УДК 517.2(07)

В.Э. ЖАВНЕРЧИК

К ВОПРОСУ О НАХОЖДЕНИИ ПРИБЛИЖЕННОЙ СУММЫ ЧИСЛОВОГО РЯДА

В статье рассматривается задача нахождения приближенного значения суммы S сходящегося числового ряда

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k . \qquad (1)$$

Данная задача встречается в математической теории и в практике преподавания студентам университетов и колледжей.

Как известно, для нахождения суммы S сходящегося ряда (1) с заданной точностью Δ нужно выбрать число n слагаемых столь большим, чтобы выполнялось неравенство $|r_n| \le \Delta$, где $r_n = S - S_n$, S_n – частичная сумма ряда. Тогда $S \approx S_n$ или $S = S_n \pm \Delta$.

В работе [1] дается анализ некоторых подходов к нахождению приближенного значения суммы S числового ряда (1) и приводятся два алгоритма для вычисления S. Укажем еще один подход к решению рассматриваемой задачи.

Напомним (см., например, [2]), что цифра приближенного числа a называется верной в узком (широком) смысле, если абсолютная погрешность числа не превосходит половины (одной) единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Определение. Цифры приближенного значения a числа A называются *верными*, если они совпадают с цифрами числа A, записанными в соответствующих разрядах, начиная с первой слева цифры.

Например, для числа $\pi = 3{,}1415\ldots$ приближенное значение $a = 3{,}1415$ имеет верные цифры.

В научной и методической литературе верными цифрами обычно называются либо верные цифры в узком смысле [3], либо верные цифры в широком смысле [4].

Будем предполагать, что слагаемые u_k $(k = 1, 2, \ldots)$ ряда (1) могут быть вычислены с любой степенью точности и практически будем считать, что погрешности их вычисления равны нулю.

Пусть для определенности сумма S числового ряда (1) положительна и его частичная сумма S_n имеет вид

$$S_n = a_0, a_1 \ldots a_m a_{m+1} \ldots$$

или

$$S_n = a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + \ldots + a_m \cdot 10^{-m} + a_{m+1} \cdot 10^{-m-1} + \ldots,$$

где $a_0 \in \mathbf{Z}$, $a_0 \ge 0$, $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $k = \overline{1, m+1}$, $m \in \mathbf{N}$.

Теорема. Если у приближенного значения $S_n = a_0, a_1 \ldots a_m a_{m+1} \ldots$ числа S цифра a_{m+1} – верная в широком смысле, причем $1 \le a_{m+1} \le 8$, то приближенное значение $\tilde{S}_n = a_0, a_1 \ldots a_{m-1} a_m$ числа S имеет верные цифры.

Доказательство. Положим

$$S_n = \tilde{S}_n + (a_{m+1} + \alpha) \cdot 10^{-m-1},$$

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

где $0 \le \alpha < 1$. Так как a_{m+1} – верная в широком смысле цифра приближенного числа S_n, то $|S - S_n| \le 10^{-m-1}$. Отсюда находим:

$$S \ge S_n - 10^{-m-1} = \tilde{S}_n + (a_{m+1} + \alpha - 1) \cdot 10^{-m-1} \ge \tilde{S}_n,$$

$$S \le S_n + 10^{-m-1} = \tilde{S}_n + (a_{m+1} + \alpha + 1) \cdot 10^{-m-1} < \tilde{S}_n + 10^{-m},$$

т.е.

$$\tilde{S}_n \le S < \tilde{S}_n + 10^{-m}.$$

Представим число S в виде

$$S = \tilde{S}_n + \Delta = a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + \ldots + a_m \cdot 10^{-m} + \Delta,$$

где $0 \le \Delta < 10^{-m}$. Округляя число S по недостатку до m десятичных знаков после запятой, получим приближенное число $\tilde{S}_n$, все цифры которого совпадают с цифрами числа S, записанными в соответствующих разрядах, начиная с первой слева цифры. Следовательно, $\tilde{S}_n$ имеет верные цифры, что и требовалось доказать.

Следствие. Если $S = (a_0, a_1 \ldots a_{m-1} a_m a_{m+1} \ldots) \pm 10^{-m-1}$, причем $1 \le a_{m+1} \le 8$, то:

а) $S = (a_0, a_1 \ldots a_{m-1} a_m) \pm 10^{-m}$;

б) $S = (a_0, a_1 \ldots a'_{m-1}) \pm 0{,}5 \cdot 10^{-m+1}$, где $a'_{m-1} = \begin{cases} a_{m-1} & \text{при } a_m < 5, \\ a_{m-1} + 1 & \text{при } a_m \ge 5. \end{cases}$

Если окажется $a_{m+1} = 0$ или $a_{m+1} = 9$, то следует увеличить точность вычислений, привлекая очередной десятичный разряд.

Мажорантой для $|r_n|$ назовем функцию $G(n)$ натурального аргумента n, удовлетворяющую условию: $|r_n| \le G(n)$ при $n = 1, 2, \ldots$. Например, если ряд (1) – знакочередующийся и модули его членов монотонно убывают, то $|r_n| \le |u_{n+1}|$, $n = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, за мажоранту для $|r_n|$ можно принять $|u_{n+1}|$.

Пусть дан сходящийся числовой ряд (1), m – заданное количество цифр после запятой у искомой суммы S, $G(n)$ – известная мажоранта для $|r_n|$. Обозначим $S_n = a_0^{(n)}, a_1^{(n)} \ldots a_m^{(n)} a_{m+1}^{(n)} \ldots$ при $n = 1, 2, \ldots$, где $a_0^{(n)} \in \mathbf{Z}$, $a_0^{(n)} \ge 0$, $a_k^{(n)} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $k = \overline{1, m+1}$, $m \in \mathbf{N}$.

Для нахождения суммы S числового ряда (1) с m верными цифрами после запятой предлагается использовать следующий алгоритм.

Алгоритм I.
Шаг 0. Положить $n = 1$.
Шаг 1. Если $G(n) \le 10^{-m-1}$, то перейти к *шагу 3*, если нет – к *шагу 2*.
Шаг 2. Увеличить значение n на единицу и перейти к *шагу 1*.

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

Шаг 3. Вычислить $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Шаг 4. Если $1 \le a_{m+1}^{(n)} \le 8$ в S_n, то перейти к *шагу 5*, если нет – к *шагу 7*.

Шаг 5. Округлить S_n до величины $\tilde{S}_n = a_0^{(n)}, a_1^{(n)} \dots a_{m-1}^{(n)} a_m^{(n)}$ по недостатку до m десятичных знаков после запятой.

Шаг 6. Прекратить процесс вычисления и записать $S = a_0^{(n)}, a_1^{(n)} \dots a_{m-1}^{(n)} a_m^{(n)} \dots$.

Шаг 7. Выход.

В качестве иллюстрации применения алгоритма I рассмотрим пример.

Пример. Вычислить интеграл $I = \int_0^{0,5} e^{-x^2} dx$ с пятью верными цифрами после запятой.

Решение. Из равенства

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$$

находим

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(n-1)!} + \dots,$$

причем последний ряд сходится при всех $x \in \mathbf{R}$. Интегрируем почленно:

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx = \int_0^{0,5} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(n-1)!} + \dots \right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots \right) \Bigg|_0^{0,5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 2^7 \cdot 3!} + \dots.$$

Полученный числовой ряд – знакочередующийся и модули его членов монотонно убывают. Поэтому за мажоранту для $|r_n|$ примем

$$G(n) = |u_{n+1}|, \; n = 1, 2, \dots.$$

Так как $G(1) = \frac{1}{3 \cdot 2^3} > 10^{-6}$, $G(2) = \frac{1}{5 \cdot 2^5 \cdot 2!} > 10^{-6}$, $G(3) = \frac{1}{7 \cdot 2^7 \cdot 3!} > 10^{-6}$, $G(4) = \frac{1}{9 \cdot 2^9 \cdot 4!} > 10^{-6}$, но $G(5) = \frac{1}{11 \cdot 2^{11} \cdot 5!} < 10^{-6}$, то возьмем пять членов ряда:

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 2^7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 2^9 \cdot 4!} \right) \pm 10^{-6} =$$

$$= \frac{1785491}{3870720} \pm 10^{-6} = (0,4612813\dots) \pm 10^{-6} = |\text{здесь } a_6 = 1| = 0,46128\dots.$$

Следовательно, $\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx = 0,46128\dots$.

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

Заметим, что решение данного примера может быть организовано с помощью обычного восьмиразрядного микрокалькулятора.

Алгоритм I можно также использовать (лишь слегка видоизменив его) при решении задачи нахождения приближенного значения суммы S числового ряда (1) с заданной точностью Δ.

1. Если $\Delta = 10^{-m}$ $(m \in \mathbf{N})$, то достаточно в шаге 6 алгоритма I заменить $S = a_0^{(n)}, a_1^{(n)} \ldots a_{m-1}^{(n)} a_m^{(n)} \ldots$ на $S = \tilde{S}_n \pm 10^{-m}$.

2. Если $\Delta = 0{,}5 \cdot 10^{-m+1}$ $(m \in \mathbf{N})$, то в этом случае достаточно шаг 5 алгоритма I записать в редакции:

Шаг 5′. Округлить S_n до величины $\tilde{\tilde{S}}_n = a_0^{(n)}, a_1^{(n)} \ldots a_{m-1}'^{(n)}$ по правилу дополнения до $m-1$ десятичных знаков после запятой, а в шаге 6 заменить $S = a_0^{(n)}, a_1^{(n)} \ldots a_{m-1}^{(n)} a_m^{(n)} \ldots$ на $S = \tilde{\tilde{S}}_n \pm 0{,}5 \cdot 10^{-m+1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Майсеня, Л.І.*** Да матэматычнай і метадычнай праблем знаходжання набліжнай сумы лікавага шэрагу / Л.І. Майсеня, В.Э. Жаўнерчык // Весці БДПУ. Сер. 3. – 2006. – № 2. – С. 21-24.
2. ***Демидович, Б.П.*** Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – СПб., 2007.
3. ***Волков, Е.А.*** Численные методы / Е.А. Волков. – СПб., 2007.

Поступила в редакцию 02.03.2009 г.

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова