УДК 512.548

Г.Н. ВОРОБЬЕВ, К.А. РЕШКО

МНОГОМЕСТНЫЕ ДИСТРИБУТИВНЫЕ ОПЕРАЦИИ НА ДЕКАРТОВЫХ СТЕПЕНЯХ

Если в универсальной алгебре < A, +, [ ] > с бинарной операцией + и l-арной операцией [ ] для любого $i = 1, \ldots, l$ выполняется тождество

$$[a_1 \ldots a_{i-1}(b_1 + b_2)a_{i+1} \ldots a_l] = [a_1 \ldots a_{i-1}b_1a_{i+1} \ldots a_l] + [a_1 \ldots a_{i-1}b_2a_{i+1} \ldots a_l],$$

то l-арную операцию [ ] называют дистрибутивной относительно операции +. Само записанное тождество называют тождеством дистрибутивности. В данной работе всякой универсальной алгебре < A, +, × > с бинарными операциями сложения и умножения для любых $k \geq 2$, $l \geq 2$ ставится в соответствие универсальная алгебра $< A^k, +, [\ ]_{l,k} >$ с бинарной операцией покомпонентного сложения элементов декартовой степени A^k и l-арной операцией $[\ ]_{l,k}$, которая определена на A^k специальным образом с помощью операции ×. Доказывается, что если операция × дистрибутивна относительно операции +, то l-арная операция $[\ ]_{l,k}$ дистрибутивна относительно операции покомпонентного сложения элементов в A^k.

Введение

В работе [1] А.М. Гальмак, рассматривая произвольный группоид < A, × >, для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$, определил на декартовой степени A^k вначале бинарную операцию

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \circ (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1y_2, x_2y_3, \ldots, x_{k-1}y_k, x_ky_1), \tag{1}$$

а затем l-арную операцию

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,k} = \mathbf{x}_1 \circ (\mathbf{x}_2 \circ (\ldots (\mathbf{x}_{l-2} \circ (\mathbf{x}_{l-1} \circ \mathbf{x}_l)) \ldots)). \tag{2}$$

Понятно, что операция $[\ ]_{2,k}$ совпадает с операцией $\circ$.

Изучению l-арной операции $[\ ]_{l,k}$, помимо работы [1], посвящены также статьи [2 – 4], где, в частности, получены формулы, выражающие компоненты элемента $[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,k}$ через компоненты исходных элементов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_l$. Если < A, × > – полугруппа, $k = n - 1$, $l = n$, $n \geq 3$, то эти формулы аналогичны формулам, с помощью которых Пост определил [5] n-арную операцию на множестве всех n-арных подстановок.

А.М. Гальмак показал [1 – 4], что ряд свойств бинарной операции × наследуется, иногда с теми или иными ограничениями, l-арной операцией $[\ ]_{l,k}$. В связи с этим возникает вопрос: будет ли l-арная операция $[\ ]_{l,k}$ дистрибутивной относительно операции покомпонентного сложения элементов в A^k, если бинарная операция × дистрибутивна относительно операции +?

Поиск ответа на поставленный вопрос начнем с рассмотрения подтверждающих примеров.

Пример 1. Согласно определению, бинарная $\circ$, тернарная $[\ ]_{3,2}$ и 4-арная $[\ ]_{4,2}$ операции, определенные на R^2, где R рассматривается как группоид с обычными операциями сложения + и умножения × чисел, имеют следующий вид:

$$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1y_2, x_2y_1);$$

$$[(x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)]_{3,2} = (x_1y_2z_1, x_2y_1z_2);$$

$$[(x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)(u_1, u_2)]_{4,2} = (x_1y_2z_1u_2, x_2y_1z_2u_1).$$

Положим

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2),\ \mathbf{z} = (z_1, z_2),\ \mathbf{u} = (u_1, u_2),\ \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in R^2.$$

Так как

$$[(\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{zu}]_{3,2} = ((x_1 + y_1)z_2u_1, (x_2 + y_2)z_1u_2) =$$
$$= (x_1z_2u_1 + y_1z_2u_1, x_2z_1u_2 + y_2z_1u_2),$$
$$[\mathbf{xzu}]_{3,2} + [\mathbf{yzu}]_{3,2} = (x_1z_2u_1, x_2z_1u_2) + (y_1z_2u_1, y_2z_1u_2) =$$
$$= (x_1z_2u_1 + y_1z_2u_1, x_2z_1u_2 + y_2z_1u_2),$$
$$[\mathbf{x}(\mathbf{y} + \mathbf{z})\mathbf{u}]_{3,2} = (x_1(y_2 + z_2)u_1, x_2(y_1 + z_1)u_2) =$$
$$= (x_1y_2u_1 + x_1z_2u_1, x_2y_1u_2 + x_2z_1u_2),$$
$$[\mathbf{xyu}]_{3,2} + [\mathbf{xzu}]_{3,2} = (x_1y_2u_1, x_2y_1u_2) + (x_1z_2u_1, x_2z_1u_2) =$$
$$= (x_1y_2u_1 + x_1z_2u_1, x_2y_1u_2 + x_2z_1u_2),$$
$$[\mathbf{xy}(\mathbf{z} + \mathbf{u})]_{3,2} = (x_1y_2(z_1 + u_1), x_2y_1(z_2 + u_2)) =$$
$$= (x_1y_2z_1 + x_1y_2u_1, x_2y_1z_2 + x_2y_1u_2),$$
$$[\mathbf{xyz}]_{3,2} + [\mathbf{xyu}]_{3,2} = (x_1y_2z_1, x_2y_1z_2) + (x_1y_2u_1, x_2y_1u_2) =$$
$$= (x_1y_2z_1 + x_1y_2u_1, x_2y_1z_2 + x_2y_1u_2),$$

то в $\mathbb{R}^2$ выполняются тождества:

$$[(\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{zu}]_{3,2} = [\mathbf{xzu}]_{3,2} + [\mathbf{yzu}]_{3,2},$$
$$[\mathbf{x}(\mathbf{y} + \mathbf{z})\mathbf{u}]_{3,2} = [\mathbf{xyu}]_{3,2} + [\mathbf{xzu}]_{3,2},$$
$$[\mathbf{xy}(\mathbf{z} + \mathbf{u})]_{3,2} = [\mathbf{xyz}]_{3,2} + [\mathbf{xyu}]_{3,2}.$$

Следовательно, тернарная операция $[\ ]_{3,2}$ дистрибутивна относительно операции +.

Так как

$$((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \circ (z_1, z_2) = (x_1z_2 + y_1z_2, x_2z_1 + y_2z_1),$$
$$(x_1, x_2) \circ (z_1, z_2) + (y_1, y_2) \circ (z_1, z_2) = (x_1z_2 + y_1z_2, x_2z_1 + y_2z_1),$$
$$(z_1, z_2) \circ ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = (z_1x_2 + z_1y_2, z_2x_1 + z_2y_1),$$
$$(z_1, z_2) \circ (x_1, x_2) + (z_1, z_2) \circ (y_1, y_2) = (z_1x_2 + z_1y_2, z_2x_1 + z_2y_1),$$

то операция $\circ$ дистрибутивна относительно операции +.

Вычисления, которые, ввиду их громоздкости, мы не приводим, показывают, что 4-арная операция $[\ ]_{4,2}$ дистрибутивна относительно операции +.

Пример 2. Определим на $\mathbb{R}^3$ бинарную операцию $\circ$ и тернарную операцию $[\ ]_{3,3}$:

$$(x_1, x_2, x_3) \circ (y_1, y_2, y_3) = (x_1y_2, x_2y_3, x_3y_1);$$
$$[(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)(z_1, z_2, z_3)] = (x_1y_2z_3, x_2y_3z_1, x_3y_1z_2).$$

Так как

$$((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) \circ (z_1, z_2, z_3) =$$
$$= (x_1z_2 + y_1z_2, x_2z_3 + y_2z_3, x_3z_1 + y_3z_1),$$
$$(x_1, x_2, x_3) \circ (z_1, z_2, z_3) + (y_1, y_2, y_3) \circ (z_1, z_2, z_3) =$$
$$= (x_1z_2 + y_1z_2, x_2z_3 + y_2z_3, x_3z_1 + y_3z_1),$$
$$(z_1, z_2, z_3) \circ ((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) =$$
$$= (z_1x_2 + z_1y_2, z_2x_3 + z_2y_3, z_3x_1 + z_3y_1),$$
$$(z_1, z_2, z_3) \circ (x_1, x_2, x_3) + (z_1, z_2, z_3) \circ (y_1, y_2, y_3) =$$
$$= (z_1x_2 + z_1y_2, z_2x_3 + z_2y_3, z_3x_1 + z_3y_1),$$

то операция $\circ$ дистрибутивна относительно операции +.

Снова, не приводя вычислений, отметим дистрибутивность 4-арной операции $[\ ]_{4,2}$ относительно операции +.

Приведенные примеры наводят на мысль о дистрибутивности l-арной операции $[\ ]_{l,k}$ относительно операции + в самом общем случае, то есть для произвольной универсальной алгебры $< A, +, \times >$ и любых $k \geq 2$, $l \geq 2$. Покажем, что это действительно так. Предварительно убедимся в дистрибутивности операции $[\ ]_{2,k}$, то есть операции $\circ$.

Основная часть

Лемма. Пусть на множестве A определены бинарная операция + и дистрибутивная относительно нее бинарная операция $\times$, обозначение которой в дальнейшем для краткости записей указывать не будем. Пусть также $k \geq 2$. Тогда операция $\circ$, определяемая на A^k с помощью (1), является дистрибутивной относительно операции +, определенной на A^k покомпонентно.

Доказательство. Используя определение операции $\circ$ и дистрибутивность в A операции $\times$ относительно операции +, получим

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \circ ((y_1, y_2, \ldots, y_k) + (z_1, z_2, \ldots, z_k)) =$$
$$= (x_1, x_2, \ldots, x_k) \circ (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_k + z_k) =$$
$$= (x_1(y_2 + z_2), x_2(y_3 + z_3), \ldots, x_{k-1}(y_k + z_k), x_k(y_1 + z_1)) =$$
$$= (x_1y_2 + x_1z_2, x_2y_3 + x_2z_3, \ldots, x_{k-1}y_k + x_{k-1}z_k, x_ky_1 + x_kz_1) =$$
$$= (x_1y_2, x_2y_3, \ldots, x_{k-1}y_k, x_ky_1) + (x_1z_2, x_2z_3, \ldots, x_{k-1}z_k, x_kz_1) =$$
$$= (x_1, x_2, \ldots, x_k) \circ (y_1, y_2, \ldots, y_k) + (x_1, x_2, \ldots, x_k) \circ (z_1, z_2, \ldots, z_k),$$

то есть

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \circ ((y_1, y_2, \ldots, y_k) + (z_1, z_2, \ldots, z_k)) =$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \circ (y_1, y_2, \ldots, y_k) + (x_1, x_2, \ldots, x_k) \circ (z_1, z_2, \ldots, z_k).$$

Аналогично получаем

$$((y_1, y_2, \ldots, y_k) + (z_1, z_2, \ldots, z_k)) \circ (x_1, x_2, \ldots, x_k) =$$
$$= (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_k + z_k) \circ (x_1, x_2, \ldots, x_k) =$$
$$= ((y_1 + z_1)x_2, (y_2 + z_2)x_3, \ldots, (y_{k-1} + z_{k-1})x_k, (y_k + z_k)x_1) =$$
$$= (y_1x_2 + z_1x_2, y_2x_3 + z_2x_3, \ldots, y_{k-1}x_k + z_{k-1}x_k, y_kx_1 + z_kx_1) =$$
$$= (y_1x_2, y_2x_3, \ldots, y_{k-1}x_k, y_kx_1) + (z_1x_2, z_2x_3, \ldots, z_{k-1}x_k, z_kx_1) =$$
$$= (y_1, y_2, \ldots, y_k) \circ (x_1, x_2, \ldots, x_k) + (z_1, z_2, \ldots, z_k) \circ (x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

то есть

$$((y_1, y_2, \ldots, y_k) + (z_1, z_2, \ldots, z_k)) \circ (x_1, x_2, \ldots, x_k) =$$
$$= (y_1, y_2, \ldots, y_k) \circ (x_1, x_2, \ldots, x_k) + (z_1, z_2, \ldots, z_k) \circ (x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Из доказанных тождеств следует дистрибутивность операции $\circ$ относительно операции +. Лемма доказана.

Теорема. Пусть на множестве A определены бинарная операция + и дистрибутивная относительно нее бинарная операция $\times$, обозначение которой в дальнейшем указывать не будем. Пусть также $k \geq 2$, $l \geq 2$. Тогда l-арная операция $[\ ]_{l,k}$, определяемая на A^k с помощью (2), является дистрибутивной относительно операции +, определенной на A^k покомпонентно.

Доказательство. Случай $l = 2$ доказан в лемме.

Пусть теперь $l > 2$. Рассмотрим три случая.

1) $i = 1$. Используя определение операции $[\ ]_{l,k}$ и лемму, получим

$$[(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,k} = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) \circ [\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,k} =$$
$$= \mathbf{b}_1 \circ [\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,k} + \mathbf{b}_2 \circ [\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,k} = [\mathbf{b}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,k} + [\mathbf{b}_2\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,k},$$

то есть

$$[(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,k} = [\mathbf{b}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,k} + [\mathbf{b}_2\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,k}.$$

2) $i = l$. Используя (2), затем $l - 1$ раз дистрибутивность слева операции $\circ$ относительно операции + (лемма) и снова (2), получим

$$[a_1 \ldots a_{l-1}(b_1 + b_2)]_{l,k} = a_1 \circ (a_2 \circ (\ldots (a_{l-2} \circ (a_{l-1} \circ (b_1 + b_2)) \ldots)) =$$
$$= a_1 \circ (a_2 \circ (\ldots (a_{l-2} \circ (a_{l-1} \circ b_1 + a_{l-1} \circ b_2)) \ldots)) = \ldots$$
$$\ldots = a_1 \circ (a_2 \circ (\ldots (a_{l-2} \circ (a_{l-1} \circ b_1)) \ldots)) + a_1 \circ (a_2 \circ (\ldots (a_{l-2} \circ (a_{l-1} \circ b_2)) \ldots)) =$$
$$= [a_1 \ldots a_{l-1}b_1]_{l,k} + [a_1 \ldots a_{l-1}b_2]_{l,k},$$

то есть

$$[a_1 \ldots a_{l-1}(b_1 + b_2)]_{l,k} = [a_1 \ldots a_{l-1}b_1]_{l,k} + [a_1 \ldots a_{l-1}b_2]_{l,k}.$$

3) $i \in \{2, \ldots, l-1\}$. Используя определение операции $[\ ]_{l,k}$, затем рассмотренные в 1) и 2) случаи $i = 1$, $i = l$ и снова определение операции $[\ ]_{l,k}$, получим

$$[a_1 \ldots a_{i-1}(b_1 + b_2)a_{i+1} \ldots a_l]_{l,k} = [a_1 \ldots a_{i-1}[(b_1 + b_2)a_{i+1} \ldots a_l]_{l-i+1,k}]_{i,k} =$$
$$= [a_1 \ldots a_{i-1}([b_1a_{i+1} \ldots a_l]_{l-i+1,k} + [b_2a_{i+1} \ldots a_l]_{l-i+1,k})]_{i,k} =$$
$$= [a_1 \ldots a_{i-1}[b_1a_{i+1} \ldots a_l]_{l-i+1,k}]_{i,k} + [a_1 \ldots a_{i-1}[b_2a_{i+1} \ldots a_l]_{l-i+1,k}]_{i,k} =$$
$$= [a_1 \ldots a_{i-1}b_1a_{i+1} \ldots a_l]_{l,k} + [a_1 \ldots a_{i-1}b_2a_{i+1} \ldots a_l]_{l,k},$$

то есть

$$[a_1 \ldots a_{i-1}(b_1 + b_2)a_{i+1} \ldots a_l]_{l,k} =$$
$$= [a_1 \ldots a_{i-1}b_1a_{i+1} \ldots a_l]_{l,k} + [a_1 \ldots a_{i-1}b_2a_{i+1} \ldots a_l]_{l,k}.$$

Заключение

Таким образом, доказано, что последнее тождество выполняется в A^k для любого $i = 1, \ldots, l$. Следовательно, l-арная операция $[\ ]_{l,k}$ дистрибутивна относительно операции + . Теорема доказана.

Напомним, что универсальную алгебру $< A, +, [\ ] >$ с двумя: бинарной и n-арной операциями $+ : A^2 \to A$, $[\ ] : A^n \to A$ называют [6, 7] (2, n)-кольцом, если выполняются следующие условия:

1) $< A, + >$ – абелева группа;

2) n-арная операция [ ] дистрибутивна относительно операции +, то есть в $< A, +, [\ ] >$ для любого $i = 1, \ldots, n$ выполняется тождество дистрибутивности.

При $n = 2$ определение (2, n)-кольца превращается в определение обычного кольца, то есть понятие (2, 2)-кольца совпадает с понятием кольца.

Следствие 1. Если $< A, +, \times >$ – кольцо, $k \geq 2$, $l \geq 2$, то $< A^k, +, [\ ]_{l,k} >$ – $(2, l)$-кольцо.

В [1] установлено, что если $< A, \times >$ – полугруппа, $n \geq 3$, $s \geq 1$, то n-арная операция $[\ ]_{s(n-1)+1,\, n-1}$ ассоциативна. Поэтому верно

Следствие 2 [4]. Если $< A, +, \times >$ – ассоциативное кольцо, $n \geq 3$, $s \geq 1$, то универсальная алгебра $< A^{n-1}, +, [\ ]_{s(n-1)+1,\, n-1} >$ является ассоциативным $(2, s(n-1)+1)$-кольцом. В частности, $< A^{n-1}, +, [\ ]_{n,\, n-1} >$ – ассоциативное (2, n)-кольцо.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Гальмак, А.М.*** Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28-34.
2. ***Гальмак, А.М.*** Многоместные неассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Вестник ПГУ. – Серия С. – 2008. – № 3. – С. 66-72.
3. ***Гальмак, А.М.*** О многоместных операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2008. – № 2-3(30). – С. 134-139.
4. ***Гальмак, А.М.*** Полиадические операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2008. – № 1. – С. 112-139.
5. ***Post, E.L.*** Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48. – № 2. – P. 208-350.
6. ***Čupona, G.*** On [m, n]-rings / G. Čupona // Bull. Soc. math. phys. Mased. – 1965. – Vol. 16. – P. 5-10.
7. ***Crombez, G.*** On (n, m)-rings / G. Crombez // Abh. Math. Sem. Univ. – Hamburg. – 1972. – Vol. 37. – P. 180-199.

Поступила в редакцию 11.02.2009 г.