УДК 517.984

М.В. МАРТОН

СУЩЕСТВЕННЫЙ СПЕКТР АПОСТОЛА ПРИ СТРОГО СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Статья посвящена одному из разделов спектрального анализа – теории существенных спектров линейных операторов в банаховом пространстве. В статье обсуждаются некоторые свойства существенного спектра Апостола ограниченного линейного оператора в банаховом пространстве. Работа посвящается выявлению взаимосвязи существенного спектра Апостола с другими известными существенными спектрами, а именно существенным спектром Като и Фредгольма. Устанавливаются результаты об устойчивости и инвариантности существенного спектра Апостола, связанного с существенно полурегулярными операторами, при коммутирующих строго сингулярных возмущениях, которые являются обобщением класса коммутирующих компактных возмущений.

Вначале определим существенный спектр Апостола для ограниченных линейных операторов в комплексном банаховом пространстве и выявим его связи с другими известными существенными спектрами. Пусть X – банахово пространство. Для ограниченного линейного оператора T определим следующие числовые характеристики:

$\mathrm{nul}(T) := \dim N(T)$, где $N(T) := \{x \in X\colon Tx = 0\}$ – ядро оператора T;

$\mathrm{def}(T) := \mathrm{codim}R(T) = \dim(X / R(T))$ – дефект оператора T (размерность коядра);

$\mathrm{ind}(T) := \mathrm{nul}(T) - \mathrm{def}(T)$ – индекс оператора T.

Оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ называется полурегулярным, если его область значений замкнута, $\overline{R(T)} = R(T)$ и выполняется включение $N(T) \subset R^{\infty}(T)$. Простейшими примерами полурегулярных операторов в $T \in \boldsymbol{B}(X)$ являются ограниченные снизу операторы и сюръективные операторы. В терминах состояний Тейлора-Халберга последние классы операторов можно описать, соответственно, как $T \in 1$ и $T \in \mathrm{I}$ (см. определения в [1]).

Оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$, следуя Мюллеру [2, определение 3.2], будем называть существенно полурегулярным, если его область значений замкнута, т.е. $\overline{R(T)} = R(T)$ и выполняется включение $N(T) \subset_e R^{\infty}(T)$, т.е. если размерность выступа нулей оператора T на обобщенной области значений $R^{\infty}(T)$ конечна, а именно если $k(T) := \dim [N(T) / (N(T) \cap R^{\infty}(T))] < \infty$.

Далее дадим определения существенных спектров и существенного спектра Апостола. Существенные спектры оператора T можно определять различными способами. Один из способов определения существенных спектров ограниченного оператора, который в определенном смысле упорядочивает изучаемые существенные спектры, связан с описанием различных фредгольмовых свойств оператора.

Рассмотрим следующие подмножества комплексной плоскости C:

$$\Delta_1(T) := \{\lambda \in \mathrm{C}: \overline{R(T-\lambda I)} = R(T-\lambda I)\},$$

$$\Phi^+(T) := \{\lambda \in \Delta_1(T): \mathrm{nul}(T-\lambda I) < \infty\},$$

$$\Phi^-(T) := \{\lambda \in \Delta_1(T): \mathrm{def}(T-\lambda I) < \infty\},$$

$$\Delta_2(T) := \Phi^+(T) \cup \Phi^-(T) = s - \Phi(T),$$

$$\Delta_3(T) := \Phi^+(T) \cap \Phi^-(T) = \Phi(T),$$

$$\Delta_4(T) := \{\lambda \in \Delta_3(T): \mathrm{ind}(T-\lambda I) = 0\} = \Phi_0(T),$$

$\Delta_5(T) := \{\lambda \in \Delta_4(T)$: проколотая окрестность точки λ лежит в резольвентном множестве $\rho(T)\} = B(T)$.

Подмножество комплексной плоскости $\Delta_1(T)$ называется областью нормальной разрешимости оператора T, соответственно, $\Delta_2(T) = s\text{–}\Phi(T)$ – областью полуфредгольмовости оператора T, $\Delta_3(T) = \Phi(T)$ – областью фредгольмовости оператора T, $\Delta_4(T) = \Phi_0(T)$ – областью фредгольмовости нулевого индекса оператора T, $\Delta_5(T) = B(T)$ – браудеровой областью оператора T (смотри, например, определения 2.1 и 2.2 [1]).

Каждое из следующих подмножеств спектра (T):

$$\sigma_{ek}(T) := C \setminus \Delta_k(T),\ k = 1, 2, 3, 4, 5,$$

$$\sigma_{e2}^{+}(T) := \mathrm{C} \setminus \Phi^+(T) \text{ и } \sigma_{e2}^{-}(T) := \mathrm{C} \setminus \Phi^-(T)$$

называется *существенным спектром* оператора T.

В математической литературе, смотри например [3, 4, 5], используются следующие названия и обозначения:

$\sigma_{e1}(T) = \sigma_{eg}(T)$ – *существенный спектр Голдберга*,

$\sigma_{e2}(T) = \sigma_{ek}(T)$ – *существенный спектр Като*, $\sigma_{ek}^{-}(T)$ – *существенный спектр Густафсона-Вейдмана*, $\sigma_{ek}^{+}(T)$ – *существенный спектр Вольфа*,

$\sigma_{e3}(T) = \sigma_{ef}(T)$ – *существенный спектр Фредгольма*,

$\sigma_{e4}(T) = \sigma_{ew}(T)$ – *существенный спектр Вейля* (*существенный спектр Шехтера*), $\sigma_{e5}(T) = \sigma_{eb}(T)$ – *существенный спектр Браудера*.

Заметим, что существенные спектры удовлетворят следующим включениям:

$$\sigma_{eg}(T) \subset \sigma_{ek}(T) \subset \sigma_{ef}(T) \subset \sigma_{ew}(T) \subset \sigma_{eb}(T) \subset \sigma(T),$$

$$\sigma_{ek}(T) \subset \sigma_{ek}^{+}(T) \subset \sigma_{ef}(T), \subset \sigma_{ek}(T) \subset \sigma_{ek}\,(T) \subset \sigma_{ef}(T).$$

Следуя V. Kordula, определим *спектр Апостола* $\sigma_\gamma(T)$ и *существенный спектр Апостола* $\sigma_{e\gamma}(T)$ следующим образом [6]:

$$\sigma_\gamma(T) := \{\lambda \in \mathrm{C}:\ T-\lambda I \text{ не является полурегулярным}\},$$

$$\sigma_{e\gamma}(T) := \{\lambda \in \mathrm{C}:\ T-\lambda I \text{ не является существенно полурегулярным}\}.$$

Для существенного спектра Апостола $\sigma_{e\gamma}(T)$, который является непустым компактным множеством, имеет место следующая взаимосвязь с другими существенными спектрами:

$$\partial\sigma_{ef}(T) \subset \sigma_{e\gamma}(T) \subset \sigma_{ef}(T), \quad \sigma_{eg}(T) \subset \sigma_{e\gamma}(T) \subset \sigma_{ek}(T)$$

$$\text{и} \quad \partial\sigma_{ek}(T) \subset \sigma_{e\gamma}(T) \subset \sigma_{ek}(T), \quad \partial\sigma_{ek}(T) \subset \partial\sigma_{e\gamma}(T),$$

где $\partial\sigma_{ef}(T)$, $\partial\sigma_{ek}(T)$ *и* $\partial\sigma_{e\gamma}(T)$ – *граница существенного спектра, соответственно, Фредгольма, Като и Апостола.*

Рассмотрим ограниченный линейный оператор взвешенного сдвига T, задаваемый следующей формулой:

$$T(x_1, x_2, \ldots) := (0, a_1x_1, a_2x_2, \ldots), \quad x = (x_k) \in \boldsymbol{l}_1, \tag{1}$$

где (a_k) – последовательность весов такая, что $a_k \in \boldsymbol{C}$, $\sup\{|a_k| : k \in \boldsymbol{N}\} < \infty$.

Для исследования спектра оператора взвешенного сдвига T целесообразно рассмотреть следующую классификацию в зависимости от последовательности весов a_k:

a) $\forall$ k, $a_k \neq 0$ и $\inf |a_k| > 0$;

b) $\forall$ k, $ak \neq 0$ и $\inf |a_k| = 0$;

c) $\exists\, a_k = 0$ и число нулей среди весов a_k конечно;

d) $\exists\, a_k = 0$ и число нулей среди весов a_k бесконечно.

Известно, смотри например [7], что спектр оператора взвешенного сдвига T из $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{l}_1)$, определяемый по формуле (1), есть замкнутый круг, т.е. $\sigma(T)=\{\lambda \in C: |\lambda| \leq r_\sigma\}$, где спектральный радиус r, вычисляемый так же, как в случае гильбертова пространства $\boldsymbol{l}_2$, равен

$$r_\sigma = \lim_{k \to \infty}(\|T^k\|)^{1/k} = \lim_{k \to \infty}(\sup_{m \geq 1}|a_m \ldots a_{m+k-1}|)^{1/k}. \qquad (2)$$

Сформулируем общее утверждение о существенных спектрах Апостола, Голдберга, Фредгольма, Вейля и Браудера для оператора взвешенного сдвига T при различных условиях на его веса.

Теорема 1. *Пусть T – оператор взвешенного сдвига из $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{l}_1)$, задаваемый формулой (1). Тогда для существенных спектров Апостола, Голдберга, Фредгольма, Вейля и Браудера справедливы следующие представления:*

1. *Если веса удовлетворяют условиям* b) *и* d), *тогда*

$$\sigma_{e\gamma}(T) = \sigma_{eg}(T) = \sigma_{ef}(T) = \sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = (T) = \{\lambda \in C: |\lambda| \leq r_\sigma\},$$

где r_σ – спектральный радиус оператора T, определяемый по формуле (2).

2. *Если веса удовлетворяют условию* a), *тогда*

$$\sigma_{e\gamma}(T) = \sigma_{eg}(T) = \sigma_{ef}(T) = \{\lambda \in C: r_1 \leq |\lambda| \leq r_\sigma\}, \text{ а}$$

$$\sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \sigma(T) = \{\lambda \in C: |\lambda| \leq r_\sigma\},$$

где r_1 определяется по формуле

$$r_1 = \sup_{n \geq 1}(\inf_{m \geq 2}|a_m \ldots a_{m+n-1}|)^{1/n}.$$

3. *Если веса удовлетворяют условию* c) *при* $\inf\{|a_n|: n \geq k+1\} > 0$, *где a_k – последний нулевой вес, тогда*

$$\sigma_{eg}(\sigma) = \sigma_{ef}(T) = \{\lambda \in C: r_2 \leq |\lambda| \leq r_\sigma\},$$

$$\sigma_{e\gamma}(T) = \{\lambda \in C: r_2 \leq |\lambda| \leq r_\sigma\} \cup \{0\},$$

$$\sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \{\lambda \in C: |\lambda| \leq r_\sigma\},$$

а если $\inf\{|a_n|: n \geq k+1\} = 0$, *тогда*

$$\sigma_{e\gamma}(T) = \sigma_{eg}(T) = \sigma_{ef}(T) = \{\lambda \in C: r_2 \leq |\lambda| \leq r_\sigma\} \cup \{0\},\ \sigma_{ew}(T) = \sigma_{eb}(T) = \{\lambda \in C: |\lambda| \leq r_\sigma\},$$

где r_2 определяется по формуле

$$r_2 = \sup_{n \geq 1}(\inf_{m \geq j+2}|a_m \ldots a_{m+n-1}|)^{1/n},$$

а $j = \max\{k \geq 1: a_k = 0\}$.

Доказательство этой теоремы следует из статьи [7], из лемм 1-6 статьи [8], а также включений, показывающих взаимосвязь существенного спектра Апостола с другими существенными спектрами (см. выше).

Известно, что для полуфредгольмовых операторов справедливы теоремы Като об устойчивости свойства полуфредгольмовости, даже с сохранением индекса, при малых по норме и при компактных возмущениях оператора (смотри теорему IV.5.26 в [9]).

С помощью примера 2.5 работы [2] можно показать, что спектр Апостола $\sigma_{e\gamma}(T)$ и существенный спектр Апостола $\sigma_{e\gamma}(T)$ неустойчивы относительно компактных возмущений. Однако в работе [6] доказана теорема об устойчивости существенного спектра Апостола относительно возмущений операторами конечного ранга.

Нашей задачей является исследование возмущенных операторов $T + S$ для существенно полурегулярных операторов T и устойчивости соответствующего существенного спектра, где S пробегает некоторую часть всевозможных операторов, коммутирующих с T. В зависимости от того, какая часть этого подпространства операторов выделена, получаются различные теоремы об инвариантных свойствах существенно полурегулярного оператора.

Теорема 2. *Пусть $T, F \in B(X)$ и пусть F – оператор конечного ранга. Тогда для существенного спектра Апостола справедливо равенство*

$$\sigma_{e\gamma}(T+F) = \sigma_{e\gamma}(T).$$

Кроме того, $\sigma_{e\gamma}(T)$ устойчив относительно компактных коммутирующих операторов, хотя $\sigma_{\gamma}(T)$ неустойчив ни относительно операторов конечного ранга, ни относительно коммутирующих компактных операторов.

Рассмотрим новый класс возмущающих операторов, а именно класс строго сингулярных операторов. Пусть X и Y – нормированные линейные пространства. Сформулируем определения строго сингулярного оператора. Пусть $S \in \boldsymbol{B}(X, Y)$ – ограниченный линейный оператор, оператор S называется *строго сингулярным*, если он не имеет ограниченного обратного на любом бесконечномерном подпространстве из области определения оператора S.

Заметим, что можно дать другие эквивалентные определения строго сингулярного оператора, которые звучат следующим образом. Пусть $S \in \boldsymbol{B}(X, Y)$ – ограниченный линейный оператор, оператор S называется *строго сингулярным*, если для любого бесконечномерного подпространства $E \subset X$ ($\dim E = \infty$) имеет место равенство

$$\inf\{\|Sx\|: \|x\| = 1\} = 0.$$

Пусть $S \in \boldsymbol{B}(X, Y)$ – ограниченный линейный оператор, оператор S называется *строго сингулярным*, если для любого бесконечномерного замкнутого подпространства $M \subset X$, сужение оператора S на M не является гомеоморфизмом, то есть $\exists\ \beta > 0$, что $\|Sx\| \geq \beta\ \|x\|$, $\forall\ x \in M$.

Данные определения строго сингулярного оператора описаны, например, в следующих работах [10, 11, 12, 13]. Совокупность всех строго сингулярных операторов обозначим через $\boldsymbol{S}(X, Y)$. В случае когда пространства X и Y совпадают, $X = Y$, совокупность всех строго сингулярных операторов обозначается через $\boldsymbol{S}(X)$.

Изучение строго сингулярных операторов представляет интерес в связи со следующими вопросами. Во-первых, для некоторых пространств строго сингулярные операторы совпадают с классом операторов, возмущение которыми сохраняет индекс произвольного оператора Фредгольма. Во-вторых, они тесно связаны с компактными операторами. В работе Т. Като [14] показано, что если X и Y – гильбертовы пространства, то множество строго сингулярных операторов из X в Y совпадает с множеством компактных операторов. В общем случае это утверждение неверно.

Сформулируем один из основных результатов работы, касающийся свойства устойчивости существенного спектра Апостола относительно коммутирующих строго сингулярных возмущений.

Теорема 3. *Пусть оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ и возмущающий оператор $S \in \boldsymbol{S}(X)$ являются строго сингулярными операторами, коммутирующими с оператором T, то есть TS = ST, тогда справедливо следующее равенство для существенного спектра Апостола:*

$$\sigma_{e\gamma}(T + S) = \sigma_{e\gamma}(T). \tag{3}$$

Доказательство этого равенства (3), говорящего об инвариантности существенного спектра Апостола относительно коммутирующих строго сингулярных операторов, непосредственно вытекает из следующей ниже теоремы 4 о возмущении существенно полурегулярного оператора коммутирующим строго сингулярным оператором.

Теорема 4. *Пусть $T \in \boldsymbol{B}(X)$ – существенно полурегулярный оператор и $S \in S(X)$ – строго сингулярный оператор, коммутирующий с T, TS = ST, тогда возмущенный оператор T + S также существенно полурегулярный оператор.*

Заметим, что в теореме 4, вообще говоря, нельзя поменять слова "существенно полурегулярный" на "полурегулярный". Покажем это на следующем примере.

Контрпример. Пусть $T = I$ в гильбертовом пространстве H с ортонормированным базисом $\{e_i;\ i=1, 2, \ldots\}$, а S – ортогональный проектор на подпространство, порожденное вектором e_1. Тогда T – полурегулярный оператор, S – оператор конечного ранга (т.е. строго сингулярный), $TS = ST$, но $T - S$ не является полурегулярным оператором.

Отметим также существенность условия коммутируемости операторов T и S в теореме 4.

Следствие 1. *Пусть T – ограниченный линейный оператор на банаховом пространстве X, $T \in \boldsymbol{B}(X)$, тогда для существенного спектра Апостола справедливо включение*

$$\sigma_{e\gamma}(T) \subset \bigcap_{S\in \boldsymbol{S}(X),\ TS=ST} \sigma_\gamma(T + S) \tag{4}$$

Для доказательства включения (4) достаточно доказать эквивалентное включение для соответствующих резольвентных множеств $\rho_{e\gamma}(T) = \mathrm{C} \setminus \sigma_{e\gamma}(T)$ и $\rho_\gamma(T + S) = \mathrm{C} \setminus \sigma_\gamma(T + S)$, а именно

$$\bigcup_{S,\ TS=ST} \rho_\gamma(T + S) \subset \rho_{e\gamma}(T).$$

Если $\lambda \in \rho_\gamma(T + S)$, то $T + S - \lambda I$ – полурегулярный оператор и, следовательно, $T + S - \lambda I$ – существенно полурегулярный оператор. В силу теоремы 4, так как S – строго сингулярный оператор, то возмущенный оператор

$$(T + S - \lambda I) - S = T - \lambda I$$

является существенно полурегулярным и, следовательно, $\lambda \in \rho_{e\gamma}(T)$.

Теорема 5. *Пусть $T \in \boldsymbol{B}(X)$, тогда существенный спектр Апостола $\sigma_{e\gamma}(T)$ – это наибольшее подмножество спектра Апостола $\sigma_\gamma(T)$, инвариантное относительно всех коммутирующих строго сингулярных возмущений S, то есть*

$$\sigma_{e\gamma}(T) = \bigcap_{S\in \boldsymbol{S}(X),\ TS=ST} \sigma_\gamma(T + S). \tag{5}$$

В силу следствия 1 для доказательства равенства (5) теоремы достаточно показать обратное включение вида

$$\bigcap \sigma_\gamma(T + S) \subset \sigma_{e\gamma}(T),$$

где пересечение берется по всем строго сингулярным операторам, коммутирующим с T. Как и в предыдущем следствии, достаточно убедиться в справедливости включения

$$\rho_{e\gamma}(T) \subset \bigcup_{S,\ TS=ST} \rho_{\gamma}(T+S)$$

Действительно, пусть $\lambda \in \rho_{e\gamma}(T)$, то есть $T - \lambda I$ – существенно полурегулярный оператор, тогда по теореме о разложении Като, связанном с оператором $T - \lambda I$ (смотри, например, [15, теорема 2.1 или 16, теорема 2]), для банахова пространства X существует разложение в прямую сумму $X = X_1 \oplus X_2$ замкнутых подпространств X_1 и X_2, где $\dim X_1 < \infty$. Эти подпространства инвариантны относительно оператора $T - \lambda I$ и, следовательно, относительно оператора T. Кроме того, сужение оператора $T - \lambda I$ на подпространство X_1 является нильпотентным оператором, сужение оператора $T - \lambda I$ на подпространство X_2, $(T - \lambda I) \mid X_2$ – является полурегулярным оператором. Обозначим через S оператор конечного ранга на X, то есть он строго сингулярный, определенный следующим образом: $S = I$ на множестве X_1 и $S = 0$ на множестве X_2, то есть $S = I \oplus 0$ на множестве $X = X_1 \oplus X_2$. Очевидно, что $TS = ST$. В силу теоремы 1 [17] замкнутость области значений сохраняется при возмущении операторами конечного ранга, поэтому область значений $R(T + S - \lambda I)$ замкнута. Так как оператор $T - \lambda I$ нильпотентен на X_1 и оператор $T - \lambda I$ полурегулярен на X_2, то справедливо следующее включение

$$N(T - \lambda I + S) = N((T - \lambda I) \mid X_2) \subset R^{\infty}((T - \lambda I) \mid X_2) \subset$$
$$\subset R^{\infty}((T - \lambda I) \mid X_2) \oplus X_1 = R^{\infty}(T - \lambda I + S).$$

Поэтому оператор $T + S - \lambda I$ является полурегулярным и, следовательно, $\lambda \in \rho_{\gamma}(T + S)$.

Заметим, что если рассматривать в качестве возмущений $S \in \boldsymbol{B}(X)$ только операторы конечного ранга, то, как показал В. Кордула [9, теорема 2], справедливо заключение теоремы 3 без условия коммутируемости. Для операторов конечного ранга, даже коммутирующих с невозмущенным оператором, как показано в контрпримере, результат Кордулы не верен для спектра Апостола.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Еровенко, В.А.*** Функциональный анализ: спектральные и фредгольмовы свойства линейных операторов / В.А. Еровенко. – Мн., 2002.
2. ***Müller, V.*** On the regular spectrum / V. Müller // J. Oper. Theory. – 1994. – Vol. 31. – P. 363-380.
3. ***Berberian, S.K.*** The Weyl spectrum of an operators / S.K. Berberian // Indiana Univ. Math. J. – 1970. – Vol. 20. – № 6. – P. 529-544.
4. ***Gustafson, K.*** Weyl's theorems / K. Gustafson // Linear Oper. Approx. Int. Ser. Num. Math. – 1972. – Vol. 20. – P. 80-93.
5. ***Gustafson, K.*** On the essential spectrum / K. Gustafson, J. Weidman // J. Math. Anal. Appl. – 1969. – Vol. 25. – № 1. – P. 121-127.
6. ***Kordula, V.*** The essential Apostol spectrum and finite-dimensional perturbations / V. Kordula // Proc.R.Ir.Acad. – 1996. – Vol. 96A. – P. 105-109.
7. ***Мартон, М.В.*** Существенные спектры Фредгольма, Вейля и Браудера операторов взвешенного сдвига / М.В. Мартон // Вестник Белорусского государственного университета. – 2003.– № 1. – С. 61-66.
8. ***Мартон, М.В.*** Существенный спектр Апостола в примерах и приложениях / М.В. Мартон: материалы III республиканской научной конференции молодых ученых и студентов "Современные проблемы математики и вычислительной техники". – Брест: УО "БГТУ", 2003. – С. 202-206.
9. ***Като, Т.*** Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М.: Мир. – 1972.

10. ***Caradus, S.P.*** Operators of Riesz type / S.P. Caradus // Pacific J. Math. – 1966. – Vol. 18. – № 1. – P. 61-71.
11. ***Caradus, S.R.*** Calkin algebras and algebras of operator on Banach spaces / S.R. Caradus, W.E. Pfaffenberger, B. Yood. – N.Y.: Marsel Dekker, 1974.
12. ***Goldberg, S.*** On some open questions concerning strictly singular operators / S. Goldberg, E. Thorp // Proc. Amer. Math. Soc. – 1963. – Vol. 14. – № 1-2. – P. 334-336.
13. ***Гохберг, И.Ц.*** О нормально разрешимых операторах и связанных с ними идеалами / И.Ц. Гохберг, А.С. Маркус, И.А. Фельдман // Известия Молдавского филиала Академии наук СССР. – 1960. – № 10. – С. 51-70.
14. ***Kato, T.*** Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators / T. Kato // J. Analyse Math. – 1958. – Vol. 6. – P. 273-322.
15. ***Rakočević V.*** Generalized spectrum and commuting compact perturbations / V. Rakočević // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1993. – Vol. 36. – P. 197-209.
16. ***Еровенко, В.А.*** Свойства существенно полурегулярных операторов и соответствующего спектра Апостола / В.А. Еровенко, М.В. Мартон // Доклады НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48. – № 6. – С. 16-20.
17. ***Гольдман, М.А.*** О произведениях, степенях и сужениях гомоморфизмов / М.А. Гольдман, С.Н. Крачковский // Докл. АН СССР. – 1968. – Т. 181. – № 5. – С. 1038-1041.

Поступила в редакцию 16.12.2008 г.