b_{i-1} a b_{i+1} \dots b_n) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1})$.

Если $i = 1$, то $b_3, \dots, b_{n-1}$ можно выбрать любыми, отличными от нуля n -арного группоида $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$, а b_2 и b_n положить равными

$$b_2 = (c_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}), b_n = (c_2, \dots, c_{n-1}, 0),$$

где $c_1, \dots, c_{n-1}$ могут быть любыми из A , отличными от нуля. Тогда

$$\tilde{\eta}(a(c_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2})b_3 \dots b_{n-1}(0, c_2, \dots, c_{n-1})) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}).$$

Если $2 \leq i \leq n-1$, то $b_2, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_{n-1}$ можно выбрать любыми, отличными от нуля n -арного группоида $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$, а b_1 и b_n положить равными

$$b_1 = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, c_1), b_n = (c_2, \dots, c_{n-1}, 0),$$

где $c_1, \dots, c_{n-1}$ могут быть любыми из A , отличными от нуля. Тогда

$$\tilde{\eta}((\underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, c_1)b_2 \dots b_{i-1} a b_{i+1} \dots b_{n-1}(c_2, \dots, c_{n-1}, 0)) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}).$$

Если $i = n$, то $b_3, \dots, b_{n-1}$ можно выбрать любыми, отличными от нуля n -арного группоида $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$, а b_1 и b_2 положить равными

$$b_1 = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, c_1), b_2 = (0, c_2, \dots, c_{n-1}),$$

где $c_1, \dots, c_{n-1}$ могут быть любыми из A , отличными от нуля. Тогда

$$\tilde{\eta}((\underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, c_1)(0, c_2, \dots, c_{n-1})b_3 \dots b_{n-1} a) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}).$$

Предложение доказано.

Предложение 6. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид с нулем 0 , $j \in \{1, \dots, n-1\}$, $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_{n-1} \in A$, $a = (a_1, \dots, a_{j-1}, a_j = 0, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}) \in A_{n-1}$. Тогда

$$\tilde{\eta}(\underbrace{a \dots a}_n) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}).$$

Доказательство. Положим $\tilde{\eta}(\underbrace{a \dots a}_n) = (g_1, \dots, g_{n-1})$. Тогда, согласно опре-

делению операции $\tilde{\eta}$, $g_k = (a_k a_{k+1} \dots a_{n-1} a_1 \dots a_{k-1} a_k)$, $k = 1, \dots, n-1$. Так как в правой части последнего равенства присутствуют все $a_1, \dots, a_{n-1}$, то среди них обязательно встретится $a_j = 0$. Поэтому $g_k = 0$, для любого $k = 1, \dots, n-1$, то есть верно равенство из условия предложения. Предложение доказано.

Перестановочность элементов в $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$. Укажем достаточные условия неабелевости n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$.

Предложение 7. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид, не являющийся одноэлементным. Тогда n -арный группоид $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$ будет неабелевым, если выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

1) существуют такие элементы $a, b, e_1, \dots, e_{n-1} \in A, a \neq b$, что

$$\eta(ae_1 \dots e_{n-1}) = a, \eta(be_1 \dots e_{n-1}) = b;$$

2) существуют такие элементы $a, b, e_1, \dots, e_{n-1} \in A, a \neq b$, что

$$\eta(e_1 \dots e_{n-1}a) = a, (e_1 \dots e_{n-1}b) = b;$$

3) в $\langle A, \eta \rangle$ существует правая нейтральная последовательность;

4) в $\langle A, \eta \rangle$ существует левая нейтральная последовательность;

5) в $\langle A, \eta \rangle$ существует нейтральная последовательность;

6) в $\langle A, \eta \rangle$ существует единица.

Доказательство. 1) Пусть $a_1, \dots, a_n \in A^{n-1}$, где

$$a_1 = (a, e_1, a_{13}, \dots, a_{1(n-1)}), a_2 = (b, e_1, a_{23}, \dots, a_{2(n-1)}), a_3 = (a_{31}, a_{32}, e_2, a_{34}, \dots, a_{3(n-1)}), \dots$$

$$\dots, a_{n-1} = (a_{(n-1)1}, \dots, a_{(n-1)(n-2)}, e_{n-2}), a_n = (e_{n-1}, a_{n2}, \dots, a_{n(n-1)}).$$

Положим

$$\tilde{\eta}(a_1 a_2 a_3 \dots a_n) = (g_1, \dots, g_{n-1}), \tilde{\eta}(a_2 a_1 a_3 \dots a_n) = (h_1, \dots, h_{n-1}).$$

Так как

$$g_1 = \eta(ae_1e_2 \dots e_{n-2}e_{n-1}) = a, h_1 = \eta(be_1e_2 \dots e_{n-2}e_{n-1}) = b,$$

то, ввиду $a \neq b$, получим $g_1 \neq h_1$, откуда $\tilde{\eta}(a_1 a_2 a_3 \dots a_n) \neq \tilde{\eta}(a_2 a_1 a_3 \dots a_n)$. Следовательно, n -арный группоид $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$ не является абелевым.

2) Пусть $a_1, \dots, a_n \in A^{n-1}$, где

$$a_1 = (a_{11}, \dots, a_{1(n-2)}, e_1), a_2 = (e_2, a_{22}, \dots, a_{2(n-1)}), a_3 = (a_{31}, e_3, a_{33}, \dots, a_{3(n-1)}), \dots$$

$$\dots, a_{n-2} = (a_{(n-2)1}, \dots, a_{(n-2)(n-4)}, e_{n-2}, a_{(n-2)(n-2)}, a_{(n-2)(n-1)}),$$

$$a_{n-1} = (a_{(n-1)1}, \dots, a_{(n-1)(n-3)}, e_{n-1}, b), a_n = (a_{n1}, \dots, a_{n(n-3)}, e_{n-1}, a).$$

Положим

$$\tilde{\eta}(a_1 \dots a_{n-2} a_{n-1} a_n) = (g_1, \dots, g_{n-1}), \tilde{\eta}(a_1 \dots a_{n-2} a_n a_{n-1}) = (h_1, \dots, h_{n-1}).$$

Так как

$$g_{n-1} = \eta(e_1e_2 \dots e_{n-2}e_{n-1}a) = a, h_{n-1} = \eta(e_1e_2 \dots e_{n-2}e_{n-1}b) = b,$$

то, ввиду $a \neq b$, получим $g_{n-1} \neq h_{n-1}$, откуда $\tilde{\eta}(a_1 \dots a_{n-2} a_{n-1} a_n) \neq \tilde{\eta}(a_1 \dots a_{n-2} a_n a_{n-1})$. Следовательно, n -арный группоид $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$ неабелев.

3) Следует из 1).

4) Следует из 2).

5) Применяется любое из утверждений 1) – 4).

6) Применяется любое из утверждений 1) – 5). Предложение доказано.

Предложение 8. n -Арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ является полуабелевым тогда и только тогда, когда полуабелев n -арный группоид $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$.

Доказательство. Необходимость. Так как n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ – полуабелев, то

$$\begin{aligned} & \tilde{\eta}((a_{11}, \dots, a_{1(n-1)})(a_{21}, \dots, a_{2(n-1)}) \dots (a_{(n-1)1}, \dots, a_{(n-1)(n-1)})(a_{n1}, \dots, a_{n(n-1)})) = \\ & = (\eta(a_{11}a_{22} \dots a_{(n-1)(n-1)}a_{n1}), \eta(a_{12} \dots a_{(n-2)(n-1)}a_{(n-1)1}a_{n2}), \dots \\ & \dots, \eta(a_{1(n-2)}a_{2(n-1)}a_{31} \dots a_{(n-1)(n-3)}a_{n(n-2)}), \eta(a_{1(n-1)}a_{21} \dots a_{(n-1)(n-2)}a_{n(n-1)})) = \\ & = (\eta(a_{n1}a_{22} \dots a_{(n-1)(n-1)}a_{11}), \eta(a_{n2} \dots a_{(n-2)(n-1)}a_{(n-1)1}a_{12}), \dots \\ & \dots, \eta(a_{n(n-2)}a_{2(n-1)}a_{31} \dots a_{(n-1)(n-3)}a_{1(n-2)}), \eta(a_{n(n-1)}a_{21} \dots a_{(n-1)(n-2)}a_{1(n-1)})) = \\ & = \tilde{\eta}((a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{n(n-1)})(a_{21}, \dots, a_{2(n-1)}) \dots (a_{(n-1)1}, \dots, a_{(n-1)(n-1)})(a_{11}, \dots, a_{1(n-2)}), a_{1(n-1)}), \end{aligned}$$

то есть

$$\tilde{\eta}(a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n) = \tilde{\eta}(a_n a_2 \dots a_{n-1} a_1)$$

для любых $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{i(n-1)}) \in A^{n-1}$, $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$ – полуабелев.

Достаточность. Пусть $x_1, \dots, x_n$ – произвольные элементы из A . Положим

$$y_i = (\underbrace{x_i, \dots, x_i}_{n-1}) \in A^{n-1}, i = 1, \dots, n,$$

$$\tilde{\eta}(y_1 y_2 \dots y_{n-1} y_n) = (g_1, \dots, g_{n-1}), \quad \tilde{\eta}(y_n y_2 \dots y_{n-1} y_1) = (h_1, \dots, h_{n-1}).$$

Так как $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$ – полуабелев, то

$$\tilde{\eta}(y_1 y_2 \dots y_{n-1} y_n) = \tilde{\eta}(y_n y_2 \dots y_{n-1} y_1),$$

откуда $g_1 = h_1$, где $g_1 = \eta(x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n)$, $h_1 = \eta(x_n x_2 \dots x_{n-1} x_1)$. Следовательно, в n -арном группоиде $\langle A, \eta \rangle$ верно тождество $\eta(x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n) = \eta(x_n x_2 \dots x_{n-1} x_1)$, что означает его полуабелевость. Предложение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гальмак, А.М.** О многоместных операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весник МДУ імя А.А. Куляшова. – 2008. – № 2-3(30). – С. 134-139.
2. **Post, E.L.** Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208-350.
3. **Dörnte, W.** Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1-19.
4. **Crombez, G.** On (n, m) rings / G. Crombez // Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg. – 1972. – Vol. 37. – P. 180-199.